सांख्यिकी के सिद्धान्त और अनुप्रयोग

सांख्यिकी के सिद्धान्त और अनुप्रयोग

डॉ वी एल. अग्रवाल
एम एससी , एम. स्टैट., पीएच डी.
सांख्यिकी विभाग,
उदयपुर विश्वविद्यालय, उदयपुर



राजस्थान हिन्दी ग्रन्थ अकादमी
जयपुर

शिक्षा तथा समाज-कल्याण मंत्रालय, भारत सरकार की विश्वविद्यालय स्तरीय ग्रन्थ-निर्माण योजना के अन्तर्गत, राजस्थान हिन्दी ग्रन्थ अकादमी द्वारा प्रकाशित ।

प्रथम संस्करण : 1977
प्रथमावृत्ति : 1983
Sankhyiki Ke Sidhanta Aur Anuprayoga

भारत सरकार द्वारा रियायती मूल्य पर
उपलब्ध कराये गये कागज से निर्मित ।

मूल्य : 45.00

प्रकाशक :
राजस्थान हिन्दी ग्रन्थ अकादमी
ए-26/2, विद्यालय मार्ग, तिलक नगर
जयपुर-302004

मुद्रक :
गायत्री ऑफसेट प्रेस
नई दिल्ली

माता-पिता

की

पुण्य स्मृति में

प्राक्कथन

विश्व विभिन्न भाषाओं तथा संस्कृतियों का रंगस्थल है। यह रंग-बिरंगे फूलों का उपवन है। विविधता ही इसका सौंदर्य है। भाषाएँ और संस्कृतियाँ प्रदेश विशेष के भूगोल तथा इतिहास की देन हैं। एक देश या प्रदेश की जलवायु से ही मनुष्य का शरीर और मानस बनता है, उसका रहन-सहन, भाषा-बोली भी जलवायु से प्रभावित होती है। फिर अनेक वर्षों से एक विशिष्ट प्रकार की संस्कृति चलती है, अत. इतिहास का भी बड़ा महत्व है। दूसरी ओर मातृ-भाषा जीवन की एक स्वाभाविक प्रक्रिया है, जिसके माध्यम से संस्कृति और इतिहास की परम्परा प्रवहमान होती है। इसके अतिरिक्त मातृ-भाषा में ही मनुष्य का व्यक्तित्व सर्वांग रूप से निखरता है। अत सर्वत्र यह स्वीकार किया गया है कि मनुष्य की सारी शिक्षा-दीक्षा, सर्वोच्च स्तर तक उसकी मातृ-भाषा के माध्यम से ही होनी चाहिए।

इसके अतिरिक्त विश्व का समस्त ज्ञान अनेक भाषाओं में संग्रहीत है और सभी लोग समस्त ज्ञान की प्राप्ति के लिए अनेक भाषाओं का अध्ययन नहीं कर सकते हैं। ऐसा करने से वे केवल भाषा-विज्ञ ही रह जायेंगे, न कि विषय-विज्ञ। भाषा तो एक साधन मात्र है। अत. यह आवश्यक है कि सभी भाषाओं मे लिपिबद्ध ज्ञान सबको शीघ्रता एवं सुलभता से अपनी भाषा मे ही उपलब्ध हो अर्थात् ज्ञान के आदान-प्रदान का माध्यम मातृ-भाषा हो।

स्वतन्त्रता प्राप्ति के पश्चात् जब इस दिशा मे केन्द्र सरकार के शिक्षा-मन्त्रालय ने कार्य करने का विचार किया तो यह तथ्य सामने आया कि माध्यम-परिवर्तन के मार्ग मे बहुत बड़ा अवरोध है सम्बद्ध भाषाओं मे विभिन्न विषयों के मानक ग्रन्थों का अभाव, जिसे यथाशीघ्र पूरा किया जाना चाहिए। इसी उद्देश्य की पूर्ति के लिए भिन्न-भिन्न राज्यो मे अकादमियों/बोर्डों की स्थापना की गई। राजस्थान हिन्दी ग्रन्थ अकादमी इसी योजना के अन्तर्गत पिछले दस वर्ष से मानक ग्रन्थ प्रकाशन का कार्य कर रही है और अब तक इसने विभिन्न विषयों (कला, वाणिज्य, विज्ञान, कृषि आदि) के लगभग 285 ग्रन्थ प्रकाशित किये हैं जो विश्वविद्यालय के वरिष्ठ प्राध्यापकों द्वारा लिखे गये हैं।

"सांख्यिकी के सिद्धान्त और अनुप्रयोग" पुस्तक की पुनरावृत्ति प्रस्तुत करते हुए हमें प्रसन्नता है। इस पुस्तक मे सांख्यिकीय सिद्धान्तों और उनके व्यावहारिक अनुप्रयोगों का वर्णन/विवेचन सरल रीति से किया गया है। सांख्यिकीय प्रविधियों की प्रयोग-विधि एवं सम्प्राप्त संख्यात्मक मानो का निर्वचन भी सोदाहरण किया गया है। कृषि विज्ञान, आयुर्विज्ञान, अर्थशास्त्र, वाणिज्य, समाजशास्त्र आदि विषयों के छात्रों के लिए यह पुस्तक उपयोगी है।

हम इसके लेखक श्री डॉ. बसन्तलाल अग्रवाल, दुर्गापुरा तथा समीक्षक डॉ. वी. के. सेठी के प्रति प्रदत्त सहयोग हेतु आभारी हैं।

(श्रीमती कमला)
शिक्षा मन्त्री, राजस्थान सरकार
एवम्
अध्यक्ष, राजस्थान हिन्दी ग्रन्थ अकादमी
जयपुर

(डॉ. पुरुषोत्तम नागर)
निदेशक
राजस्थान हिन्दी ग्रन्थ अकादमी
जयपुर

भूमिका

सांख्यिकी वर्तमान युग में एक अति महत्त्व का विषय है क्योंकि अनुसंधान, योजना एवं सामान्य जानकारी के लिए सांख्यिकीय विधियाँ अत्यन्त उपयोगी सिद्ध हुई हैं। साथ ही, भारत में हिन्दी का प्रयोग दिन प्रतिदिन बढ़ता जा रहा है और आशा की जाती है कि कुछ वर्षों में हिन्दी ही पठन पाठन का एक मात्र माध्यम रह जायेगी। अतः मुझे हिन्दी में सांख्यिकी की एक ऐसी पुस्तक लिखने की इच्छा हुई जो अधिकतम व्यक्तियों की आवश्यकता को पूरा कर सके, जो पढ़ने व समझने में सुगम हो, सांख्यिकीय दृष्टि से पूर्णतया परिशुद्ध हो तथा सांख्यिकी के उच्च-स्तरीय विषयों का समुचित ज्ञान करा सके। साथ ही जटिल गणितीय व्युत्पत्तियों को इस पुस्तक के क्षेत्र से बाहर रखा जाय जिससे सामान्य व्यक्ति भी इसका पूरा पूरा लाभ उठा सकें। इन्हीं आकांक्षाओं से प्रेरित होकर यह पुस्तक लिखी गयी है। (गणितीय सांख्यिकी के विद्यार्थी अध्याय 19 व 20 को छोड़ सकते हैं।) लेखक अपने प्रयास में कहाँ तक सफल हुआ है, इसका निर्णय तो पाठक ही कर सकते हैं, अतः पुस्तक के सम्बन्ध में पाठकों एवं अध्यापकों से उनके विचार तथा सुझाव सादर आमन्त्रित हैं।

मैं इस पुस्तक को पूर्ण करने में सहयोग देने के लिए सांख्यिकी विभाग, कृषि महाविद्यालय, उदयपुर विश्वविद्यालय, उदयपुर के कुछ सदस्यों—डा बी जे श्रीखण्डे (रीडर व विभागाध्यक्ष) श्री एच सी माथुर (रीडर) श्री आर पी गुप्ता श्री एच एन शर्मा व श्री एस डी शर्मा के प्रति अत्यधिक आभार प्रकट करता हूँ। इसके अतिरिक्त मैं डॉ पी के सेठी का विशेष रूप से आभारी हूँ जिन्होंने इस पुस्तक की समीक्षा करके मुझे प्रोत्साहित किया। कृषि महाविद्यालय, उदयपुर के डॉ ओ पी गुप्ता को भी लेखन कार्य में सहयोग के लिए धन्यवाद देता हूँ। श्री कान्तिचन्द्र माथुर तथा अन्य सभी जो इस पुस्तक के लेखन कार्य में किसी भी रूप में सहायक रहे हैं उन्हें धन्यवाद देना अपना कर्तव्य समझता हूँ।

मैं अपने भाई डॉ एम पी अग्रवाल तथा अपनी पत्नी कनक अग्रवाल द्वारा दिये गये प्रोत्साहन एवं सहयोग के लिए उनके प्रति विशेष आभार प्रकट करता हूँ।

इस आवृत्ति को पूर्णतया परिशुद्ध करके छापा गया है। आशा है कि पाठक इसको और अधिक उपयोगी पायेंगे।

I am indebted to the Literary Executor of the late Sir Ronald A Fisher, F R S, to Dr Frank Yates, F R S, and to Longman Group Ltd,

London, for permission to reprint Tables 1, 2, 3, 4, 5, 13, 14, 16 and 17 from their book **Statistical Tables for Biological, Agricultural and Medical Research.**

I am also indebted to all other publishers and writers for permission to reprint their original Tables.

—बसन्तलाल अग्रवाल

विषय-सूची

1 सांख्यिकी का परिचय

सांख्यिकी विज्ञान का एक अंग है जिसका प्रयोग प्राचीन काल से होता आ रहा है किन्तु इसका विकास मुख्यतः बीसवीं शताब्दी में ही हुआ है। प्राचीन काल में सांख्यिकी का प्रयोग जनगणना, राजस्व या अन्य आवश्यक वस्तुओं की गणना तक ही सीमित था किन्तु अब यह विषय आधुनिक अनुसंधान का अभिन्न अंग बन गया है। अधिकांश *अध्ययन एवं प्रयोग सांख्यिकी को बिना उपयोग में लाये अधूरे तथा कम विश्वसनीय* समझे जाते हैं। उदाहरण के लिए खेतों में उपज का प्रभाव देखना हो, किसी कारखाने में यन्त्रों की क्षमता की तुलना करनी हो, जनसमुदाय के विषय में किसी प्रकार की जानकारी प्राप्त करनी हो, किसी उत्पादित वस्तु की गुणात्मक परिशुद्धि की परीक्षा करनी हो या किसी औषधि का किसी रोग पर प्रभाव जानना हो, तो इन सभी प्रयोगों में *सांख्यिकीय विधियों का महत्त्वपूर्ण स्थान है।*

समाज पर आर्थिक स्थितियों का प्रबल प्रभाव पड़ता है और अर्थशास्त्र इसका मार्ग दर्शन करता है। वर्तमान समय में सांख्यिकी समाजशास्त्र व अर्थशास्त्र में एक मुख्य स्थान प्राप्त कर चुकी है। इसके अतिरिक्त भावी योजनाओं को स्वरूप देने या योजना का आर्थिक एवं सामाजिक पहलुओं पर प्रभाव देखने के लिए सांख्यिकी ही एक उपयुक्त विज्ञान है।

सांख्यिकी को इस प्रकार परिभाषित किया जा सकता है : *सांख्यिकीय विज्ञान उन विधियों या प्रविधियों का एक निकाय है जिसका उपयोग किसी विषय का आंशिक ज्ञान* होने की स्थिति में यथोचित जानकारी और निर्णय के हेतु किया जाता है। इसका उपयोग विभिन्न अनुसंधानों में एक सहायक उपकरण के रूप में होता है।

सांख्यिकी को बहुत से विद्वानों ने परिभाषित करने के प्रयत्न किये हैं किन्तु किसी भी एक परिभाषा को आदर्श परिभाषा नहीं माना जा सकता है। फिर भी आर० ए० *फिशर (R A Fisher) द्वारा दी गई परिभाषा को सर्वोत्तम माना जाता है* जो निम्न प्रकार है —

सांख्यिकी मूलतः व्यावहारिक गणित की एक शाखा है और इसे प्रेक्षण सामग्री हेतु प्रयोग में लिये जाने वाले गणित की संज्ञा भी दी जा सकती है। *

किसी जानकारी अथवा अनुसंधान के लिए सांख्यिकी का प्रयोग करने में निम्न चार मुख्य क्रियाएँ करनी होती हैं —

(1) आधार सामग्री (आंकड़ों) का संग्रह करना।

(2) *उस सामग्री का उचित रीति से सारणीयन (Tabulation) करना।*

* (The science of statistics is essentially a branch of applied mathematics and may be regarded as mathematics applied to observational data)

(3) आवश्यकतानुसार उसका विश्लेषण करना।

(4) अंत में जो संख्यात्मक परिणाम प्राप्त हों, उनका निर्वचन करना।

उपर्युक्त चार क्रियाओं का यथोचित रूप से प्रयोग करने के लिए विभिन्न प्रविधियों और साधनों को अपनाना पड़ता है जिनका पर्याप्त वर्णन इस पुस्तक में दिया गया है।

सांख्यिकी की सहायता से किसी पूरे जनसमुदाय (Population) के विषय में पूर्ण या आंशिक जानकारी प्राप्त की जाती है। इसके लिए या तो पूरे जनसमूह (समग्र) के प्रत्येक एकक (unit) का माप लेना होता है या प्रतिदर्श (sample) में सम्मिलित एककों के माप लेकर जानकारी प्राप्त कर ली जाती है। प्रयोजन विशेष के अनुसार निर्धारित एककों के किसी भी पूर्णयोग को समग्र कहते हैं। प्रतिदर्श से अभिप्राय समग्र के कुछ एककों से है जो किसी प्रतिचयन विधि द्वारा नमूने के तौर पर समग्र में से चयन किये जाते हैं। प्रतिदर्श द्वारा प्राप्त जानकारी का समग्र के प्रति जानकारी के रूप में उपयोग किया जाता है। जैसे किसी औषधि का प्रभाव जानने के लिए, एक रोग के कुछ रोगियों (प्रतिदर्श) को ही यह औषधि दी जाती है और जो परिणाम प्राप्त होते हैं, उन्हें इस रोग के सब रोगियों (समग्र) के प्रति सत्य माना जाता है।

ऐसी दशा में समग्र के विषय में जो परिकल्पनाएँ हैं उनकी जाँच प्रतिदर्श पर लिये गये प्रेक्षणों के आधार पर की जाती है। समग्र के विभिन्न प्राचलों का अनुमान भी प्रतिदर्श के आधार पर ही लगाया जाता है। (समग्र के किसी अचर को प्राचल कहते हैं।)

इन दोनों समस्याओं में सांख्यिकी का उपयोग कैसे किया जाता है यह इस पुस्तक के अध्यायों 9, 10, 11 में दिया गया है। प्रतिदर्श किस प्रकार लिया जाय या प्रयोग-अभिकल्पना किस प्रकार की हो जिससे कि कम खर्च और कम त्रुटि हो—ये भी सांख्यिकी के ही विषय हैं। इनका वर्णन अध्याय 12 में दिया गया है।

सांख्यिकी एक गूढ़ विषय है। इसको अच्छी तरह पढ़ना और समझना चाहिये अन्यथा इसका उपयोग उचित रूप में नहीं हो सकेगा और उस स्थिति में हानिकारक परिणाम भी प्राप्त हो सकते हैं। अत पाठकों से अनुरोध है कि इस विषय का कम ज्ञान होने की स्थिति में, इसका प्रयोग करने से पूर्व वे किसी सांख्यिकी विद् से परामर्श कर लें।

2 बारम्बारता और उसका निरूपण

किसी समग्र मे एकक के विशेष गुण या लक्षण की पूर्ण या आंशिक जानकारी प्राप्त करने के लिए समग्र के अंशो का मापन किया जाता है। इस प्रकार जो माप प्राप्त होते हैं, उनको विशिष्ट एव निश्चित रूप मे व्यवस्थित करके सारणीबद्ध करना एव उनका निरूपण करना आवश्यक है।

परिभाषाएँ

किसी लक्षण के लिए समान मान वाले एकको की सख्या को उस मान की बारम्बारता कहते हैं।

विभिन्न मानो की बारम्बारता को व्यवस्थित रूप देने की क्रिया को बारम्बारता बटन (Frequency distribution) कहा जाता है, जैसा कि उदाहरण (2 1) मे दिखाया गया है।

हम सैद्धान्तिक रूप मे बारम्बारता बटन को इस प्रकार समझ सकते हैं —

माना कि चर के विभिन्न मान $x_1, x_2, x_3, ...x_k$ हैं और प्रेक्षण x_1, f_1 बार घटित होता है; अर्थात् x_1 की बारम्बारता f_1 है। इसी प्रकार प्रेक्षणो x_2 x_3, x_4, ...x_k की क्रमानुसार बारम्बारताएँ f_2, f_3, f_4, ...f_k हुई। इस बारम्बारता-बटन को निम्न प्रकार से प्रस्तुत कर सकते हैं —

प्रेक्षण (x)	बारम्बारता (f)
x_1	f_1
x_2	f_2
x_3	f_3
⋮	⋮
x_i	f_i
⋮	⋮
x_k	f_k

बारम्बारता बटन के रूप मे प्रेक्षणो को प्रस्तुत करने से किन्ही मानो की बारम्बारता गणना-चिह्नो द्वारा सुगमता से ज्ञात की जा सकती है। गणना चिह्न लगाने की विधि इस प्रकार है :—

पहले न्यास के प्रत्येक मान को क्रम मे लिख लिया जाता है। फिर एक-एक करके प्रेक्षित मान को देख कर क्रम मे दिये गये मानो मे से उसे खोज कर उसके सामने एक

छोटा सा दण्ड गणना चिह्न के रूप में लगा दिया जाता है। जब किसी मान के सम्मुख चार चिह्न लग चुके होते हैं और पाँचवाँ चिह्न लगाना होता है तो प्रथम चार चिह्नों को काटता हुआ एक चिह्न और लगा देते हैं। इस प्रकार यह एक पाँच गणना चिह्नों का समूह बन जाता है। यदि छठा चिह्न इसी मान के सम्मुख लगाना हो तो इसे अलग से लगाते हैं। यह क्रम तब तक चलता रहता है जब तक कि सब प्रेक्षित मानों के लिए चिह्न न लग जाएँ। इस प्रकार पाँच चिह्नों के समूह या समूहों को बनाने से प्रत्येक मान के लिए गणना-चिह्नों की संख्या सुगमता से ज्ञात हो जाती है। इसी विधि का उपयोग उदाहरण (2.1) में किया गया है।

संचयी बारम्बारता

प्राय यह जानने की आवश्यकता होती है कि उन प्रेक्षणों की संख्या क्या है जिनका मान एक निश्चित प्रेक्षन-मान के समान या इससे कम है। इन प्रेक्षणों की संख्या को संचयी बारम्बारता कहते हैं। संचयी बारम्बारता को बारम्बारता-बंटन की सहायता से सुगमता से ज्ञात कर सकते हैं। क्रमित बारम्बारता-बंटन-सारणी के किसी प्रेक्षित मान की संचयी बारम्बारता, उसकी अपनी बारम्बारता में पूर्ववर्ती बारम्बारताओं का योग जोड देने से ज्ञात हो जाती है। क्रमित प्रेक्षित मान $x_1, x_2, x_3 .... x_K$ और उनकी तदनुसार बारम्बारता $f_1, f_2, f_3 .. f_K$ होने की स्थिति में संचयी बारम्बारता (सं० बार०) निम्न रीति से ज्ञात कर सकते हैं —

प्रेक्षित मान (x)	बारम्बारता (f)	सं० बार० (F)
x_1	f_1	$f_1=F_1$
x_2	f_2	$f_1+f_2=F_1+f_2=F_2$
x_3	f_3	$f_1+f_2+f_3=F_2+f_3=F_3$
⋮	⋮	⋮
x_K	f_K	$f_1+f_2+ \quad +f_K=F_{K-1}+f_K=F_K$

इस विधि का प्रयोग करके उदाहरण (2.1) में संचयी बारम्बारताएँ चौथे स्तम्भ में दिखाई गई हैं।

उदाहरण 2.1 एक अस्पताल में जन्म के समय 50 बच्चों के भार लिये गये थे। ये भार किलोग्राम में निम्न प्रकार थे

3.1, 2.8, 3.2, 2.6, 2.8, 3.4, 2.6, 3.0, 3.1, 3.2,
3.5, 3.7, 2.8, 3.1, 2.0, 2.7, 3.1, 3.0, 2.9, 2.6,
3.0, 3.1, 2.3, 2.7, 3.2, 2.4, 3.6, 2.8, 3.0, 3.8,

25, 36, 38, 29, 34, 23 25, 29, 34, 26,
30, 24, 25, 34, 28, 23, 32, 31, 32, 22

इस न्याय को बारम्बारता बटन के रूप मे लिखने क लिए गणना चिह्न (tally marks) को प्रत्येक भार के सामने लगा कर बारम्बारता ज्ञात की जा सकती है और निम्न सारणी के अनुसार बारम्बारता बटन लिखा जा सकता है —

भार (X) किलोग्राम	गणना चिह्न	बारम्बारता (f)	सं० बार० (F)
20	I	1	1
22	I	1	2 (1+1)
23	III	3	5 (2+3)
24	I	1	6 (5+1)
25	III	3	9 (6+3)
26	IIII	4	13 (9+4)
27	II	2	15 (13+2)
28	~~IIII~~	5	20 (15+5)
29	III	3	23 (20+3)
30	~~IIII~~	5	28 (23+5)
31	~~IIII~~ I	6	34 (28+6)
32	~~IIII~~	5	39 (34+5)
34	~~IIII~~	5	44 (39+5)
35	I	1	45 (44+1)
36	II	2	47 (45+2)
37	I	1	48 (47+1)
38	II	2	50 (48+2)
योग		50	

वर्ग-बारम्बारता का उपयोग

प्राय बारम्बारता-बटन मे प्रत्येक मान को अलग अलग लेने म इन मानो की सख्या अपर्याप्त हो जाती है। अत इस बटन को संक्षिप्त रूप में रखने का उपाय यह है कि इन मानो का वर्गीकरण कर दिया जाये और प्रत्येक वर्ग मे सम्मिलित मानों की

बारम्बारता ज्ञात कर ली जाय। इस प्रकार के बटन बहुधा प्रयोग मे लाये जाते हैं। इस बटन मे सदैव एक वर्ग की उपरि सीमा अगले वर्ग की निम्न सीमा होती है। इस प्रकार के बटन को निम्न प्रकार से प्रदर्शित किया जा सकता है —

वर्ग	बारम्बारता
$X_1 - X_2$	f_1
$X_2 - X_3$	f_2
$X_3 - X_4$	f_3
⋮	⋮
$X_K - X_{K+1}$	f_K

व्यवहार मे अधिकतर वर्गों की निम्न सीमा को वर्ग मे सम्मिलित मानते हैं। इस प्रकार का बटन सतत बारम्बारता बटन कहलाता है।

उदाहरण (2 1) मे दिये हुए न्यास का वर्गीकरण करके सतत बारम्बारता बटन के रूप मे उसे नीचे प्रस्तुत किया गया है क्योंकि न्यास एक दशमलव तक दिया गया है। यहाँ 0 3 का वर्ग-अन्तराल[1] लिया गया है।

वर्ग	बारम्बारता
2 0 — 2·3	2
2 3 — 2 6	7
2 6 — 2 9	11
2 9 — 3 2	14
3 2 — 3·5	10
3 5 — 3 8	4
3 8 — 4 1	2
योग	50

इस क्रिया मे यह समस्या सामने आती है कि वर्ग-अन्तराल कितना हो। यह वर्गों की संख्या पर निर्भर रहता है। यदि सारणी मे K वर्ग इच्छित हो और अधिकतम प्रेक्षण मान L व न्यूनतम प्रेक्षण मान S हो तो

1 वर्ग की उपरि सीमा और निम्न सीमा के अन्तर को वर्ग-अन्तराल कहते हैं।

$$\text{वर्ग अन्तराल} = \frac{L - S}{K} \qquad \text{....(2·1)}$$

K का मान ज्ञात करने के लिए एच० ए० स्टर्जेस (H. A. Sturges) ने निम्न सूत्र दिया है :—

$$K = 1 + 3{\cdot}322 \log n \qquad \text{....(2·2)}$$

जब कि कुल प्रेक्षणों की संख्या n है।

$$\text{अतः वर्ग अन्तराल} = \frac{L - S}{1 + 3{\cdot}322 \log n}$$

जैसे उदाहरण (2·1) के न्यास को ही वर्गों में विभाजित करके बारम्बारता बटन के रूप में लिखना हो तो,

$$K = 1 + 3{\cdot}322 \log_{10} 50$$
$$= 1 + 3{\cdot}322 \times 1{\cdot}6990$$
$$= 1 + 5{\cdot}744$$
$$= 6{\cdot}744$$

मान 6·744, 7 के निकट है अतः इस न्यास के लिए 7 वर्ग लेना उचित है।

$$L = 3{\cdot}8, \quad S = 2{\cdot}0$$

$$\text{वर्ग अन्तराल} = \frac{3{\cdot}8 - 2{\cdot}0}{7}$$

$$= \frac{1{\cdot}8}{7} = {\cdot}25$$

आरेखीय निरूपण

सारणीबद्ध प्रेक्षणों को आलेखित कर प्रायः चित्रित भी किया जाता है। इन चित्रों द्वारा स्थिति का ज्ञान सुगमता से हो जाता है। ऐसे ही कुछ मुख्य-मुख्य चित्रों का वर्णन इस अध्याय में किया जायेगा।

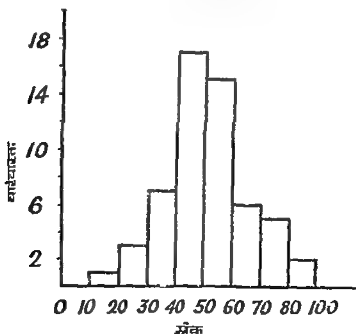
आयत चित्र

इस प्रकार के चित्र परस्पर तुलना के लिए अत्यन्त सुगम एवं उपयुक्त रहते हैं। किसी स्वतन्त्र चर के मान बिन्दुओं पर एक अपेक्षित चौड़ाई और बारम्बारता के अनुसार ऊँचाई वाले आयतों को x-अक्ष पर बनाया जाता है। आयतों की ऊँचाई y-अक्ष पर एक पैमानी (Scale) मानकर बारम्बारता के अनुसार निर्धारित कर ली जाती है। आयत की चौड़ाई x-अक्ष पर वर्ग-अन्तराल के समान होती है। इसकी चौड़ाई मानचित्र के आकार पर निर्भर करती है। इस प्रकार के चित्रों को बनाने की विधि निम्न उदाहरण द्वारा और अधिक स्पष्ट हो जायेगी।

उदाहरण 2.2 : सांख्यिकी की एक परीक्षा में 56 विद्यार्थी बैठे और उनके अंक विभिन्न वर्गों में इस प्रकार थे :—

अंकों के वर्ग (i)	बारम्बारता (ii)	संचयी बारम्बारता (iii)	सापेक्ष संचयी बारम्बारता (iv)
10–20	1	1	0 02
20–30	3	4	0 07
30–40	7	11	0 20
40–50	17	28	0 50
50–60	15	43	0 77
60–70	6	49	0 88
70–80	5	54	0 96
80–90	2	56	1 00

उपर्युक्त न्यास को बारम्बारता-आयत-चित्र द्वारा प्रदर्शित करने के लिए ग्राफ पेपर पर भुज एवं कोटि-अक्ष खींच दिये जाते हैं। फिर भुज-अक्ष पर वर्ग-अन्तरालों को अंकित कर दिया जाता है। इन वर्ग-अन्तरालों पर तदनुसार बारम्बारता के समानुपाती ऊँचाई के आयत बना दिये जाते हैं। इस प्रकार प्राप्त चित्र बारम्बारता आयत चित्र होता है जैसाकि उदाहरण (2 2) के लिए चित्र (2–1) में प्रदर्शित किया गया है।



चित्र 2–1 आयत चित्र

टिप्पणी : यदि वर्ग-अन्तराल समान न हों तो आयतों की ऊँचाई से वर्ग-अन्तरालों की अधिक या कम बारम्बारता होने का पता नहीं चलता है। इस स्थिति में आयतों के क्षेत्रफल की तुलना करना उचित है।

बारम्बारता बहुभुज तथा बारम्बारता वक्र

बारम्बारता बहुभुज को बनाने की विधि इस प्रकार है : प्रेक्षित मानों या वर्ग-अन्तरालों के मध्य-बिन्दुओं को भुज-अक्ष पर निर्धारित कर दिया जाता है। इन मानों की तदनुसार बारम्बारता के समान (रेखनी के अनुसार) ऊँचाई पर इन मान बिन्दुओं के ऊपर इन बिन्दुओं को आलेखित कर दिया जाता है। आलेखित बिन्दुओं को सरल रेखा द्वारा क्रम में मिला देने पर प्राप्त चित्र को बारम्बारता बहुभुज कहते हैं।

बारम्बारता-आयतचित्र में प्रत्येक आयत के शिखर के मध्य बिन्दुओं को क्रम में मिला देने से बारम्बारता बहुभुज बन जाता है।

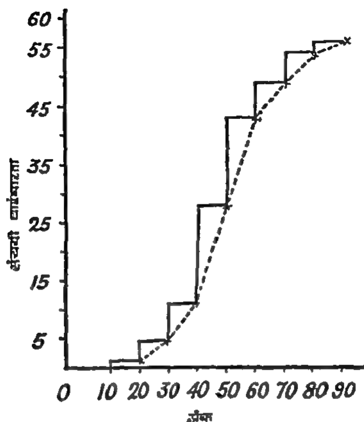
जैसे-जैसे प्रेक्षणों की संख्या अधिक होती जाती है और वर्ग अन्तराल कम होता जाता है। वैसे-वैसे बारम्बारता बहुभुज या बारम्बारता आयत चित्र का रूप एक सरल वक्र की ओर प्रवृत्त होता जाता है। इस स्थिति में प्राप्त वक्र को बारम्बारता वक्र कहते हैं। अतः परिकल्पनात्मक अनन्त प्रेक्षण तथा अत्यधिक लघु-वर्ग अन्तराल होने की स्थिति में बारम्बारता वक्र पूर्णतया सरल वक्र का रूप धारण कर लेता है।

संचयी बारम्बारता आयत चित्र व बहुभुज

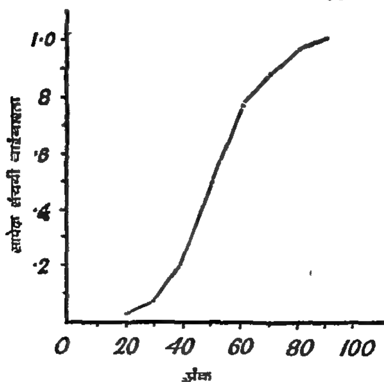
संचयी बारम्बारता के अन्तर्गत दिये गये बंटन के अनुसार चर X और संचयी बारम्बारता F को ग्राफ पर आलेखित करने हेतु X के मानों को भुज पर और संचयी बारम्बारता F को कोटि पर उचित रेखनी मानकर आलेखित कर लिया जाता है। मान X_1 पर F_1 ऊँचाई की उर्ध्वाधर रेखा खींच दी जाती है। इस रेखा के शिखर बिन्दु से X–अक्ष के समान्तर एक रेखा खींचते हैं जो अगले प्रेक्षित मान X_2 तक जाती है। इस रेखा के अन्तिम सिरे से Y–अक्ष के समान्तर रेखा खींचते हैं जो F_2 ऊँचाई तक जाती है। यही क्रम चलता रहता है जब तक कि अन्त के प्रेक्षण तक न पहुँच जाये। इस प्रकार प्राप्त चित्र को संचयी बारम्बारता आयत चित्र कहते हैं। इस चित्र का रूप सीढ़ी-पक्ष जैसा होता है। यदि इस चित्र में प्रत्येक आयत के दाएँ हाथ के शिखर-बिन्दुओं को मिला दें तो प्राप्त आरेख को संचयी बारम्बारता बहुभुज कहते हैं।

यदि असमान वर्ग-अन्तरालों में बारम्बारता सहित दिया गया हो तो संचयी बारम्बारता तथा वर्ग-अन्तरालों की उच्च सीमा को लेकर बिन्दुओं को आलेखित कर दिया जाता है और इन बिन्दुओं को सरल रेखाओं द्वारा मिलाने पर संचयी बारम्बारता बहुभुज प्राप्त हो जाता है।

यदि बारम्बारता के स्थान पर सापेक्ष बारम्बारताओं का प्रयोग किया जाये तो ऊँचाई शून्य से प्रारम्भ होकर ऊपर की ओर 1 तक जाती है। इन सापेक्ष बारम्बारताओं को 100 से गुणा कर दें तो प्रतिशत संचयी बारम्बारता बहुभुज प्राप्त हो जाता है।



चित्र 2–2 संचयी बारम्बारता आयत चित्र व बहुभुज



चित्र 2–3 सापेक्ष बारम्बारता बहुभुज

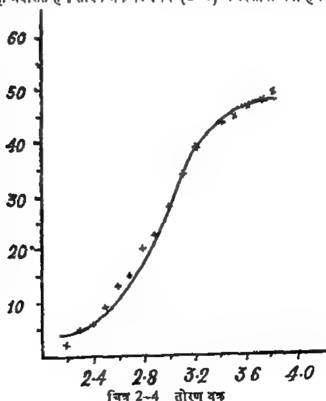
उदाहरण (2.2) में दिये हुए न्यास के लिए सचयी बारम्बारता चित्र और सचयी बारम्बारता बहुभुज को चित्र (2–2) में व सापेक्ष बारम्बारता बहुभुज को चित्र (2–3) में स्पष्टत निर्देशित किया गया है।

तोरण वक्र

सामान्यत किसी भी सचयी बारम्बारता वक्र को तोरण कहते हैं। जिस प्रकार बारम्बारता बहुभुज में सन्निकट सरल वक्र को समजित कर सकते हैं उसी प्रकार सचयी बारम्बारता बहुभुज में सन्निकट सरल वक्र समजित किया जा सकता है। इस वक्र को तोरण कहते हैं। व्यवहार में एक तोरण का समजन बारम्बारता वक्र की अपेक्षा सुगम है। ओजीव (Ogive) शब्द का वास्तुशिल्प में प्रयुक्त शब्द ओजी (Ogee) से लिया गया है, क्योंकि इस वक्र का रूप वास्तुशिल्प में एक विशेष सांचे ओजी जैसा होता है।

तोरण के रूप को इस प्रकार समझ सकते हैं यदि कुछ व्यक्तियों को उनकी ऊँचाई के अनुसार खड़ा कर दें और उनके सिरा के मध्य बिन्दुओं को मिलाती हुई एक रेखा खीच दें तो यह रेखा तोरण को प्रदर्शित करती है। यह ध्यान रहे कि ग्राफ की दृष्टि से इस स्थिति में व्यक्तियों की ऊँचाई कोटि पर और बारम्बारता भुज पर स्थित रहेगी।

उदाहरण 2 1 में दिये गये बारम्बारता बटन को ही तोरण-वक्र के लिए प्रयुक्त किया गया है। स्पष्टत इस उदाहरण में भार 0 1 किलोग्राम तक मापे गये हैं। सचयी बारम्बारता भी यहाँ प्रदर्शित है। तोरण वक्र को चित्र (2–4) में दिखाया गया है।



चित्र 2–4 तोरण वक्र

दण्ड आरेख

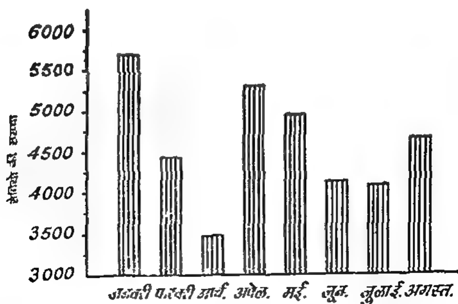
इन चित्रों का मुख्य उद्देश्य कुछ आँकडों को एक निश्चित काल या स्थान के अनुसार प्रदर्शित करना होता है। इस प्रकार के आँकडे संख्या (या प्रतिशत) के अनुसार आयत की ऊँचाई द्वारा प्रदर्शित किये जाते हैं। इन आयतों की चौडाई काल या स्थान के लिए भुज अक्ष पर अंकित बिन्दुओं के बीच की दूरी से कम होती है और आधार-बिन्दु के दोनों ओर सम्मित होते हैं।

किसी विशेष काल या स्थान सम्बन्धी आयत को किन्हीं नामों या गुणों के अनुसार विभाजित करके विभिन्न खण्डों द्वारा प्रदर्शित किया जा सकता है। इस स्थिति में आयत की ऊँचाई खण्डों में आँकडों के अनुपात में विभाजित की जाती है। इस प्रकार आयत के प्रत्येक विभाजित खण्ड को भिन्न-भिन्न रंगों या विभिन्न रेखाओं व बिन्दुओं द्वारा अंकित कर दिया जाता है। इस प्रकार के चित्र को उपविभाजित दण्ड-आरेख (Sub-divided bar diagram) कहते हैं। ऐसे चित्र विभिन्न वस्तुओं के उत्पादन या किसी स्थान या काल में उपलब्ध वस्तुओं, व्यक्तियों की संख्या आदि से सम्बन्धित न्यास के लिए अधिक उपयुक्त होते हैं। यदि आयतों को भुज-अक्ष के लम्बवत् लिया जाय तो ऐसे दण्ड-चित्र को विशिष्टता स्तम्भ-चित्र (Column chart) कहा जाता है।

उदाहरण 2.3 : एक अस्पताल में जनवरी से अगस्त तक औसत प्रति मास रोगियों की संख्या निम्न प्रकार थी :

मास	जनवरी	फरवरी	मार्च	अप्रैल
रोगियों की संख्या	5727	4452	3474	5317
मास	मई	जून	जुलाई	अगस्त
रोगियों की संख्या	4950	4119	4065	4648

इन आँकडों को चित्र 2–5 में स्तम्भ चित्र के रूप में प्रदर्शित किया गया है।

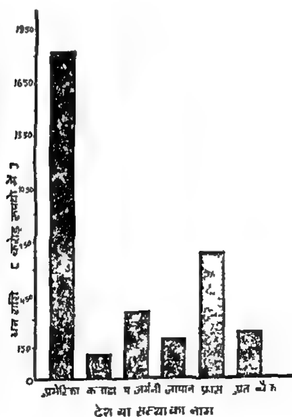


चित्र 2–5 स्तम्भ चित्र

उदाहरण 2 4 उपलब्ध आँकड़ों के अनुसार कुछ मुख्य देशों तथा संस्थानों द्वारा भारत सरकार को दिये गये कर्ज की धन राशि नीचे दी गयी है

[illegible] या संस्था	धन राशि (करोड़ रुपयों में)
अमेरिका	1843 77
कनाडा	138 35
पश्चिमी जर्मनी	376 61
जापान	225 55
फ्रांस	34 20
अन्तर्राष्ट्रीय बैंक	271 41

इन आँकड़ों को दण्ड चित्र द्वारा निरूपित करने के लिए देश या संस्था के नामों को भुज अक्ष पर समान दूरी पर अंकित किया गया है और इन बिन्दुओं पर मानी हुई पैमानी के अनुसार दण्डों को चित्रित किया गया है जैसा कि चित्र 2 6 में दिखाया गया है।

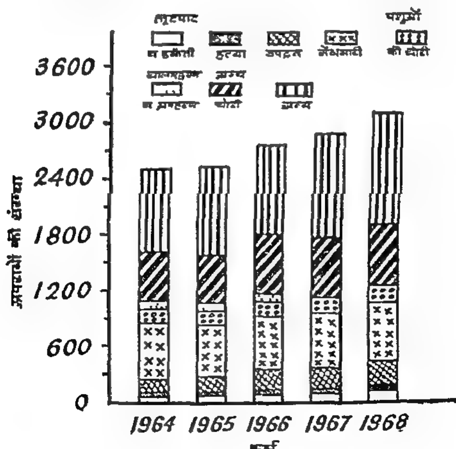


चित्र 2-6 दण्ड चित्र

उदाहरण 2.5 : निम्नलिखित सारणी में राजस्थान में विभिन्न वर्षों की अपराधों की घटनाएँ मासिक औसत के रूप में दी गई हैं।

वर्ष	1964	1965	1966	1967	1968
लूटपाट व डकैती	59	59	71	77	85
हत्या	39	43	44	48	52
सेंधमारी	134	170	208	221	261
उपद्रव	591	547	576	610	640
पशुओं की चोरी	155	150	160	172	179
बालापहरण एवं अपहरण	81	85	80	—	—
अन्य चोरी	528	526	638	648	654
अन्य	896	935	970	1099	1212
योग	2483	2515	2747	2875	3083

इस न्यास को उप विभाजित स्तम्भ चित्र द्वारा प्रदर्शित करने के लिए वर्षों को भुज पर और अपराधों की संख्या को कोटि पर अंकित करके चित्र (2-7) में प्रस्तुत किया गया है।



चित्र 2-7 उपविभाजित दण्ड आरेख

लेखाचित्र

यदि प्रेक्षित मान दो चरो के हो तो उनके सम्बन्ध को समझने के लिए लेखाचित्र का उपयोग किया जाता है। ग्राफ पेपर पर किसी बिन्दु के निर्देशाक (coordinates) क्रमश प्रेक्षित चरो के मानो को दर्शाते हैं। प्रेक्षणो के अनुसार बिन्दुओ को आलेखित करके मिला दिया जाता है। इस प्रकार प्राय एक सरल रेखा या वक्र प्राप्त हो सकता है।

इन चित्रो को बनाते समय यह सावधानी बरतनी चाहिए कि यदि दो चरो मे से एक चर स्वतन्त्र[2] है और दूसरा इस पर आश्रित है तो स्वतन्त्र चर को X–अक्ष पर और आश्रित चर को Y–अक्ष पर लेना चाहिए। किसी रेखा-चित्र या वक्र-चित्र को बनाने के लिए कम से कम तीन बिन्दु आलेखित होने आवश्यक हैं। मुख्यत वक्र बनाने के लिए पाँच प्रेक्षण उपलब्ध हो तो वक्र का रूप अधिक अच्छा निर्धारित किया जा सकता है।

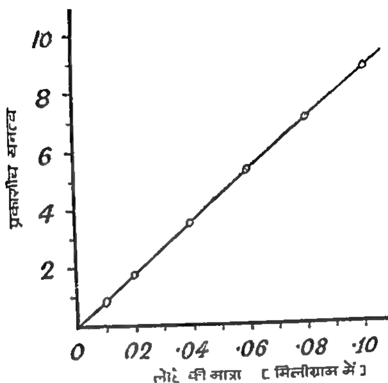
यह आवश्यक नही है कि आलेखित बिन्दुओ को मिला देने पर एक सरल रेखा या वक्र प्राप्त हो ही। ऐसी स्थिति मे आलेखित बिन्दुओ को रेखाओ द्वारा मिला देते हैं जिससे प्रेक्षणो के किसी विशेष क्रम मे होने या न होने का स्पष्ट पता चल जाता है या यह कहें कि प्रेक्षण किसी नियम के अनुसार है या नही, यह ज्ञान हो जाता है। विभिन्न प्रकार के चित्रो को निम्न उदाहरणो द्वारा दिखाया गया है। इन उदाहरणो द्वारा पाठक को उपर्युक्त वर्णन का उपयोग समझ मे आजाएगा।

उदाहरण 2.6 लोह निर्धारण के लिए किये गये एक प्रयोग मे विभिन्न सान्द्रता पर सूक्ष्मदर्शी द्वारा निम्न प्रकाशीय घनत्व प्राप्त हुए।

लोह (मिलीग्राम)	प्रकाशीय घनत्व
·01	08
02	17
04	·35
·06	·53
·08	71
10	89

ऊपर दिये हुए प्रेक्षणो को रेखा चित्र द्वारा निरूपित करने के लिए लोह मात्रा को भुज-अक्ष पर और प्रकाशीय घनत्व को कोटि-अक्ष पर अवस्थित कर चित्र 2–8 मे इन्हें प्रदर्शित किया गया है।

2 यहाँ स्वतन्त्र चर से अभिप्राय किन्हीं ऐसे विचर मानों से है जो स्वयं परिवर्तित होते हों जैसे वर्ष, मास, सप्ताह, समय, स्थान या आयु आदि।

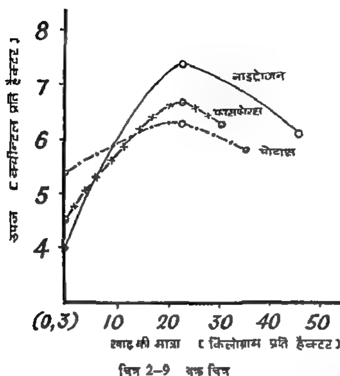


चित्र 2–8 सरल रेखा चित्र

उदाहरण 2.7 नाइट्रोजन, फासफोरस व पोटाश के विभिन्न स्तरों का मूंगफली की उपज पर प्रभाव जानने के लिए एक प्रयोग किया गया। प्रयोग प्रत्येक खाद के तीन स्तरों को लेकर किया गया और इन स्तरों पर निम्नोक्त उपज हुई

खाद की मात्रा (किलोग्राम प्रति हेक्टर)	उपज (क्विंटल प्रति हेक्टर)		
	नाइट्रोजन	फासफोरस	पोटाश
0	3 95	4 50	5 37
22 4	7 36	6 66	6 24
44 8	6 10	6 25	5 81

तीनों खादों के लिए उपज-वक्र निम्न प्रकार से बनाये गये हैं हम जानते हैं कि उपज, खाद की मात्रा पर निर्भर रहती है। अतः खाद की मात्रा को भुज-अक्ष पर और उपज को कोटि-अक्ष पर लिया गया है क्योंकि सस्य-विज्ञान (Agronomy) में अधिकतर प्रयोग तीन स्तरों पर किये जाते हैं अतः यहाँ वक्र का उदाहरण केवल तीन प्रेक्षणों के द्वारा ही दिया गया है। यह वक्र चित्र 2–9 में द्रष्टव्य है।

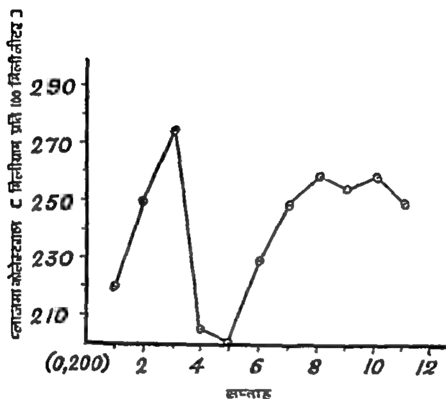


चित्र 2–9 वक्र चित्र

उदाहरण 2.8 : एक अस्पताल में एक विशेष प्रकार के रोगियों का साप्ताहिक प्लैज्मा कोलेस्टराल (plasma cholasterol) मिलिग्राम प्रति 100 मिलिलिटर नापा गया और निम्न परिणाम प्राप्त हुए —

सप्ताह	प्लैज्मा कोलेस्टराल (मिलिग्राम प्रति 100 ग्राम)
1	220
2	250
3	275
4	205
5	200
6	230
7	250
8	260
9	255
10	260
11	250

उतार-चढ़ाव प्रदर्शित करने के लिए इन प्रेक्षणों को, आलेखित कर मिला दिया गया है। यहाँ सप्ताहों को भुज-अक्ष पर और प्लैज्मा कोलेस्टराल को कोटि-अक्ष पर लिया गया है, जैसा कि चित्र (2 10) में दिखाया गया है।



चित्र 2–10 सामान्य लेखाचित्र

पाई आरेख

जब किसी एक ही वस्तु, पदार्थ या लक्षण के विभिन्न संघटकों की बारम्बारता प्रदर्शित करना हो तो पाई आरेख चित्र स्थिति की अच्छी जानकारी कराता है। इस प्रकार के चित्र बनाने की विधि इस प्रकार है · पहले एक उचित अर्धव्यास का वृत्त खींच लिया जाता है, फिर जिस अनुपात में संघटकों के आँकड़े हों, उसी अनुपात में 360° के कोण को विभाजित कर दिया जाता है। वृत्त में एक अर्धव्यास खींच लिया जाता है और इस पर एक के बाद एक परिकलित कोण बना दिये जाते हैं। इस प्रकार प्राप्त प्रत्येक खण्ड एक विशेष संघटक को प्रदर्शित करता है। इन खण्डों को स्पष्ट रूप से प्रदर्शित करने के उद्देश्य से या तो प्रत्येक खण्ड को भिन्न-भिन्न रंगों से भर देते हैं या उन्हें विभिन्न बिन्दुओं व रेखाओं की सहायता से दिखाया जाता है।

खण्डों की संख्या अधिक होने की स्थिति में इस चित्र को बनाना उपयुक्त नहीं रहता।

उदाहरण 2·9 : भारत में शस्य (crops) के अनुसार पानी का प्रतिशत बटन निम्न प्रकार था :—

शस्य	प्रतिशत पानी
धान	45.0
गेहूँ	15.0
अन्य अनाज	12.0
दालें	7.0
कपास	4.0
गन्ना	6.0
अन्य शस्य	11.0

ऊपर दिये पानी के प्रतिशत बटन को पाई आरेख द्वारा निरूपित करने के लिए कोण 360° को दिये हुए प्रतिशत पानी के अनुपात में सूत्र $\frac{360}{100}\times$प्रतिशत द्वारा ज्ञात कर लिया गया जिससे निम्न कोण प्राप्त हुए —

शस्य	कोण
धान	$\frac{360}{100}\times45=162.0^\circ$
गेहूँ	$\frac{360}{100}\times15=54.0^\circ$
अन्य अनाज	$\frac{360}{100}\times12=43.2^\circ$
दालें	$\frac{360}{100}\times7=25.2^\circ$
कपास	$\frac{360}{100}\times4=14.4^\circ$
गन्ना	$\frac{360}{100}\times6=21.6^\circ$
अन्य शस्य	$\frac{360}{100}\times11=39.6^\circ$



चित्र 2–11 पाई आरेख

अर्ध-व्यास क-ग खींच कर केन्द्र क से इस अर्धव्यास पर एक के बाद एक ऊपर दिये हुए कोण बना दिये गये हैं। इस प्रकार वृत्तखण्डों को भिन्न भिन्न चिह्नों द्वारा प्रदर्शित कर दिया गया है जैसा कि चित्र (2-11) मे दिखाया गया है।

प्रश्नावली

1 निम्न सारणी मे दिये गये रुई के आयात सम्बन्धी आँकड़ों को दण्ड आरेख द्वारा निरूपित कीजिये।

वर्ष	(1963–64)	(1964–65)	(1965–66)	(1966–67)
रुई का आयात करोड़ रुपयों मे	48 8	58 1	46 2	56 2

वर्ष	(1967–68)	(1968–69)	(1969–70)
रुई का आयात करोड़ रुपयो मे	83 0	90 2	82 8

2 चाय के उत्पादन एव निर्यात सम्बन्धी आँकड़े 1965 से 1970 तक निम्न सारणी मे दिये गये हैं। उत्पादन व निर्यात के सम्बन्ध को लेखाचित्र द्वारा प्रदर्शित कीजिये।

वर्ष	उत्पादन (दस लाख किलोग्राम)	निर्यात (दस लाख किलोग्राम)
1965	366 4	199 0
1966	374 8	179 2
1967	379 8	205 0
1968	398 2	209 3
1969	393 6	176 7
1970	421 3	208 4

3 एक प्रयोग उपचार की विभिन्न सान्द्रताओं का गेहूँ के अकुरण पर प्रभाव जानने के लिए किया गया। भिन्न-भिन्न सान्द्रताओं पर निम्न सारणी के अनुसार प्रतिशत अकुरण देखा गया —

सांद्रता (प्रतिशत घोल) नियन्त्रण	प्रतिशत अकुरण
01	90
02	85
03	62
04	35
05	23
06	9

सान्द्रता और अकुरण के सम्बन्ध को उपयुक्त लेखाचित्र द्वारा निरूपित कीजिये।

4 एक कक्षा मे विद्यार्थियो की ऊँचाई का बटन इस प्रकार था —

ऊँचाई (सें० मी०)	विद्यार्थियों की संख्या
130	3
131	4
132	9
133	11
134	7
135	12
136	8
137	5
138	3
139	4
140	1

उपर्युक्त ऊँचाई के बटन को ओजिव वक्र द्वारा निरूपित कीजिये।

5 कीटनाशी एनड्रीन (Endrin) का प्रयोग करने के पश्चात् भिन्न भिन्न दिनो पर एफिड्स की (Aphids) प्रतिशत मृत्यु संख्या निम्न थी —

समय (कीटनाशी प्रयुक्त करने के बाद दिन)	प्रतिशत मृत्यु संख्या
1	60 4
2	67 9
3	75 3
7	83 8

इन प्रेक्षणो को मृत्यु वक्र द्वारा प्रदर्शित कीजिय।

6 निम्नांकित सारणी मे भारत की 1969–70 वर्ष मे विभिन्न अनाजो की कुल उपज दी गयी है —

अनाज का नाम	उपज (दस लाख टनों में)
चावल	40 4
ज्वार	9 7
बाजरा	5 4
मक्का	5 7
रागी	2 2
गेहूँ	20 0
चना	5 5
दालें	6 2
अन्य	4 9

इन उपजो सम्बन्धी आँकडो को पाई-आरेख द्वारा प्रदर्शित कीजिये।

7 संक्रमण के कारण मृत्यु की घटनाएँ इस प्रकार पायी गयी —

संक्रमण के प्रकार	घाव संक्रमण	न्युमोनिया	रक्त-पूतिता	उदर संक्रमण
मृत्यु-संख्या	53	34	28	24

इन आँकडो को दण्ड-चित्र द्वारा निरूपित कीजिये।

8 एक प्रयोग में रंग के घोल की विभिन्न सान्द्रताओं पर प्रकाशीय घनत्व नापा गया और निम्नांकित प्रेक्षण प्राप्त हुए —

रंग की सान्द्रता (अणु भार, प्रतिलिटर)	प्रकाशीय घनत्व
2	0 2
4	0 4
8	0 8
12	1 0

सान्द्रता एवं प्रकाशीय घनत्व को लेखाचित्र द्वारा निरूपित कीजिये।

9 गेहूँ, चावल व चने की फसलों पर फास्फोरस के विभिन्न स्तरों की अनुक्रिया (response) निम्नांकित सारणी में दिखाई गयी है —

(P_2O_5) का स्तर (कि० ग्राम प्रति हेक्टर)	अनुक्रिया (कन्ट्रोल की अपेक्षा उपज में वृद्धि)		
	गेहूँ	चावल	चना
0	0	0	0
20	1 4	1 6	1 0
40	2 5	2 5	1 4
60	3 5	2 6	2 3
80	3 8	2 4	2 5

विभिन्न सस्यों के लिए पृथक्-पृथक् अनुक्रिया-वक्र बनाइए।

10 निम्न सारणी में दो परिवारों का मासिक व्यय विस्तृत रूप से दिया गया है :—

व्यय मद	परिवार-क (व्यय रु० में)	परिवार-ख (व्यय रु० में)
खाद्य पदार्थ	30	90
कपड़े	7	35
मकान किराया	8	40
पढ़ाई	3	12
खर्च अदालत	5	40
अन्य वस्तुएँ	3	60
फुटकर	4	23

इन आँकड़ों को उपयुक्त आरेख द्वारा निरूपित कीजिये।

(बी० काम० नागपुर 1967)

11. निम्न आँकड़ों को बारम्बारता आयत-चित्र द्वारा निरूपित कीजिये :—

साप्ताहिक वेतन (रुपयों में)	श्रमिकों की संख्या
10–15	7
15–20	19
20–25	27
25–30	15
30–40	12
40–50	12
50–60	8

(सी० ए०, 1963)

टिप्पणी :—विभिन्न परीक्षाओं में पूछे गये प्रश्न मूल रूप में आंग्ल भाषा में थे जिनका हिन्दी अनुवाद यहाँ प्रस्तुत है।

□ □ □

3 केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप

किन्ही एककों पर लिए गये प्रेक्षणो की श्रेणी मे सामान्यतः यह लक्षण पाया जाता है कि इन मापो मे किसी एक मान पर केन्द्रित होने की प्रवृत्ति होती है और यह मान श्रेणी के लगभग मध्य मे स्थित होता है। मुख्यतया तीन प्रकार के केन्द्रीय माप प्रयोग मे लाये जाते हैं। ये तीन प्रकार के माप (1) माध्य (Mean), (2) माध्यिका (Median) और (3) बहुलक (Mode) है।

माध्य : ये तीन प्रकार के होते है :—

(क) समान्तर माध्य (Arithmetic mean)

(ख) गुणोत्तर माध्य (Geometric mean)

(ग) हरात्मक माध्य (Harmonic mean)

व्यवहार मे गुणोत्तर व हरात्मक माध्य का उपयोग बहुत कम होता है अतः इनका वर्णन सक्षेप मे ही किया गया है।

समान्तर माध्य समान्तर माध्य को औसत भी कहते हैं। सांख्यिकी मे समान्तर माध्य ज्ञात करने के लिए यह आवश्यक नही है कि प्रेक्षण समान्तर श्रेणी मे हो।

साधारणतया समान्तर माध्य का ही प्रयोग किया जाता है। व्यवहार मे केवल माध्य लिखने से तात्पर्य समान्तर माध्य से ही समझा जाता है।

माना कि समग्र मे N वस्तुएँ, अंश या एकक (Individual) हैं। अंशों पर चर X के प्रति प्रेक्षण लिये गये हैं। समग्र माध्य को बहुधा μ (म्यू) द्वारा निरूपित करते हैं और इसका परिकलन N अंशो पर लिये गये प्रेक्षणो $X_1, X_2, X_3 \ldots\ldots X_N$ द्वारा निम्न सूत्र की सहायता से किया जाता है।

$$\mu = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_N}{N} \qquad \ldots(3.1)$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} X_i \qquad \ldots(3.1.1)$$

यदि प्रतिदर्श मे प्रेक्षणो की संख्या n हो तो सूत्र (3.1) मे N के स्थान पर n का प्रयोग कर सकते हैं। इस स्थिति मे प्रतिदर्श माध्य को $\overline{X}$ द्वारा निरूपित करते हैं।

अर्थात् $$\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \qquad \ldots(3.2)$$

जबकि X_i प्रतिदर्श का i वाँ प्रेक्षण है।

उदाहरण 3.1 : एक लाक्षणिक (clinical) अध्ययन के अन्तर्गत छह वर्ष की आयु के पन्द्रह बच्चों के भार निम्न पाये गये :—

भार · 16 0, 13 5, 13 5, 17 0, 18 0, 13 5, 14 5, 16 5, 13 6, 14 5
(किलोग्राम) 16 5, 15 2, 13 2, 16 0, 17 5।

इन प्रेक्षणो के द्वारा छह् वर्ष की आयु के बच्चो का माध्य भार निम्न प्रकार ज्ञात कर सकते है —

$$\sum_i X_i = (16\ 0 + 13\ 5 + \dots\ \dots\ \dots + 16\ 0 + 17\ 5)$$

$$= 229\ 0$$

और $n = 15$

$$\therefore \quad \bar{X} = \frac{229}{15}$$

$$= 15\ 267$$

प्राय व्यास मे प्रत्येक प्रेक्षण एक ही बार घटित न होकर कई बार घटित होता है। इन प्रेक्षणो का समान्तर माध्य इस प्रकार परिकलित करते हैं। प्रेक्षणो को बारम्बारता बटन के रूप मे व्यवस्थित करते हैं। इन मानो को तदनुसार बारम्बारता से गुणा करके जोड दिया जाता है और इस संख्या को बारम्बारताओ के योग से भाग देने पर माध्य ज्ञात हो जाता है। माना कि चर X पर प्रतिदर्श प्रेक्षण और उनकी तदनुसार बारम्बारता निम्न प्रकार है :—

प्रेक्षण (X)	बारम्बारता (f)
X_1	f_1
X_2	f_2
X_3	f_3
⋮	⋮
X_k	f_k

इस स्थिति मे माध्य $\bar{X}$ के लिए निम्नांकित सूत्र है।

$$\bar{X} = \frac{f_1X_1 + f_2X_2 + \dots + f_kX_k}{f_1 + f_2 + f_3 \dots + f_k} \qquad \dots(3\ 3)$$

$$= \sum_{i=1}^{k} f_i X_i \Big/ \sum_{i=1}^{k} f_i$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i X_i}{n} \qquad \dots(3.\ 3.\ 1)$$

जहाँ $\sum_{i=1}^{k} f_i = n$ (प्रतिदर्श आमाप)

उदाहरण 3·2 : एक कारखाने में काम करने वाले व्यक्तियों का मासिक वेतन और उनकी संख्या नीचे दी गयी है।

मासिक आय (X) (रुपयों में)	काम करने वालों की संख्या (f)
75 00	16
82·50	15
150 00	10
225 00	8
300 00	4
500 00	2
760 00	1

इस फैक्ट्री में काम करने वालों की प्रति व्यक्ति मासिक आय, माध्य द्वारा ज्ञात कर सकते हैं। अतः सूत्र (3.3.1) के अनुसार

$$\bar{X} = \frac{\sum_i f_i X_i}{\sum f_i}$$

$$\sum_i f_i X_i = (75\ 00 \times 16 + 82{\cdot}50 \times 15 + \ldots\ldots + 760 \times 1)$$

$$= 8697\ 50$$

$$\sum_i f_i = (16 + 15 + 10 + \ldots + 1)$$

$$= 56$$

$$\therefore \qquad \bar{X} = \frac{8697{\cdot}50}{56} = 155{\cdot}31$$

प्रति व्यक्ति मासिक वेतन 153·31 रुपये है।

यदि प्रेक्षणों की संख्या अधिक हो और प्रेक्षणों में अन्तर भी कम हो तो प्रेक्षणों को वर्गों में बांट दिया जाता है और प्रत्येक वर्ग में प्रेक्षणों की संख्या को उस वर्ग की बारम्बारता के रूप में लिख दिया जाता है जैसा कि नीचे दिखाया गया है—

वर्ग	बारम्बारता
$X_1 - X_2$	f_1
$X_2 - X_3$	f_2
$X_3 - X_4$	f_3
⋮	⋮
$X_k - X_{k+1}$	f_k

$(X_i - X_{i+1})$ एक वर्ग को निरूपित करता है जिसकी बारम्बारता f_i है जबकि $i = 1, 2, 3, \ldots, k$ । साथ ही वर्ग की निम्न सीमा को वर्ग में सम्मिलित माना गया है। इस स्थिति में माध्य का परिकलन करने के लिये सूत्र (3 3 1) का ही प्रयोग करना होता है। यहाँ चर X के मान, प्रत्येक वर्ग की निम्न व उपरि सीमा के माध्य के समान मान लेते हैं जिसे वर्ग का माध्य मान कहते हैं। माना कि X_1 और X_2 का माध्य मान (Central value) Y_1 है, X_2 व X_3 का माध्य Y_2 है ..., और X_k व X_{k+1} का माध्य Y_k है। सूत्र (3 3 1) को Y के पदों में निम्न रूप में लिख सकते हैं।

$$\overline{X} = \sum_{i=1}^{k} f_i y_i \Big/ \sum_{i=1}^{k} f_i \qquad \cdots (3\ 4)$$

सूत्र (3 4) की सहायता से वर्गीकृत प्रेक्षणों का माध्य ज्ञात किया जा सकता है।

इस प्रकार परिकलित माध्य वास्तविक समान्तर माध्य से भिन्न हो सकता है क्योंकि यहाँ यह कल्पना की गयी है कि वर्ग में सभी प्रेक्षण वर्ग के मध्यमान पर केन्द्रित हैं। प्रायः यह कल्पना पूर्णतया सत्य नहीं है। साधारणतया अन्तराल छोटे होने की दशा में यह त्रुटि अधिक नहीं होती है। इस विधि का उपयोग समय बचाने के लिए किया जाता है।

उदाहरण 3.3 एक कीट सम्बन्धी प्रयोग में डिम्भ-काल (Larval period) के लिये वर्ग-अन्तराल और इन वर्गों में कीटों की संख्या इस प्रकार थी —

वर्ग अन्तराल (दिनों में)	कीटों की संख्या
25—27	14
27—29	26
29—31	13
31—33	11
33—35	2

कीट का माध्य डिम्भ काल परिकलित करने के लिए पहले मध्य मानों को ज्ञात करना होता है।

वर्गों के मध्य मान Y_i 26, 28, 30, 32, 34

कीटों की संख्या f_i 14, 26, 13, 11, 2

$$\therefore \quad \sum_i f_i Y_i = (26 \times 14 + 28 \times 26 + 30 \times 13 + 32 \times 11 + 34 \times 2)$$

$$= 1904$$

$$\sum_i f_i = 66$$

$$\overline{X}=\frac{1904}{66}=28\ 85 \text{ दिन}$$

गुणोत्तर माध्य : प्रेक्षणा $X_1, X_2, X_3, \ldots \ldots, X_n$ का गुणोत्तर माध्य (G M) ज्ञात करने के लिए यह सूत्र है —

$$G\ M=(X_1\ X_2\ X_3 \ldots\ldots X_n)^{1/n}$$

यदि प्रेक्षण $X_1, X_2, X_3, \ldots \ldots, X_k$ अपनी तदनुसार बारम्बारताओं $f_1, f_2, f_3 \ldots, f_k$ सहित दिये गये हो तो गुणोत्तर माध्य निम्न सूत्र की सहायता से ज्ञात कर सकते हैं —

$$G\ M=\left(X_1^{f_1} \cdot X_2^{f_2}\ X_3^{f_3} \ldots X_k^{f_k}\right)^{\frac{1}{n}} \quad \ldots (3\ 6)$$

$$\left\{ \text{ जबकि } \sum_{i=1}^{k} f_i=n \right\}$$

यदि न्यास अनुपात या प्रतिशत सम्बन्धी हो तो गुणोत्तर माध्य ज्ञात करना उचित है।

हरात्मक माध्य : प्रेक्षणो $X_1, X_2\ X_3, \ldots \ldots, X_n$ का हरात्मक माध्य (H M) के लिए सूत्र यह है —

$$\frac{1}{H\ M}=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{X_1}+\frac{1}{X_2}+\frac{1}{X_3}+\ldots\ldots+\frac{1}{X_n}\right) \quad \ldots(3\ 7)$$

यदि प्रेक्षणो $X_1, X_2, X_3, \ldots\ldots, X_k$ की बारम्बारता क्रमश $f_1, f_2, f_3, \ldots\ldots, f_k$ हो तो हरात्मक माध्य के लिए निम्नाकित सूत्र का प्रयोग करते हैं :—

$$\frac{1}{H\ M}=\frac{1}{n}\left(\frac{f_1}{X_1}+\frac{f_2}{X_2}+\frac{f_3}{X_3}+\ldots+\frac{f_k}{X_k}\right) \quad \ldots(3\ 8)$$

$$\text{जबकि } \sum_{i=1}^{k} f_i=n$$

हरात्मक माध्य का प्रयोग मात्रात्मक दरो जैसे प्रति रुपया चीज़ो की मात्रा या प्रति घटा गति आदि के लिए उपयोगी रहा है।

यदि प्रेक्षित मानो मे कोई मान शून्य हो तो गुणोत्तर या हरात्मक माध्य ज्ञात करना सम्भव नही है। इसके अतिरिक्त यदि ऋणात्मक प्रेक्षणो की सख्या विषम हो तो गुणोत्तर माध्य कभी-कभी काल्पनिक हो जाता है। ये कठिनाइयाँ इन माध्यो का महत्त्व कम करती हैं।

माध्यिका

परिभाषा : माध्यिका वह विचर मान है जो कि सम्पूर्ण न्यास को दो बराबर भागो मे विभाजित करता है।

इसे इस प्रकार भी समझ सकते हैं कि यदि समस्त न्यास को आरोही या अवरोही क्रम मे व्यवस्थित करके रखें तो मध्य विचर मान माध्यिका कहलाता है। समष्टि या प्रतिदर्श दोनो के लिए एक ही विधि लागू होती है।

माध्यिका को निम्न स्थितियो मे ज्ञात करना अधिक उपयोगी है। यदि दिये गये न्यास मे कुछ चरम मान विद्यमान हो जैसे एक कार्यालय मे काम करने वालो के मासिक वेतन 110, 150 215 260 700 1200 रुपये हो, तो इस स्थिति मे माध्यिका अन्य की अपेक्षा एक अच्छा केन्द्रीय माप है क्योंकि यहाँ माध्य 438 33 रु है जबकि अधिकतर काम करने वालो का वेतन 260 रु या इससे कम है।

यदि न्यास वर्ग अन्तरालो के रूप मे हो और इसके प्रारम्भिक या अन्तिम मे से कोई एक वर्ग या दोनो वर्ग विवृतान्त हो तो माध्यिका केन्द्रीय माप के लिए उपयुक्त है जैसे निम्न बटन के लिए माध्यिका ज्ञात करना उपयुक्त है —

व्यक्तियों की आयु (वर्षों में)	व्यक्तियों की संख्या
<5	3
5—10	9
10—20	16
20—30	8
30—40	15
40—50	20
50—60	6
>60	4

किसी बटन मे खुले वर्गों को लेना प्राय अनिवार्य हो जाता है। यदि प्रेक्षणो को ही खुले रूप मे लिया गया हो जैसे 60 वर्ष से अधिक आयु के व्यक्तियो की संख्या ज्ञात की गयी हो तो इस स्थिति मे अन्तिम वर्ग की उपरि सीमा नहीं है।

यह गुणात्मक न्यास के लिए भी उपयुक्त है। इस स्थिति मे एकको की कोटि प्राय लिखी जाती है जैसे व्यक्तियो की सुन्दरता, वस्तुओ का स्वाद आदि।

यदि प्रत्येक प्रेक्षित अक अलग अलग लिखा गया हो और कुछ प्रेक्षणो की संख्या n हो तो दो स्थितियाँ सम्भव हैं।

(1) जब n विषम है। (2) जब n सम है।

स्थिति 1 —n विषम होने की स्थिति मे n को सदैव $n=2k+1$ के रूप मे लिख सकते हैं जबकि k एक पूर्ण संख्या है। माना कि समस्त प्रेक्षित अको को आरोही क्रम मे रखा गया है तो $(k+1)$ वें विचर मान से k अक पहले होंगे जिनके मान इस मान से

कम या समान होंगे और k मान बाद में होंगे जिनके मान इसके समान या इससे अधिक होंगे। अत (k+1) वा प्रेक्षित अक माध्यिका कहलाता है।

$$X_1, X_2, X_3, \ldots, \quad X_k, X_{k+1}, X_{k+2}, \ldots, \quad X_{2k+1}$$

↑ माध्यिका

जबकि प्रेक्षण $X_1, X_2, X_3 \ldots X_{2k+1}$ क्रम म व्यवस्थित हैं।

उदाहरण 3 4 उपलब्ध आंकडो के अनुसार बिहार राज्य में विभिन्न सिंचाई योजनाओ का अनुमानित व्यय इस प्रकार है —

व्यय (दस लाख —26 8, 66 0, 15 2, 8 8, 8 1, 9 9,
रुपयो मे) 179 7, 11 3, 15 2

यह न्यास आरोही क्रम मे निम्न प्रकार है।

8 1, 8 8, 9 9, 11 3, 15 2, 15 2, 26 8, 66 0, 179 7

यहाँ मानो की सख्या 9 है जो कि विषम है। नियम के अनुसार पाँचवा मान माध्यिका है।

अत माध्यिका = 15 2 रु (दस लाख)

स्थिति 2 —n सम होने की स्थिति मे, सदैव n=2k के रूप मे लिखा जा सकता है जबकि k एक पूर्ण सख्या है। इस स्थिति मे केवल एक प्रेक्षित अक मध्य अक नही होगा तथापि बीच के दो अक मध्य अक के रूप मे होंगे। प्रेक्षित अको (प्रेक्षणो) को सर्वप्रथम क्रम मे रखना अनिवार्य है। बीच के दो प्रेक्षित अकों का समांतर माध्य ही माध्यिका होती है।

माना कि आरोही क्रम मे व्यवस्थित 2k प्रेक्षित मान निम्न हैं

$$X_1, X_2, X_3 \quad X_{k-1}, X_k, X_{k+1}, X_{k+2}, X_{k+3} \ldots X_{2k}$$

यहाँ kवें (k th) मान से [k − 1] मान पहले और (k+1)वें मान से [k − 1] मान बाद मे है। अत

$$\text{माध्यिका } Md = \frac{X_k + X_{k+1}}{2}$$

उदाहरण 3 5 : 1972 के भारतीय आंकडो के अनुसार मध्य प्रदेश मे विभिन्न सिंचाई योजनाओ पर अनुमानित व्यय निम्न है —

व्यय [लाख रुपये] 159, 120, 172, 142, 201, 107

इस न्यास की माध्यिका ज्ञात करने के लिए इन आंकडो का आरोही क्रम इस प्रकार है —107, 120, 142, 159, 172, 201

यहाँ मानो की सख्या 6 है जोकि सम है अत ऊपर दिये हुए नियम के अनुसार तीसरे व चौथे मान का समातर माध्य माध्यिका होगी।

$$\text{माध्यिका} = \frac{142+159}{2}$$

$$= \frac{301}{2}$$

$$= 150.5 \text{ लाख रुपए}$$

यदि प्रत्येक प्रेक्षित मान परिवर्ती बारम्बारता सहित सारणीबद्ध हो तो माध्यिका ज्ञात करने के लिए पहले प्रेक्षणों को उनके मान के अनुसार आरोही या अवरोही क्रम में व्यवस्थित कर लिया जाता है। यह ध्यान रहे कि इन प्रेक्षित मानों की तदनुसार बारम्बारता वही रहती है। अगले स्तम्भ में संचयी बारम्बारता में, जो बारम्बारताओं के योग के समान है, एक जोड़कर इसका आधा ज्ञात कर लिया जाता है अर्थात् यदि बारम्बारताओं का योग n है तो संख्या $\frac{n+1}{2}$ को ज्ञात कर लिया जाता है। फिर संचयी बारम्बारता में यह देखते हैं कि वह कौनसी न्यूनतम संचयी बारम्बारता है जो संख्या $\frac{n+1}{2}$ के समान है या उससे अधिक है अर्थात् इस संख्या का किस संचयी बारम्बारता में समावेश है। इस संचयी बारम्बारता का जो तदनुसार प्रेक्षित मान होता है वही माध्यिका होती है।

माध्यिका के परिकलन करने की विधि निम्न उदाहरण द्वारा और अधिक स्पष्ट हो जायेगी।

उदाहरण 3.6 एक फैक्ट्री में काम करने वालों का प्रति दिन वेतन और उनकी निम्न बारम्बारता सारणी में दी गयी है।

यहाँ प्रेक्षित मानों को क्रम में ही दिया गया है।

प्रतिदिन वेतन की दर (X) (रुपये)	काम करने वालों की संख्या (f)	सं० बार० (F)
2.0	2	2
2.5	2	4
3.0	7	11
3.5	14	25
4.0	20	45
5.0	6	51
12.0	3	54

यहाँ $\frac{n+1}{2} = \frac{54+1}{2} = 27.5$

संख्या 27 5 का सचयी बारम्बारता 45 म समावेश है। अत स बार 45 के अनुसार माध्यिका वेतन 4 B रु प्रति दिन है।

जब आँकडे वर्गों मे विभाजित किये गये हो अर्थात् सतत न्यास की स्थिति हो। [वर्गों की स्थिति मे सतत न्यास से अभिप्राय है कि सदैव पिछले वर्ग की उपरि सीमा अगले वर्ग की निम्न सीमा के समान है।] तो सर्वप्रथम वर्गों को क्रम म रख दिया जाता है और फिर इस बटन के लिए सचयी बारम्बारता ज्ञात करली जाती है। बारम्बारता के योग का आधा अर्थात् $\frac{n}{2}$ ज्ञात कर लिया जाता है। पिछले खण्ड मे दी गयी विधि की भाँति यह ज्ञात करते हैं कि सख्या $\frac{n}{2}$ का किस सचयी बारम्बारता मे समावेश है। इस सचयी बारम्बारता के सम्मुख जो वर्ग होता है वही माध्यिका वर्ग होता है। किन्तु माध्यिका का केवल एक ही मान सम्भव है अर्थात् माध्यिका अद्वितीय है। अत इस वर्ग म निम्नतम और उपरि सीमा के बीच का एक मान माध्यिका होगा या सीमा मानो मे से स्वय भी एक मान माध्यिका हो सकता है। इस अद्वितीय मान को नीचे दिये गये सूत्र द्वारा ज्ञात कर सकते हैं। माना कि श्रमित बारम्बारता बटन निम्न है।

वर्ग	बार०	स० बार०
$X_1 - X_2$	f_1	F_1
$X_2 - X_3$	f_2	F_2
$X_3 - X_4$	f_3	F_3
⋮	.	.
$X_i - X_{i+1}$	f_i	F_i
⋮	.	.
$X_k - X_{k+1}$	f_k	$F_k = n$

[जहाँ $\sum_i f_i = n$]

तो सूत्र है,

$$(\text{माध्यिका})\ M_d = L_o + \frac{\frac{n}{2} - C}{f} XI \qquad (3\ 9)$$

जबकि L_o माध्यिका वर्ग की निम्न सीमा है।

C माध्यिका वर्ग से ऊपर वाले वर्ग के सम्मुख स बार है।

f माध्यिका वर्ग की बारम्बारता है।

I माध्यिका वर्ग की उपरि व निम्न सीमा का अन्तर है अर्थात् वर्ग अन्तराल है।

सूत्र (3 9) के औचित्य को इस प्रकार समझ सकते हैं। माध्यिका तक संचयी बारम्बारता $\frac{n}{2}$ है और $\left(\frac{n}{2} - C\right)$, माध्यिका वर्ग की निम्न सीमा और माध्यिका के बीच की बारम्बारता है। यह माना कि बारम्बारता f वर्ग अंतराल में समरूप से बटी हुई है। तो $\frac{\frac{n}{2} - C}{f} \times I$ बारम्बारता $\left(\frac{n}{2} - C\right)$ के लिए आवश्यक लम्बाई है। अत L_0 में इस लम्बाई को जोड देने पर सूत्र [3 9] प्राप्त हो जाता है।

उदाहरण 3 7 एक सर्वेक्षण म कुछ व्यक्तियों की आयु ज्ञात की गयी जिसका कि वर्गों सहित बारम्बारता बटन निम्नांकित सारणी में दिया गया है।

आयु वर्ग (वर्ष) (X)	व्यक्तियों की संख्या (f)	स० बार. (F)
<5	5	5
5—10	9	14
10—20	16	30
20—30	8	38
30—40	15	53
40—50	20	73
50—60	6	79
>60	4	83

उपर्युक्त न्याम मे वर्ग विवृतात हैं। यदि माध्य ज्ञात करना चाहें तो अन्तिम वर्ग का मध्य मान ज्ञात करना सम्भव नही है। अत यहाँ माध्य का परिकलन करना सम्भव नही है, परन्तु माध्यिका का परिकलन करना सम्भव है।

$$\text{सख्या } \frac{n}{2} = \frac{83}{2} = 41\ 5$$

$\frac{n}{2}$ के मान 41 5 का स० बार 53 मे समावेश है। अत माध्यिका वर्ग [30–40] है।

सूत्र (3 9) के अनुसार माध्यिका,

$$M_d = 30 + \frac{41\ 5 - 38}{15} \times 10$$

$$= 30 + \tfrac{35}{15}$$

$$= 32\ 33 \text{ वर्ष}$$

चतुर्थक

परिभाषा : ये वे विचर-मान हैं जो सम्पूर्ण बारम्बारता को या जिन पर कोटि बारम्बारता बटन वक्र के अन्दर के क्षेत्र को चार बराबर भागो मे विभाजित करती हैं। वह विचर मान जिस पर कोटि कुल बारम्बारता-वक्र के अन्दर के क्षेत्र को 1 3 के अनुपात मे विभाजित करती है, प्रथम चतुर्थक, 1 1 के अनुपात मे विभाजित करती है, द्वितीय चतुर्थक और जो 3 1 के अनुपात मे विभाजित करती है, तृतीय चतुर्थक कहलाता है और इन चतुर्थको को क्रमश Q_1, Q_2, Q_3 द्वारा निरूपित करते हैं।

ऊपर दी हुई परिभाषा से स्पष्ट है कि द्वितीय चतुर्थक और माध्यिका एक समान होते हैं।

प्राय Q_1 को लघु चतुर्थक व Q_3 को गुरु चतुर्थक भी कहते हैं।

चतुर्थक ज्ञात करने के लिये लगभग उसी प्रकार की रीति का अनुसरण करते हैं जो माध्यिका निकालने के काम आती है। प्रेक्षणो को क्रम मे व्यवस्थित कर लिया जाता है। इस बटन मे सचयी बारम्बारताएँ ज्ञात करली जाती हैं। यदि असतत न्यास हो तो Q_1, Q_2, Q_3 निकालने के हेतु क्रमश सख्याओ $\frac{n+1}{4}$, $\frac{2(n+1)}{4}$ व $\frac{3(n+1)}{4}$ का परिकलन कर लिया जाता है। इन मानो का जिन सचयी बारबारताओ मे समावेश होता है उनके तदनुसार विचर मान क्रमश Q_1, Q_2 Q_3 को निरूपित करते हैं।

उदाहरण 3 8 यदि उदाहरण (3 1) मे दिये गये बारबारता बटन के चतुर्थक ज्ञात करने हो तो इनका परिकलन निम्न प्रकार से कर सकते हैं —

$$n=50$$

Q_1 के लिए $\frac{n+1}{4}=\frac{51}{4}=12\ 75$। इस मान का स बार 13 मे समावेश है अत

$Q_1=2\ 6$ किलोग्राम

Q_2 के लिए $\frac{2(n+1)}{4}=25\ 5$, इस मान का स बार 28 मे समावेश है अत

$Q_2=3\ 0$ किलोग्राम

Q_3 के लिए $\frac{3(n+1)}{4}=38\ 25$, इस मान का स बार 39 मे समावेश है अत

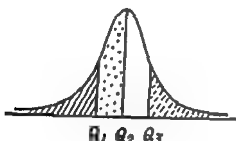
$Q_3=32$ किलोग्राम

यदि न्यास को वर्गों मे विभाजित करके बारम्बारता सहित सारणीबद्ध किया गया हो अर्थात् सतत न्यास हो तो इन वर्गों को क्रम मे व्यवस्थित कर लिया जाता है और सचयी बारम्बारता ज्ञात कर ली जाती है जैसा कि माध्यिका के लिये किया गया है। इसके पश्चात् चतुर्थक निम्न सूत्र की सहायता से ज्ञात किये जा सकते हैं। यह ध्यान रहे कि

Q_1, Q_2, Q_3 के लिए चतुर्थक वर्ग का निर्णय क्रमश संख्याओ $\frac{n}{4}, \frac{2n}{4}, \frac{3n}{4}$ के आधार पर होता है।

$$Q_k = L_{ok} + \frac{\frac{K \times n}{4} - C_k}{f_k} \cdot I_k \quad (3.10)$$

जब कि $K=1, 2, 3,$ रख देने पर क्रमश चतुर्थक Q_1, Q_2, Q_3 के लिए सूत्र उपलब्ध हो जाता है।



चित्र 3–1 चतुर्थकों का आरेखी निरूपण

सूत्र (3 10) मे,

L_{ok} – Kवें चतुर्थक के लिए वर्ग की निम्नतम सीमा है।

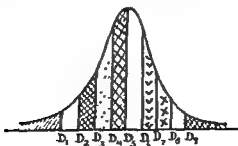
C_k – Kवें चतुर्थक के वर्ग से ऊपर वाले वाले वर्ग के सम्मुख संचयी बारम्बारता है।

f_k – Kवें चतुर्थक–वर्ग की बारम्बारता है।

I_k – Kवें चतुर्थक–वर्ग की उपरि व निम्न सीमा के अन्तर के समान है।

दशमक

परिभाषा —दशमक वे विचर मान हैं जो कुल बारम्बारता को दस समान भागो मे विभाजित करते हैं। यदि चर सतत हैं तो वे विचर मान जिन पर कोटियाँ वक्र के नीचे के क्षेत्र को दस समान क्षेत्रो मे विभाजित करते हैं दशमक कहलाते हैं। इन्हें $D_1, D_2, D_3 \ldots \ldots \ldots D_9$ द्वारा निरूपित करते हैं।



चित्र 3–2 दशमकों का आरेखी प्रस्तुतीकरण

असतत न्यास के दशमक D_k, ($k=1, 2, 3, \ldots \ldots 9$) का परिकलन करने के लिए संख्याओ $\frac{(n+1)K}{10}$ को ज्ञात करना होता है इसी संख्या का जिस संचयी बार मे समावेश होता है उसका तदनुसार विचर मान दशमक होता है (स्पष्टत D_5 माध्यिका को निरूपित करता है।)

उदाहरण 3. 9 —यदि उदाहरण (2 1) मे दिये गये बारम्बारता बटन के लिए D_3, D_8 ज्ञात करने हैं तो D_3 के लिए संख्या $\frac{3(n+1)}{10}=\frac{3\times 51}{10}=15\ 3$। इस संख्या का सं बार 20 मे समावेश है। अत दशमक $D_3=2\ 8$। इसी प्रकार D_8 के लिए $\frac{8(n+1)}{10}=41\ 8$, इस संख्या का सं बार 44 मे समावेश है। अत आठवाँ दशमक $D_8=3\ 4$। यदि आँकड़े सतत वर्गों मे विभाजित करके लिखे गये हो तो चतुर्थक के समरूप निम्न सूत्र का प्रयोग करके दशमक D_k (जब कि $K=1, 2, 3, \ \ 9$) ज्ञात कर सकते हैं।

$$D_K=L_{OK}+\frac{\frac{k\times n}{10}-C_K}{f_K}\times I_k \qquad (3\ 11)$$

यहाँ दशमक वर्ग को संख्या $\frac{K\times n}{10}$ के द्वारा ज्ञात किया गया है।

इस सूत्र मे प्रत्येक संकेतन के लिए k वाँ दशमक शब्द का प्रयोग करना होता है।

शततमक

परिभाषा —किसी बारम्बारता बटन मे शततमक वे विचर मान हैं जो कुल बारम्बारता को सौ समान भागो मे विभाजित करते हैं। यदि चर सतत है तो वे विचर मान, जिन पर कोटियाँ वक्र के नीचे के क्षेत्र को सौ समान भागो मे विभाजित करती हैं शततमक कहलाते हैं। इन्हें P_k द्वारा निरूपित करते हैं जब कि $k=1, 2, 3, \ldots \ldots, 99$

यदि असतत न्यास हो तो शततमक ज्ञात करने के लिए संख्याओ $\frac{K(n+1)}{100}$ को ज्ञात करना होता है उसके तदनुसार विचर मान ही k वा शततमक होता है।

यदि बारम्बारता बटन प्रेक्षणो को सतत वर्गों मे विभाजित कर के दिया गया हो तो चतुर्थक के समरूप सूत्र शततमक के लिए दिया जा सकता है।

$$P_k=L_{ok}+\frac{\frac{K\times n}{100}-C_k}{f_k}\times I_k \qquad (3\ 12)$$

जब कि $k=1, 2, 3, \ldots \ldots \ldots 99$

इस सूत्र मे सकेतनो का वर्णन kवें चतुर्थक के स्थान पर kवें शततमक शब्द को प्रयोग करके दिया जा सकता है। स्पष्टत P_{50} माध्यिका को निरूपित करता है।

उदाहरण 3 10 —गणित की परीक्षा मे एक कक्षा मे विद्यार्थियो के अको का विभिन्न वर्ग अन्तरालो के अनुसार निम्न बटन पाया गया।

अकों के वर्ग – अन्तराल	विद्यार्थियों की संख्या [बार.]	सं. बार.
0–10	3	3
10–20	6	9
20–30	16	25
30–40	20	45
40–50	32	77
50–60	44	121
60–70	9	130
70–80	4	134
80–90	2	136
90–100	1	137

(i) माध्यिका (ii) प्रथम व तृतीय चतुर्थक (iii) दूसरे व सातवें दशमक (iv) पचपनवें शततमक, का परिकलन निम्न रूप में किया जाता है।

(i) सूत्र (3 9) के अनुसार माध्यिका के लिए

$$\frac{n}{2} = \frac{137}{2} = 68\ 5$$

बारम्बारता 68 5 का स बार 77 मे समावेश है। अत माध्यिका वर्ग–अन्तराल [40–50] मे स्थित है।

$$\text{माध्यिका} \quad Md = 40 + \frac{68\ 5 - 45}{32} \times 10$$

$$= 40 + \frac{23\ 5}{32} \times 10$$

$$= 47\ 3 \text{ अक}$$

(ii) इसी प्रकार प्रथम व तीसरा चतुर्थक ज्ञात करने के हेतु सूत्र (3 10) का प्रयोग किया गया है।

प्रथम चतुर्थक Q_1 के लिए $\frac{n}{4} = \frac{137}{4} = 34\ 25$

इस मान का स बार 45 मे समावेश है अत

$Q_1 = 30 + \frac{34\ 25-25}{20} x\ 10$

$= 30 + \frac{9\ 25}{20} x\ 10$

$= 34\ 62$ अक

इसी प्रकार तृतीय चतुर्थक Q_3 के लिए $\frac{3 \times n}{4} = 102\ 75$

अत *Q_3 वर्ग-अन्तराल 50–60 मे स्थित है।*

$Q_3 = 50 + \frac{102\ 75-77}{44} x\ 10$

$= 50 + \frac{25\ 75}{44} x\ 10$

$= 55\ 85$ अक

(iii) दशमक ज्ञात करने के लिये सूत्र (3 11) का प्रयोग किया गया है। D_2 के लिए सख्या $\frac{2 \times n}{10} = \frac{137 \times 2}{10} = 27\ 4$ है।

अत D_2 वर्ग-अन्तराल [30–40] मे स्थित है।

$D_2 = 30 + \frac{27\ 4-25}{20} x\ 10$

$= 30 + \frac{24}{20}$

$= 31 \cdot 2$ अक

इसी प्रकार D_7 के लिये $\frac{7 \times n}{10} = \frac{137 \times 7}{10} = 95\ 9$

अत दशमक D_7 वर्ग-अन्तराल [50–60] मे स्थित है।

$\therefore D_7 = 50 + \frac{95\ 9-77}{44} x\ 10$

$= 50 + \frac{18\ 9}{44} x\ 10$

$= 54\ 3$ अक

शततमक के लिए सूत्र [3·12] का प्रयोग किया गया है।

पचपनवें शततमक P_{55} के लिए संख्या $\frac{55 \times n}{100} = \frac{55 \times 137}{100} = 75 \cdot 35$

यह संख्या वर्ग-अन्तराल [40–50] में स्थित है।

$$\therefore P_{55} = 40 + \frac{75 \cdot 35 - 55}{32} \times 10$$

$$= 40 + \frac{30 \cdot 35}{32} \times 10$$

$$= 49 \cdot 45 \text{ अंक}$$

बहुलक

परिभाषा बहुलक किसी चर पर प्रेक्षणों के समुच्चय में वह मान है जिसकी बारम्बारता सबसे अधिक होती है।

यदि समुच्चय में सबसे अधिक बारम्बारता वाले एक से अधिक मान हों तो इस स्थिति में एक बंटन के एक से अधिक बहुलक हो सकते हैं। यदि बारम्बारता बंटन बिना किसी अन्तरालों के दिया गया हो तो बंटन को देखकर ही बहुलक ज्ञात कर सकते हैं। जैसे उदाहरण [3 6] में काम करने वालों की अधिकतम संख्या अर्थात् अधिकतम बारम्बारता 20 है अतः बहुलक 4 0 रु प्रतिदिन हुआ।

यदि आंकड़े वर्गों में विभाजित करके बारम्बारता सहित सारणीबद्ध किये गये हों तो बहुलक का निम्न सूत्र की सहायता से परिकलन कर सकते हैं। माना कि बारम्बारता बंटन निम्न है।

वर्ग-अन्तराल	बारम्बारता
$X_1 - X_2$	f_1
$X_2 - X_3$	f_2
$X_3 - X_4$	f_3
⋮ ⋮	⋮
$X_{k-1} - X_k$	f_{k-1}
$X_k - X_{k+1}$	f_k
$X_{k+1} - X_{k+2}$	f_{k+1}
⋮ ⋮	⋮
$X_n - X_{n+1}$	f_n

तो बहुलक,

$$M_o = L_o + \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} \times l \quad (3 \cdot 13)$$

जब कि L_0 = बहुलक वर्ग की निम्नतम सीमा है। प्रति यूनिट अधिकतम बारम्बारता के तदनुसार वर्ग को बहुलक वर्ग कहते हैं।

Δ_1 = बहुलक वर्ग की बारम्बारता का इससे पिछले वर्ग की बारम्बारता से अन्तर

Δ_2 = बहुलक वर्ग की बारम्बारता का इससे अगले वर्ग की बारम्बारता से अन्तर

I = बहुलक वर्ग की उपरि सीमा का निम्न सीमा से अन्तर।

माना कि ऊपर दिये बटन में f_k सबसे अधिक बारम्बारता है। तो सूत्र के लिये

$L_o = X_k$, $\Delta_1 = f_k - f_{k-1}$, $\Delta_2 = f_k - f_{k+1}$, $I = X_{k+1} - X_k$

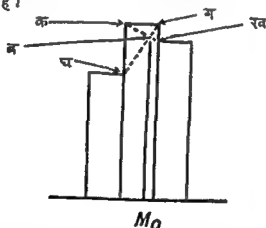
टिप्पणी [i] यह ध्यान रखना चाहिये कि वर्गों को आरोही या अवरोही क्रम में रखना आवश्यक है।

[ii] किसी बटन में एक से अधिक बहुलक भी हो सकते हैं।

[iii] बहुलक वर्ग का पता बारम्बारता को देखकर ही चल जाता है किन्तु इस वर्ग में बहुलक का एक निश्चित् मान ज्ञात करने के हेतु सूत्र [3 9] का प्रयोग करना होता है।

बहुलक का ज्यामितीय निरूपण

यदि बारम्बारता बटन का अमित वर्ग-अन्तरालों के अनुसार बारम्बारता आयत चित्र द्वारा निरूपित कर दिया जाए तो बहुलक सबसे अधिक ऊँचाई वाले आयत में स्थित होता है। अत नीचे चित्र [3–4] में तीन आयत दिखाये गये हैं। बीच का आयत बहुलक वर्ग की बारम्बारता को प्रदर्शित करता है और एक इससे पूर्व व एक इसके बाद की बारम्बारता को प्रदर्शित करता है।



चित्र (3–3) बहुलक का ज्यामितीय निरूपण

चित्र (3-3) में रेखा क ख और ग घ का कटान-बिन्दु ब का X—निर्देशांक बहुलक मान के समान होता है।

उदाहरण 3 11 उदाहरण न० [3 10] में दिये गये बटन का बहुलक [i] गणितीय सूत्र द्वारा [ii] ज्यामितीय विधि द्वारा, ज्ञात करने के लिए दिये गये बटन में अधिकतम बारम्बारता 44 है। अत बहुलक अन्तराल [50–60] में स्थित है।

बहुलक का यथार्थ मान सूत्र (3·14) की सहायता से ज्ञात करते हैं।

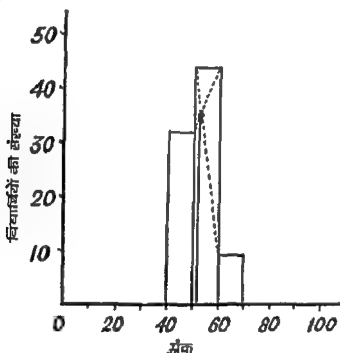
$$Lo=50,\ \Delta_1=44-32=12$$

$$\Delta_2=44-9=35,\ I=50-40=10$$

$$Mo=50+\frac{12}{35+12}\times 10$$

$$=52\ 55 \text{ अंक}$$

(ii) ज्यामितीय विधि द्वारा बहुलक चित्र (3–4) मे दिया गया है। चित्र द्वारा प्राप्त बहुलक मान Mo=52 5



चित्र (3–4) बहुलक का ज्यामितीय निरूपण

प्रश्नावली

1 : एक फैक्ट्री के श्रमिको का आयु-बटन और आयु-वर्गों की तदनुसार बारबारता निम्न सारणी मे दी गयी है .—

आयु वर्ग	श्रमिकों की संख्या
10—19	0
20—29	3
30—39	9
40—49	13
50—59	1
60—69	1

(i) इस बटन की बहुलक आयु ज्ञात कीजिये।

(ii) माध्यिका क्या है? क्या इसे लक्षणिक न्यास के लिए ज्ञात किया जा सकता है?

(iii) विभिन्न केन्द्रीय प्रवृत्ति के मापो के गुणो एव दोषो का उल्लेख कीजिये।

2 एक पुरुषो के समूह का आयु बटन निम्न प्रकार है —

आयु [वर्षों में]	विद्यार्थियों की संख्या
28—32	2
33—37	0
38—42	1
43—47	5
48—52	2
53—57	0
58—62	7
63—67	3

उपर्युक्त बटन के लिए

(i) माध्य आयु (ii) माध्यिका (iii) बहुलक (iv) गुरु चतुर्थक (v) आठवा दशमक (vi) सत्तरवा शततमक ज्ञात कीजिये।

3 सांख्यिकी की एक परीक्षा मे प्राप्त अको के लिए निम्न बटन के बहुलक, माध्यिका और समान्तर माध्य का परिकलन कीजिये।

अक 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45 50

विद्यार्थियो की

सख्या 20, 43, 75, 67, 72, 45, 39, 9, 8, 6

(बी काम, नागपुर, 1971)

[उत्तर बहुलक 25, माध्यिका 20, माध्य 22 2]

4 (अ) गुणोत्तर माध्य के गुणो एव दोषो पर टिप्पणी लिखिए।

(ब) निम्न आँकडो का गुणोत्तर माध्य परिकलित कीजिये।

6 5, 169 0, 11 0, 112 5, 14 2, 75 5, 35 5, 215 0

(बी काम, आन्ध्र, 1966)

[गुणोत्तर माध्य=42 74]

5 निम्नाकित विद्यार्थियो के एक समूह के मासिक व्यय का गुणोत्तर माध्य तथा हरात्मक माध्य ज्ञात कीजिये।

रु 125 00, 130 00, 75 30, 10 00, 45 00, 5 00, [illegible] 50, 0 40, 500 00, 150 00

(बी काम, आन्ध्र, 1966)

6 एक फैक्ट्री में 65 काम करने वालो की माध्य मासिक आय 270 रुपये परिकलित की गयी। कुछ समय पश्चात् ज्ञात हुआ कि दो व्यक्तियो की आय 250 रुपये लिख ली गयी थी जबकि उनकी वास्तविक आय 150 रुपये थी। अत अब आप शुद्ध माध्य ज्ञात कीजिये।

7 एक व्यक्ति को पहले वर्ष के अन्त में 10% की, दूसरे वर्ष के अन्त मे 9% और तीसरे वर्ष के अन्त मे 8% की वृद्धि मिली। तो माध्य प्रतिशत वृद्धि ज्ञात कीजिये।

8 कौनसा दशमक माध्यिका को निरूपित करता है और क्यो ? स्पष्ट कीजिये।

□□□

4 | विक्षेपण–माप

किसी समग्र या प्रतिदर्श मे सम्मिलित एककों पर किसी भी लक्षण के प्रति मापों मे भिन्नता होना स्वाभाविक है। इन मापों मे भिन्नता को मापने के लिए विभिन्न विक्षेपण मापों का प्रयोग करना होता है जिनका वर्णन इस अध्याय मे किया गया है।

यह सम्भव है कि विभिन्न समुच्चयों[1] का माध्य या अन्य केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप तो बराबर हो किन्तु इनमे प्रेक्षणो का विचरण एक जैसा न हो जैसा कि निम्न तीन समुच्चयो पर विचार करने से स्पष्ट होता है —

समुच्चय 1	25,	25,	25,	25,	25,	25,	25
समुच्चय 2	23,	24,	25,	25,	25,	26,	27
समुच्चय 3	2,	6,	9,	13,	30,	50,	65

उपर्युक्त तीनों समुच्चयो का माध्य 25 है किन्तु तीनो के बटन एक दूसरे से पूर्णतया भिन्न हैं। इसके अतिरिक्त पहले व दूसरे समुच्चय की माध्यिका (Md=25) भी समान है किन्तु ये समुच्चय *एक दूसरे से भिन्न हैं। इससे विदित होता है कि केन्द्रीय प्रवृत्ति* के मापो द्वारा प्रेक्षणो के बटन का पूर्ण ज्ञान नही होता है। अत किसी समुच्चय के प्रेक्षणो मे एक दूसरे से भिन्नता के विषय मे जानने के हेतु कुछ विशेष गणितीय माप दिये गये हैं जिन्हे विक्षेपण माप कहते हैं।

परिसर

प्रेक्षणो के किसी भी समुच्चय मे अधिकतम और न्यूनतम प्रेक्षित माप के अन्तर को परिसर कहते हैं। इसको प्राय न्यूनतम से अधिकतम माप तक के रूप मे भी लिखा जाता है। यह सबसे सुगम विक्षेपण माप है। माना कि समुच्चय मे अधिकतम प्रेक्षण मान L और न्यूनतम प्रेक्षण मान S है। तो

$$\text{परिसर} = L - S \qquad \text{....(4 1)}$$

परिसर का विशेष दोष यह है कि यह केवल दो मानो पर ही आधारित है और इससे यह नही ज्ञात होता है कि इन दो चरम मानो के बीच प्रेक्षणो की स्थिति क्या है।

उदाहरण 4.1 : उदयपुर जिले मे एक मृदा सम्बन्धी सर्वेक्षण किया गया और उसके द्वारा काली मिट्टी मे विनिमय योग्य पोटासियम (Exchangeable potassium) की मात्रा निम्नांकित पायी गयी —

विनिमय–योग्य पोटासियम 39 4, 20 9, 18 3, 15 4, 26 4,
(मिलीग्राम प्रति 100 ग्राम मृदा) 37 9, 18 9

1. समुच्चयों का वर्णन परिशिष्ट–क में किया गया है।

प्रेक्षणों का परिसर इस प्रकार ज्ञात कर सकते हैं —

सूत्र (4 1) की सहायता से,

$$\text{परिसर} = (L - S)$$

अधिकतम माप, $L = 39\ 4$ और न्यूनतम माप, $S = 15\ 4$

$$\text{परिसर} = 39\ 4 - 15\ 4$$

$$= 24\ 0 \text{ मिलीग्राम प्रति 100 ग्राम मृदा।}$$

अन्तश्चतुर्थक परिसर

गुरु (तृतीय) चतुर्थक और लघु (प्रथम) चतुर्थक के अन्तर को अन्तश्चतुर्थक परिसर कहते हैं। सूत्र के रूप में

$$\text{अन्तश्चतुर्थक परिसर} = (Q_3 - Q_1) \quad \ldots (4\ 2)$$

यह क्रमित प्रेक्षणों के समुच्चय में बीच के 50 प्रतिशत प्रेक्षणों के परिसर को बताता है। इस माप का यह दोष है कि 25 प्रतिशत निम्नतम और 25 प्रतिशत उच्चतम प्रेक्षणों को इसमें सम्मिलित नहीं किया जाता है अर्थात् इनके विषय में कुछ ज्ञान नहीं होता है। यदि उपर्युक्त परिसर को दो से भाग दें तो इसे चतुर्थक विचरण (Quartile deviation) या अर्ध-अन्तश्चतुर्थक परिसर (Semi interquartile range) कहते हैं।

$$\text{चतुर्थक विचरण} = \frac{Q_3 - Q_1}{2} \quad \ldots (4\ 3)$$

इस विक्षेपण माप में कुल के आधे प्रेक्षण छूट जाते हैं। इसी कारण इस माप को कम प्रयोग में लाया जाता है। इसी प्रकार नवें व पहले दशमक के अन्तर के आधे को अन्तर्दशमक विचरण कहते हैं और इसे $\frac{D_9 - D_1}{2}$ द्वारा ज्ञात कर सकते हैं।

उदाहरण 4 2 उदाहरण (4 1) में दिये न्यास का चतुर्थक विचरण इस प्रकार ज्ञात होगा।

प्रेक्षणों की संख्या $n = 7$

अतः Q_1 व Q_3 के लिए क्रमश संख्याएँ

$$\frac{n+1}{4} = \frac{8}{4} = 2 \text{ और } \frac{3(n+1)}{4} = \frac{3 \times 8}{4} = 6 \text{ है।}$$

प्रेक्षणों को आरोही क्रम में रखने पर

15 4, 18 3, 18 9, 20 9, 26 4, 37 9, 39 4

अतः $Q_1 = 18\ 3$ और $Q_3 = 37\ 9$

$$\text{चतुर्थक विचरण} = \frac{37\ 9 - 18\ 3}{2}$$

$$= 9\ 8 \text{ मिलिग्राम प्रति 100 ग्राम मृदा।}$$

माध्य विचलन

किसी समुच्चय के अंकों के माध्य, माध्यिका या बहुलक से विचलन[2] के निरपेक्ष मान[3] के माध्य को माध्य विचलन (मा० वि०) कहते हैं।

माना कि प्रतिदर्श प्रेक्षण $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$ हैं और A एक अचर मान है, तो

$$A \text{ से मा० वि० (M.D)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |(X_i - A)| \qquad \ldots(4\ 4)$$

जबकि A के स्थान पर माध्य $\overline{X}$, माध्यिका M_d या बहुलक M_0 का प्रयोग कर सकते हैं।

यह ध्यान रखें कि यदि $A = \overline{X}$ है और निरपेक्ष मान का प्रयोग नही किया है तो माध्य विचलन शून्य हो जायेगा क्योंकि $\sum_i (X_i - \overline{X})$ सदैव शून्य के समान होता है। परिभाषा के अनुसार माध्य विचलन के लिए निरपेक्ष मान का प्रयोग करना आवश्यक है।

यदि प्रेक्षण $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_k$ अपनी तदनुसार बारम्बारता $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_k$ सहित दिये गये हो तो,

$$\text{मा० वि०} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{K} (f_i |X_i - A|) \qquad \ldots(4.5)$$

$$\text{जबकि} \quad \sum f_i = n$$

इस माप मे यह गुण तो अवश्य है कि यह सब प्रेक्षित मानो द्वारा परिकलित किया जाता है, किन्तु इसमे यह दोष भी है कि बिना समुचित कारण बताये इसके लिए निरपेक्ष मान का प्रयोग करते हैं।

टिप्पणी : यदि सूत्र (4 4) या (4.5) मे अचर A के स्थान पर बटन की माध्यिका को लिया जाए अर्थात् माध्यिका से विचलन लिए जाएँ तो माध्य-विचलन न्यूनतम होता है।

उदाहरण 4.3. उदाहरण 3.1 मे दिये हुए प्रेक्षणो के लिए माध्यिका से विचलन लेकर, माध्य विचलन निम्न प्रकार परिकलित कर सकते हैं :—

माध्यिका = 20 9 अर्थात् सूत्र (3 5) मे A = 20 9

अत

$$\text{M.D} = \tfrac{1}{7} (|15{\cdot}4 - 20\ 9| + |18\ 3 - 20\ 9| + |18\ 9 - 20\ 9|$$
$$+ |20\ 9 - 20\ 9| + |26\ 4 - 20\ 9| + |37\ 9 - 20\ 9|$$
$$+ |39\ 4 - 20\ 9|)$$

2. विचलन किसी प्रेक्षित मान X के किसी अचर C से अन्तर [X − C] को X का C से विचलन कहते हैं।
3. निरपेक्ष मान (Absolute value) : यदि किसी अन्तर को धनात्मक ही लिया जाए तो अन्तर के मान को निरपेक्ष मान कहते है। जैसे, (10 − 15) व (15 − 10) दोनों का निरपेक्ष मान 5 है।

$= \frac{1}{7}$ (5 5 + 2·6 + 2·0 + 0 + 5 5 + 17 0 + 18 5)
$= \frac{1}{7}$ (51 1)
= 7 30 मिलीग्राम प्रति 100 ग्राम मृदा

उदाहरण 4 4 मृदा म स्थिर पोटासियम की मात्रा जानने के हेतु विभिन्न स्थानो से प्रतिदर्श एकत्रित किये गये और उनके रासायनिक विश्लेषण द्वारा प्राप्त पोटासियम की मात्रा और स्थानो की सख्या इस प्रकार पायी गयी —

पोटासियम की मात्रा
(मिलीग्राम प्रति 100 ग्राम मृदा) *21 7, 20 8, 29 2, 30 9, 33 6,* [redacted] *5, 45 7*
स्थानो की सख्या 2, 3, 4, 5, 1, 4, 1

पोटास की मात्रा के लिए दिखाया गया है कि माध्यिका से माध्य विचलन, माध्य से माध्य विचलन की अपेक्षा कम है।

प्रेक्षणो को क्रम मे व्यवस्थित करके रख दिया।

पोटासियम की मात्रा x	स्थानों की सख्या f	सं० बारं०	संख्या fx
20 8	3	3	62 4
21 7	2	5	43 4
29 2	4	9	116 8
30 9	5	14	154 5
33 6	1	15	33 6
38 5	4	19	154 0
45 7	1	20	45 7
	20		610 4

माध्यिका के लिए $= \frac{n+1}{2} = \frac{20+1}{2} = 10\ 5$

माध्यिका $= 30\ 9$

और माध्य $= \frac{610\ 4}{20} = 30\ 52$

माध्यिका को A के रूप मे प्रयोग करने पर,

माध्य विचलन $= \frac{1}{20}$ (| 20 8 − 30 9 | × 3 + | 21 7 − 30 9 | × 2 + . .
+ | 45 7 − 30 9 | × 1)

$= \frac{1}{20}$ (103 4) = 5 17

माध्य को A के स्थान पर प्रयोग करने पर,

$$\text{माध्य विचलन} = \frac{1}{20}\left(|20\ 8 - 30\ 52| \times 3 + |21\ 7 - 30\ 52| \times 2 + \ldots + |45\ 7 - 30\ 52| \times 1\right)$$

$$= \frac{1}{20}(104\ 16) = 5\ 21$$

$5\ 21 > 5\ 17$ अत माध्यिका से माध्य की अपेक्षा, माध्य विचलन कम है।

प्रसरण

परिभाषा प्रेक्षणो के समुच्चय मे माध्य से विचलनों के वर्गों के योग के माध्य को प्रसरण कहते हैं।

माना कि समग्र मे N प्रेक्षण $X_1, X_2, X_3 \quad X_N$ हैं तो समग्र प्रसरण को σ^2 से सूचित करते हैं जहाँ

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(X_i - \mu)^2 \qquad \ldots (4\ 6)$$

$$= \frac{1}{N}\left\{\sum_{i=1}^{N} X_i^2 - \mu \sum_{i=1}^{N} X_i\right\} \qquad \ldots (4\ 6\ 1)$$

जबकि सूत्र (4 6) मे μ समग्र माध्य है।

मानक विचलन

प्रसरण के धनात्मक वर्ग-मूल को मानक विचलन कहते हैं।

(मानक विचलन) $\sigma = +\sqrt{\sigma^2}$

प्रतिदर्श प्रसरण : माना एक प्रतिदर्श के एककों पर प्रेक्षण $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$ हैं तो प्रतिदर्श प्रसरण s^2 को निम्न सूत्र द्वारा परिकलित करते हैं —

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 \qquad \ldots (4\ 7)$$

$$= \frac{1}{n-1}\left\{\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2\right\} \qquad \ldots (4\ 7\ 1)$$

प्रतिदर्श की स्थिति मे मानक विचलन $s = +\sqrt{s^2}$

विचरण-गुणांक

अब तक जितने भी माप दिये गये हैं उन सब की इकाई है। किन्तु कभी-कभी एक से अधिक समग्रों के विक्षेपण मापो की आपस मे तुलना करनी होती है। इन मापो की तुलना करना तभी सम्भव है जबकि विक्षेपण-मापो की इकाइयाँ एक सी हो किन्तु व्यवहार मे ऐसा बहुत कम अध्ययनो मे पाया जाता है। ऐसी स्थिति मे विचरण गुणांक अत्यन्त

उपयोगी है क्योंकि इसकी कोई इकाई नहीं होती है। किसी समुच्चय में चर के मानक विचलन और समान्तर माध्य के अनुपात को विचरण गुणांक कहते हैं। साधारणतया इस अनुपात को 100 से गुणा करके प्रतिशत में दिया जाता है। अत,

$$\text{विचरण गुणांक} = \frac{\text{मानक विचलन}}{\text{माध्य}} \times 100 \text{ प्रतिशत}$$

$$\text{या} \quad CV = \frac{\sigma}{\mu} \times 100 \text{ प्रतिशत} \qquad \ldots(4.8)$$

प्रतिदर्श के लिए विचरण-गुणांक निम्न सूत्र से ज्ञात कर सकते हैं —

$$c\ v = \frac{s}{\overline{X}} \times 100 \text{ प्रतिशत} \qquad \ldots(4.9)$$

विचरण-गुणांक तब ही लाभप्रद होगा जब माध्य धनात्मक हो।

उदाहरण 4.5 सात लारवी (Larva) के भार (मिलिग्राम में) दिये हुए हैं। माना कि यह एक समग्र के एकको पर प्रेक्षण हैं।

भार (मिलीग्राम) : 332, 337, 341, 330, 346, 328, 340

समग्र के (i) प्रसरण, (ii) मानक विचलन और (iii) विचरण गुणांक का परिकलन निम्न प्रकार किया जा सकता है —

माना कि भार चर X द्वारा निरूपित है और यहाँ N=7 है।

$\Sigma X_i = 2354$, $\overline{X} = 336.28$

$\Sigma X_i^2 = 791,874.00$

माध्य एक पूर्ण संख्या नहीं है अत (3.8.1) का प्रयोग करना उचित है।

प्रसरण,

$$\sigma^2 = \frac{1}{7}\left\{791874 - \frac{(2354)^2}{7}\right\}$$

$$= \tfrac{1}{7} \times 257.6$$

$$= 36.8$$

मानक विचलन,

$$\sigma = \sqrt{36.8}$$

$$= 6.07$$

विचरण गुणांक,

$$C\ V. = \frac{6.07}{336.2857} \times 100$$

$$= 1.805 \text{ प्रतिशत}$$

उदाहरण 4·6 : लारवी के एक समूह की लम्बाई नापी गयी। इस प्रकार प्राप्त लम्बाई (से० मी०) और लारवी की संख्याएँ निम्न थीं :—

लारवी की लम्बाई (से० मी०)	लारवी की संख्या
6·1	2
6·0	4
5·8	4
6·2	1
5·9	3

लारवी की लम्बाई के लिए प्रसरण व विचरण गुणांक का परिकलन निम्न प्रकार कर सकते हैं।

माना कि उपर्युक्त न्यास में लारवी की लम्बाईचर X और लारवी की संख्या बारम्बारता f द्वारा निरूपित है। प्रसरण के परिकलन के लिए सूत्र (4 7 1) का प्रयोग करना होगा। पहले निम्न सारणी तैयार करनी होती है :—

X	f	fX	fX^2
6 1	2	12 2	74·42
6 0	4	24 0	144 00
5 8	4	23 2	134·56
6 2	1	6·2	38 44
5 9	3	17·7	104 43
	$\sum_i f_i = 14$	$\sum_i f_i X_i = 83\ 3$	$\sum_i f_i X_i^2 = 495\ 85$

प्रसरण :

$$\sigma^2 = \frac{1}{14}\left\{495\ 85 - \frac{(83\ 3)^2}{14}\right\}$$

$$= \tfrac{1}{14}\{495\ 85 - 495\ 63\}$$

$$= \frac{\cdot 22}{14} = 0157$$

मानक विचलन :

$$\sigma = \sqrt{.0157} = \cdot 125$$

विचरण गुणांक

यहाँ $\bar{x} = \frac{83\ 3}{14}$

$= 5\ 95$

$\therefore CV = \frac{125}{5\ 95} \times 100$

$= 21$ प्रतिशत

उदाहरण 4 9 : एक लाक्षणिक अध्ययन (Clinical study) के अन्तर्गत सात वर्ष की आयु के बच्चो के भारो के वर्ग और सख्या निम्न सारणी के अनुसार थे —

भार [किलोग्राम]	बच्चों की सख्या
12–14	6
14–16	14
16–18	28
18–20	16
20–22	8
22–24	3
24–26	1
26–28	0
28–30	1

इन वर्गीकृत प्रेक्षणो के लिए बच्चो के भार का (i) प्रसरण, (ii) मानक विचलन, (iii) विचरण गुणांक ज्ञात करने के लिए दिये हुए वर्गों के मध्य मानो को चर X और बच्चो की सख्या को बारम्बारता f के रूप मे लेकर निम्न सारणी तैयार की गयी —

X	f	fX	fX^2
13	6	78	1014
15	14	210	3150
17	28	476	8092
19	16	304	5776
21	8	168	3528
23	3	69	1587
25	1	25	625
27	0	00	00
29	1	29	841
योग	77	1359	24613

अतः $\sum_i f_i = 77$, $\sum_i f_i X_i = 1359$, $\sum_i f_i X_i^2 = 24613$

(i) सूत्र (4.7.1) के अनुसार प्रसरण,

$$\sigma^2 = \frac{1}{77}\left\{ 24613 - \frac{(1359)^2}{77} \right\}$$

$$= \frac{1}{77}\{24613 - 23985 46\}$$

$$= \frac{627 54}{77}$$

$$= 8{\cdot}14$$

(ii) मानक विचलन :

$$\sigma = \sqrt{8{\cdot}14}$$

$$= 2{\cdot}85$$

(iii) विचरण गुणांक :

$$\mu = \frac{1359}{77}$$

$$= 17{\cdot}65$$

$$\therefore \text{ C.V.} = \frac{2{\cdot}85}{17 65} \times 100$$

$$= 16 14 \text{ प्रतिशत}$$

आघूर्ण

यदि प्रेक्षित मानो X_1, X_2, X_3 ...., X_m की बारम्बारताएँ क्रमशः f_1, f_2, f_3, ..., f_m हैं और A एक अचर है तो A के परित K वें आघूर्ण μ'_k की परिभाषा निम्न सूत्र से दी जाती है :—

$$\mu'_k = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{m} f_i (X_i - A)^k \qquad ....(4 10)$$

$$\text{जब कि } \sum_{i=1}^{m} f_i = N$$

यदि A के स्थान पर समग्र माध्य μ का प्रयोग किया जाए तो माध्य के परित आघूर्ण कहलाते हैं और उन्हें μ_k द्वारा निरूपित करते हैं ।

$$\mu_k = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{m} f_i (X_i - \mu)^k \qquad ....(4.11)$$

जब $k=1$ हो तो $\mu_1 = 0$

जब $k=2$ हो तो,

$$\mu_2 = \frac{1}{N} \sum_i f_i (X_i - \mu)^2 \qquad ....(4\ 12)$$

$$= \sigma^2$$

अतः माध्य के परित दूसरा घापूर्ण प्रसरण ही है।

समान्तर माध्य 'μ' के परित घापूर्णों और स्वेच्छ माध्य 'A' के परित घापूर्णों में सम्बन्ध —

$$\mu_k = \frac{1}{N} \sum_i f_i (X_i - \mu)^k$$

$$= \frac{1}{N} \sum_i f_i \{(X_i - A) - (\mu - A)\}^k$$

माना कि $\mu - A = d$

$$\therefore \mu_k = \frac{1}{N} \sum_i f_i \{(X_i - A) - d\}^k$$

$$= \frac{1}{N} \sum_i f_i \{(X_i - A)^k - \binom{k}{1} (X_i - A)^{k-1} d + \binom{k}{2} (X_i - A)^{k-2} d^2$$

$$+ .... + (-1)^r \binom{k}{r} (X_i - A)^{k-r} d^r + .. + (-1)^k d^k \}$$

या $$\mu_k = \frac{1}{N} \sum_i f_i (X_i - A)^k - \binom{k}{1} \frac{1}{N} \sum f_i (X_i - A)^{k-1} d +$$

$$\binom{k}{2} \frac{1}{N} \sum_i f_i (X_i - A)^{k-2} d^2 + \ . \ . + (-1)^r \binom{k}{r}$$

$$\frac{1}{N} \sum_i f_i (X_i - A)^{k-r} d^r + ... + (-1)^k d^k \qquad ....(4\ 13$$

(4 10) की सहायता से,

$$\mu_k = \mu_k' - \binom{k}{1} \mu_{k-1}' d + \binom{k}{2} \mu_{k-2}' d^2 + ... + (-1)^r \binom{k}{r}$$

$$\mu_{k-r}' d^r + ... + (-1)^k d^k \qquad ....(4\ 13\ 1)$$

जबकि $$\mu_1' = \frac{1}{N} \sum_i f_i (X_i - A) = \frac{1}{N} \sum_i f_i X_i - \frac{1}{N} \sum_i f_i A$$

$$= \mu - A = d \qquad (\because \sum_i f_i = N)$$

$$\therefore \mu_k = \mu_k' - \binom{k}{1}\mu_{k-1}'\mu_1' + \binom{k}{2}\mu_{k-2}'(\mu_1')^2 + \dots + (-1)^r \binom{k}{r}\mu_{k-r}'(\mu_1')^r + \dots + (-1)^k(\mu_1')^k \quad \text{....(4.13.2)}$$

सूत्र (4.11) में जब $k=0$ हो तो,

$$\mu_0 = \frac{1}{N}\sum_i f_i (X_i - \mu)^0$$

$$= \frac{1}{N}\sum_i f_i$$

$$= 1$$

सूत्र (4.13.2) में k के मान 1, 2, 3,......, रखने पर विभिन्न क्रमों के आघूर्ण प्राप्त हो जाते हैं।

$$\mu_1 = \mu_1' - \binom{1}{1}\mu_0'\mu_1'$$
$$= \mu_1' - \mu_1'$$
$$= 0$$
$$\mu_2 = \mu_2' - \binom{2}{1}\mu_1'\mu_1' + \binom{2}{2}\mu_0'(\mu_1')^2$$
$$= \mu_2' - \mu_1'^2$$

इसी प्रकार $\mu_3 = \mu_3' - 3\mu_2'\mu_1' + 2\mu_1'^3$

और $\mu_4 = \mu_4' - 4\mu_3'\mu_1' + 6\mu_2'\mu_1'^2 - 3\mu_1'^4$ आदि।

शेपर्ड-संशोधन

वर्गीकृत बारम्बारता बंटन द्वारा आघूर्णों का परिकलन करने में कुछ त्रुटि आ जाती है। इसका कारण यह है कि इनके परिकलन में यह कल्पना की गयी है कि बारम्बारता वर्ग अन्तरालों के मध्य-बिन्दुओं पर केन्द्रित है। किन्तु यह कल्पना पूर्णतया सत्य नहीं है। अतः शेपर्ड (1897–1907) ने विभिन्न क्रमों के आघूर्णों के लिए अलग-अलग शुद्धियाँ बताई थीं इनमें से कुछ निम्न प्रकार हैं —

माध्य के परित दूसरे आघूर्ण को μ_2 द्वारा निर्दिष्ट करते हैं जो कि प्रसरण है। शेपर्ड ने सिद्ध किया कि शुद्ध प्रसरण ज्ञात करने के लिए शुद्धि $I^2/12$ का प्रयोग करना होता है जबकि I का मान वर्ग अन्तराल के समान होता है। इस शुद्धि को परिकलित प्रसरण में से घटा देने पर शुद्ध प्रसरण ज्ञात हो जाता है।

शुद्ध प्रसरण $$\mu_2^c = \mu_2 - \frac{I^2}{12} \quad \text{....(4.14)}$$

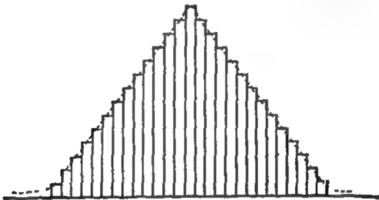
इसी प्रकार चौथे आघूर्ण का शुद्ध मान,

$$\mu_4^c = \mu_4 - \tfrac{1}{2}\mu_2 \times I^2 + \tfrac{7}{240} \times I^4 \quad \text{....(4.15)}$$

आदि।

बारम्बारता-बटन वक्र

किसी चर का बारम्बारता बटन दिया गया है और यदि इस चर के मान या वर्ग अन्तराल एक दूसरे से निकट हैं तो दण्ड चित्र या बारम्बारता आयत चित्र में दण्डों के शिखर बिन्दुओं को या आयतों के शिखर के मध्य बिन्दुओं को मिला देने पर बारम्बारता बहुभुज एक सतत वक्र का रूप धारण कर लेता है। इस वक्र को बारम्बारता-बटन-वक्र कहते हैं। अतः एक बारम्बारता वक्र में अक्ष के किसी मान बिन्दु पर की कोटि इस अक्ष मान (x मान) की बारम्बारता प्रदर्शित करती है। किन्हीं दो अक्ष मानों पर कोटि के बीच का अर्थ समय में उन दो मानों के बीच व्यक्तियों की संख्या का अनुमान बनाना है।

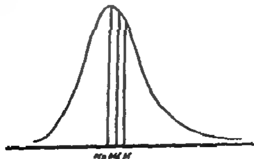


चित्र 4.1 आयत चित्र जो वक्र की ओर प्रवृत्त है

इस वक्र के रूप, गुण परिसर आदि के अनुसार ही चर के बटन का निश्चय किया जाता है।

विषम बटन वक्र

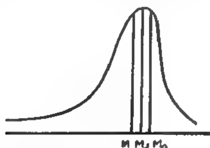
यदि बारम्बारता बटन वक्र के सिरे समसित न हों तो ऐसे वक्र को विषम बटन वक्र कहते हैं। इसका अभिप्राय है कि वक्र का झुकाव किसी एक ओर अधिक और दूसरी ओर कम हो सकता है। इस बात को पाठक इस प्रकार भी समझ सकते हैं कि वक्र का एक सिरा अधिक लम्बा और दूसरा सिरा छोटा हो सकता है।



चित्र 4.2 धनात्मक विषम वक्र

यदि बटन का माध्य, बहुलक से बड़ा हो अर्थात् वक्र में लम्बा सिरा दाहिनी ओर हो तो ऐसी विषमता को धनात्मक विषमता कहते हैं। ऐसी स्थिति तब उत्पन्न होती है जब बारम्बारता बटन में प्रेक्षणों के लघु मानों की सख्या अधिक हो तथा बड़े मानों की सख्या कम हो।

उपर्युक्त स्थिति के विपरीत अर्थात् वक्र का वाम सिरा अधिक लम्बा और दाहिना सिरा छोटा होने पर वक्र को ऋणात्मक विषम कहते हैं। ऐसी स्थिति तब उत्पन्न होती है जब माध्य से बहुलक बड़ा होता है। जब प्रेक्षणों के समुच्चय में लघु मान वाले प्रेक्षणों की सख्या कम और बृहत् मान वाले प्रेक्षणों की सख्या अधिक होती है।



चित्र 4 3 ऋणात्मक-विषम वक्र

एक आनुभविक नियम है कि माध्यिका माध्य और बहुलक के बीच में स्थित होती है और माध्य, माध्यिका तथा बहुलक के बीच निम्न सम्बन्ध दिया जा सकता है —

माध्य – बहुलक) =3 (माध्य – माध्यिका) ...(4 16)

वक्र में विषमता धनात्मक है या ऋणात्मक, यह वक्र को चित्रित करके जाना जा सकता है। किन्तु विषमता के आकार को जानने के लिए सख्यात्मक मान भी ज्ञात किये जा सकते हैं। कार्ल पियर्सन (Karl Pearson) ने वैषम्य-गुणांक (Coefficient of skewness) ज्ञात करने के लिए निम्नांकित सूत्र बताया है :—

$$\text{वैषम्य-गुणांक} = \frac{\text{माध्य} - \text{बहुलक}}{\text{मानक विचलन}} \qquad ....(4\ 17)$$

इस सूत्र के लिए माध्य, बहुलक व मानक विचलन का परिकलन करना होता है। जब माध्य > बहुलक तो धनात्मक विषमता और माध्य < बहुलक तो ऋणात्मक विषमता होती है।

यदि मानक विचलन ज्ञात करने में किसी प्रकार की कठिनाई हो तो वैषम्य गुणांक को चतुर्थकों की सहायता से निम्न सूत्र द्वारा ज्ञात कर सकते हैं। वैषम्य-गुणांक के लिए यह सूत्र प्रो० बाऊले (Prof Bowley) ने दिया है ·—

$$\text{वैषम्य-गुणांक} = \frac{Q_3 + Q_1 - 2Q_2}{Q_3 - Q_1} \qquad ...(4\ 18)$$

जबकि सूत्र (4 18) में Q_1, Q_2, Q_3 क्रमश. पहला, दूसरा और तीसरा चतुर्थक है। वैषम्य-गुणांक को आघूर्णों की सहायता से निम्न सूत्र द्वारा ज्ञात कर सकते हैं —

$$(\text{वैषम्य-गुणाक})\ \beta_1 = \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3} \qquad ...(4\ 19)$$

ऊपर के सूत्रों से स्पष्ट है कि वैषम्य-गुणाक एक शुद्ध संख्या है अर्थात् इसकी कोई इकाई नहीं होती है क्योंकि सूत्र के सभी व्यजको म अश व हर की इकाई एक ही है। वैषम्य-गुणाक का मान जितना अधिक होता है उतनी ही (+ve) या (−ve) विषमता अधिक होती है। यदि वक्र सममित हो तो वैषम्य-गुणाक शून्य होता है और इस स्थिति मे निम्न सम्बन्ध सत्य होते है —

माध्य = माध्यिका = बहुलक

$$(Q_3 - Q_2) = (Q_2 - Q_1)$$

और $\mu_3 = 0$

ककुदता (Kurtosis) —ककुदता से एक-बहुलक बारम्बारता वक्र की शिखरता (peakedness) के अधिक या कम होने के विषय म ज्ञान प्राप्त होता है। ककुदता को कार्ल-पियर्सन ने सन् 1906 मे निकाला और इसके लिए निम्न माप दिया —

$$(\text{ककुदता-गुणाक})\ \beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} \qquad (4\ 20)$$

जहाँ μ_4 व μ_2 क्रमश माध्य के परित चौथे व दूसरे आघूर्ण हैं। अधिक शिखरित वक्र को तुगककुदी (leptokurtic) वक्र कम शिखरित वक्र को सपाटककुदी (platykurtic) वक्र और सामान्य शिखरित वक्र को मध्यककुदी (mesokurtic) वक्र कहत है। इन तीन प्रकार के वक्रो के लिए β_2 के मान क्रमश इस प्रकार हैं —

$\beta_2 > 3$, $\beta_2 < 3$ और $\beta_2 = 3$

यह सदेहपूर्ण है कि कोई एक अनुपात शिखरता का उपयुक्त माप हो।

उदाहरण 4.8 एक डेरी फार्म पर 13 गायो के दूध का प्रति-दिन उत्पादन निम्नांकित पाया गया —

दूध का उत्पादन	13 7, 14 2, 15 4, 14 8, 17 2, 19 3
(लिटर प्रति-दिन)	17 7, 18 4, 18 6, 10 6, 10 8, 11 8, 12 5

इस दूध उत्पादन सम्बन्धी न्यास का वैषम्य गुणाक ज्ञात करने के लिए हम इन प्रेक्षणो द्वारा माध्य के परित दूसरे व तीसरे आघूर्ण ज्ञात करते है।

माना कि दूध का उत्पादन चर X द्वारा निरूपित है।

अत $\sum_{i} X_i = (13\ 7 + 14\ 2 + \cdots\cdots\cdots + 12\ 5)$

$= 195\ 0$

$\mu = \frac{195\ 0}{13} = 15\ 0$ लिटर प्रति दिन।

क्योंकि माध्य एक यथार्थ एक पूर्णांक है माध्य से विचलन लेकर आघूर्णों μ_2 व μ_3 का परिकलन सुगम है। इन आघूर्णों को ज्ञात करने के लिए निम्न सारणी बनाना लाभप्रद है —

X	$(X-\mu)$	$(X-\mu)^2$	$(X-\mu)^3$
13.7	−1.3	1.69	−2.1970
14.2	−0.8	0.64	−0.5120
15.4	0.4	0.16	0.0640
14.8	−0.2	0.04	−0.0080
17.2	2.2	4.84	10.6480
19.3	4.3	18.49	79.5070
17.7	2.7	7.29	19.6830
18.4	3.4	11.56	39.3040
18.6	3.6	12.96	46.6560
10.6	−4.4	19.36	−85.1840
10.8	−4.2	17.64	−74.0880
11.8	−3.2	10.24	−32.7680
12.5	−2.5	6.25	−15.6250
195.00	00	111.16	−14.44

सूत्र [4.11] की सहायता से,

$$\mu_2=\frac{1}{13}\times 111.16$$

$$=8.55$$

$$\mu_3=\frac{1}{13}[-14.44]$$

$$=-1.11$$

अतः सूत्र [4.18] द्वारा,

$$[\text{वैषम्य-गुणांक}] \quad B_1=-\frac{1.11}{[8.55]^{3/2}}$$

$$=-\frac{1.11}{25}$$

$$=-.044$$

वैषम्य गुणांक का मान अतिलघु है अतः बारंबारता वक्र लगभग सममित है।

उदाहरण 4·9 किसी चर के बारंबारता बंटन के लिए निम्न चतुर्थक ज्ञात हैं —

$$Q_1=21{\cdot}8,\ Q_2=40{\cdot}0 \text{ और } Q_3=56$$

वैषम्य गुणांक, सूत्र [4·18] की सहायता से निम्न प्रकार ज्ञात कर सकते हैं —

$$\text{वैषम्य गुणांक}=\frac{56+21{\cdot}8-2\times40}{56-21{\cdot}8}$$

$$=-\frac{2{\cdot}2}{34{\cdot}2}=-{\cdot}064$$

वैषम्य-गुणांक का मान अतिलघु है, अतः बंटन वक्र लगभग सममित है।

न्यास का संकेतीकरण

नियम 1 यदि किसी न्यास के प्रत्येक प्रेक्षण में से एक अचर मान घटा दें तो जो अंक प्राप्त होते हैं उनके द्वारा परिकलित प्रसरण वही होता है जो कि मूल प्रेक्षणों द्वारा परिकलित प्रसरण होता है।

उपर्युक्त नियम से स्पष्ट पता चलता है कि प्रेक्षणों में से अचर घटाने का प्रसरण पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता है। इस नियम को इस प्रकार सिद्ध कर सकते हैं.

प्रमाण माना कि चर X पर प्रेक्षणों में से एक अचर C घटाया गया है। इन सांकेतिक प्रेक्षणों द्वारा प्रसरण निम्न प्रकार होगा :—

	मूल प्रेक्षण X	सांकेतिक प्रेक्षण $X-C=X'$
	X_1	$X_1-C=X_1'$
	X_2	$X_2-C=X_2'$
	X_3	$X_3-C=X_3'$
	⋮	⋮ ⋮
	X_i	$X_i-C=X_i'$
	⋮	⋮ ⋮
	X_N	$X_N-C=X'_N$
योग	$\sum_i X_i$	$\sum_i(X_i-C)=\sum X_i'$
माध्य	μ	$\mu-C=\mu'$

मूल प्रेक्षणों का प्रसरण,

$$\sigma_x^2=\frac{1}{N}\sum_i (X_i-\mu)^2$$

जबकि $i=1, 2, 3, \ldots, N$

सांकेतिक प्रेक्षणो द्वारा प्रसरण ज्ञात करने मे X_i' के लिए (X_i-C) और μ' के लिए माध्य $(\mu-C)$ का सूत्र $\sigma_{x'}^2 = \frac{1}{N} \sum_{1} (X_i'-\mu')^2$ मे प्रयोग करना होगा ।

$$\sigma_{x'}^2 = \frac{1}{N} \sum_{1} \left\{(X_i-C)-(\mu-C)\right\}^2$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{1} (X_i-\mu)^2$$

$$= \sigma_x^2 \qquad (4\cdot21)$$

सम्बन्ध [4·21] से स्पष्ट है कि अचर घटाने का प्रसरण पर कोई प्रभाव नही पड़ता है ।

जो नियम अचर घटाने के लिए दिया गया है वही नियम प्रत्येक प्रेक्षण मे अचर जोड़ने पर भी सत्य रहता है ।

नियम 2 यदि न्यास के प्रत्येक प्रेक्षण को किसी अचर मान से गुणा कर दें तो सांकेतिक प्रेक्षणो द्वारा परिकलित प्रसरण, मूल प्रेक्षणो द्वारा परिकलित प्रसरण और अचर के वर्ग के गुणनफल के समान होता है ।

इस नियम को निम्न प्रकार सिद्ध कर सकते है —

प्रमाण माना कि चर X पर प्रेक्षणो को अचर मान a से गुणा कर दिया है । इन सांकेतिक प्रेक्षणो द्वारा प्रसरण का परिकलन किया गया है ।

	मूल प्रेक्षण (X)	सांकेतिक प्रेक्षण $aX = X'$
	X_1	$aX_1 = X_1'$
	X_2	$aX_2 = X_2'$
	X_3	$aX_3 = X_3'$
	⋮	⋮ ⋮
	X_i	$aX_i = X_i'$
	⋮	⋮ ⋮
	X_N	$aX_N = X'_N$
योग	$\sum_{1} X_i$	$a\sum_{1} X_i = \sum_{1} X_i'$
माध्य	μ	$a\mu = \mu'$

मूल प्रेक्षणों द्वारा प्रसरण,

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{N}\sum_i (X_i-\mu)^2$$

सांकेतिक प्रेक्षणों द्वारा प्रसरण परिकलित करने में सूत्र

$$\sigma_{x'}^2 = \frac{1}{N}\sum_i (X_i'-\mu')^2$$

में X_i' के स्थान पर aX और μ' के स्थान पर $a\mu$ रखने पर प्रसरण निम्न होता है —

$$\sigma_{x'}^2 = \frac{1}{N}\sum_i (aX_i-a\mu)^2$$

$$= a^2\frac{1}{N}\sum_i (X_i-\mu)^2$$

$$= a^2\ \sigma_x^2 \qquad (4\ 22)$$

सम्बन्ध [4 22] नियम 2 को सिद्ध करता है।

यदि अचर मान a से प्रेक्षणा को भाग दिया गया हो तो सांकेतिक प्रेक्षणों और मूल प्रेक्षणों द्वारा परिकलित प्रसरण में निम्नांकित सम्बन्ध होता है।

$$\sigma_{x'}^2 = \frac{1}{a^2}\sigma_x^2 \qquad [4\ 23]$$

संकेतीकरण करने से परिकलन करने में सुविधा हो जाती है। सांकेतिक न्यास द्वारा प्रसरण निकालने के पश्चात् सम्बन्ध [4 20] या [4 21] का आवश्यकतानुसार प्रयोग करके मूल प्रेक्षणों पर आधारित प्रसरण सुगमता से ज्ञात किया जा सकता है। यदि आवश्यकता हो तो दोनों संकेतीकरणों का एक साथ भी प्रयोग कर सकते हैं।

उदाहरण 4 10 एक प्रयोग में 11 सप्ताहों में प्लाज्मा-कोलेस्टेरॉल की निम्न मात्राएँ पायी गयी।

प्लाज्मा कोलेस्टेरॉल

[मिलीग्राम प्रति 100 मि लिटर] 220, 250, 275, 205, 200, 230, 250, 260, 255, 260, 250

इन प्रेक्षणों द्वारा प्रसरण ज्ञात करने के लिए संकेतीकरण करना लाभदायक है। माना कि अचर मान 200 है और इसको प्रत्येक प्रेक्षण में से घटा दिया गया है। अब प्रसरण का परिकलन निम्न प्रकार कर सकते हैं —

सांकेतिक प्रेक्षण (X') (प्लाज्मा कोलेस्टरॉल)	X'^2
20	400
50	2500
75	5625
5	25
0	00
30	900
50	2500
60	3600
55	3025
60	3600
50	2500
455	24675

(i) $\mu' = \frac{455}{11} = 41\ 36$

$\mu = \mu' + 200 = 41\ 36 + 200$
$= 241\ 36$ मिलीग्राम प्रति 100 मिलीलिटर

(ii) $\sigma_{X'}^2 = \frac{1}{11} \quad (24675\ 00 - 18820\ 45)$

$= \frac{1}{11} \quad (5854\ 55)$

$= 532\ 23$ (मिलीग्राम प्रति 100 मिली लिटर)^2

नोट : यदि मूल प्रेक्षणो द्वारा प्रतिदर्श प्रसरण का परिकलन करें तो उसका मान भी 532 23 ही होगा। पाठक चाहें तो इसकी पुष्टि स्वय कर सकते हैं।

उदाहरण 4 11 : राजस्थान के कुछ खेतो मे गेहूँ के पौधो की सख्या प्रति हैक्टर देखी गयी जो कि निम्न प्रकार थी —

800 000,	76,0000,	120,0000,	95,0000
210,0000,	180,0000,	110,0000,	65,0000

इन प्रेक्षणा द्वारा माध्य पौधो की सख्या तथा पौधो की सख्या के लिए प्रसरण ज्ञात करना हो तो यहाँ 10^5 अर्थात् 10,0000 द्वारा भाग करना अत्यधिक लाभप्रद है। अन्यथा

इन सख्याओ को वर्ग करके लिखना और इनके द्वारा परिकलन करना कठिन हो जायेगा। यहाँ अचर $a=10^5$ से प्रत्येक सख्या को भाग दे दिया गया और फिर प्रसरण ज्ञात किया गया है।

सांकेतिक पौधों की संख्या X'	X'^2
8.0	64.00
7.6	57.76
12.0	144.00
9.5	90.25
21.0	441.00
18.0	324.00
11.0	121.00
6.5	42.25
93.6	1284.26

यहाँ $n=8$

$$\therefore \bar{X}' = \frac{96.6}{8} = 11.6$$

$$\bar{X} = 11.7 \times 10^5 = 117,0000$$

$$\sigma_{x'}^2 = \frac{1}{8}\left\{1284.26 - \frac{(93.6)^2}{8}\right\}$$

$$= \frac{1}{8}\left\{1284.26 - 1095.12\right\}$$

$$= \frac{1}{8} \times 189.14$$

$$= 23.52$$

$$\therefore \sigma_x^2 = a^2 \sigma_{x'}^2$$

$$\sigma_x^2 = (10^5)^2 \times 23.52$$

$$= 2352 \times 10^8$$

उदाहरण 4.12 : विभिन्न धान्यो के लिए अनुकूलतम नमी, खेत मे मिट्टी की लगभग समान गहराई पर मापी गयी और इस प्रकार निम्नांकित प्रेक्षण प्राप्त हुए।

सस्य	अनुकूलतम नमी
मक्का	0 55
गेहूँ	1 50
गन्ना	0 70
आलू	0 30
तम्बाकू	0 30
मूली	0 20
शलजम	0 20
चुकन्दर	0 20
प्याज	0 65
बरसीम	0 35

इन प्रेक्षणो द्वारा अनुकूलतम नमी के लिए यदि विचरण गुणाक ज्ञात करना हो तो हमे मानक विचलन एव माध्य ज्ञात करने होंगे। इस न्यास का सकेतीकरण करना लाभप्रद होगा अत इन प्रेक्षणों को 100 से गुणा कर दिया और फिर प्रत्येक प्रेक्षण में से 20 घटा दिये। यदि अनुकूलतम नमी को चर X द्वारा निरूपित कर दें तो सांकेतिक चर $X' = (100X-20)$ होगा। अत

X'	X'^2
35	1225
130	16900
50	2500
10	100
10	100
00	00
00	00
00	00
45	2025
15	225
295	23075

$$\therefore \quad \overline{X}' = \frac{295}{10} = 29.5$$

$$\therefore \quad \overline{X} = (\overline{X}' + 20)/100$$

$$= \frac{29.5 + 20}{100} = 495$$

इसी प्रकार $\sigma_{x'}{}^2 = \frac{1}{10}\left\{23075 - \frac{(295)^2}{10}\right\}$

$$= \frac{1}{10}\left\{23075 - 8702.5\right\}$$

$$= \frac{1}{10}(14372.5)$$

$$= 1437.25$$

$$\therefore \quad \sigma_x{}^2 = \frac{1}{(100)^2}\sigma_{x'}{}^2$$

$$= \frac{1}{100,00} \times 1437{\cdot}25$$

$$= 0.1437$$

$\therefore$ S D (X) = 0.38

विचरण गुणांक

$$C\ V. = \frac{0.38}{0.495} \times 100 \text{ प्रतिशत}$$

$$= 76.76$$

इस उदाहरण में सरलीकरण, दशमलव को प्रेक्षणों से हटाने और पूर्णांकों को लेकर परिगणन करने की दृष्टि से अच्छा है। यहाँ केवल एक अचर मान को घटाने व अन्य अचर मान से गुणा करने का सरलीकरण एक साथ किया गया है। उदाहरण पाठकों को सरलीकरण का प्रयोग करने की विधि समझाने के हेतु ही दिये गये हैं।

पूर्णांकन

जब कभी प्रेक्षित या परिकलित संख्या पूर्णांक नहीं हो और उसे कुछ दशमलव तक ही देना चाहें तो इस संख्या में दशमलव की इच्छित अन्तिम संख्या का उसके बाद में आने

वाली सख्या के अनुसार, सन्निकटन करना होता है । इस सन्निकटन करने को पूर्णांकन कहते हैं । इसके लिए नियम इस प्रकार है ।

यदि दशमलव की अन्तिम सख्या के बाद की सख्या 5 से अधिक हो तो अन्तिम सख्या को 1 से बढा देते हैं और बाद की सख्या 5 से कम होने की स्थिति मे अन्तिम सख्या मे कोई परिवर्तन नही करते है । किन्तु जब दशमलव की इच्छित अन्तिम सख्या के बाद की सख्या 5 हो तो सन्निकटन इस अन्तिम दशमलव सख्या पर निर्भर करता है । यदि यह सम है तो सख्या इसमे कोई परिवर्तन नही करते और यदि यह सख्या विषम है तो इसे 1 बढा देते हैं । पूर्णांकन के प्रयोग से परिकलन मे त्रुटि बहुत कम हो जाती है । अत इसे सदैव प्रयोग मे लाना चाहिए ।

उदाहरण 4·15 माना कि सख्या 25 368 को दो दशमलव तक ही लिखना है । एक दशमलव के बाद की दूसरी सख्या 6 है किन्तु इससे अगली सख्या 8 है । जो कि 5 से अधिक है अत इस सख्या को दो दशमलव तक 25 37 लिखना होता है । इसी प्रकार यदि सख्या 25 363 हो तो दो दशमलव तक सख्या को लिखने मे 25 36 ही लिखना होगा क्योंकि 6 के बाद की सख्या 3 $<$ 5 है ।

यदि सख्या 25 365 हो तो यहाँ इसे दो दशमलव तक 25 36 ही लिखना होगा क्योंकि दूसरी दशमलव सख्या 6 है जो कि सम है ।

यदि सख्या 25 375 हो तो इसे दो दशमलव तक 25 38 लिखना होगा क्योंकि 5 से पूर्व अक 7 है जो कि विषम सख्या है ।

प्रश्नावली

1 निम्न शब्दो की परिभाषा दीजिये ।

1 मानक विचलन

2 माध्य के परित आघूर्ण

3 माध्य विचलन

4 मानक त्रुटि

2 सकेतीकरण का प्रसरण पर क्या प्रभाव पडता है ? स्पष्ट रूप में समझाइये ।

3 सोने का भाव प्रति 10 ग्राम एक सप्ताह मे दिनो के अनुसार नीचे दिया गया है – इस सप्ताह के भावो का परिसर परिकलित कीजिये ।

सोमवार,	मगलवार,	बुधवार,	बृहस्पतिवार,	शुक्रवार,	शनिवार
249 50,	247 80,	250 60,	248 50,	252 40,	256 0

4 निम्न बारम्बारता बटन के लिए (1) चतुर्थक-विचलन, (2) वैषम्य-गुणाक ज्ञात कीजिये —

वर्ग अन्तराल	बारम्बारता
5—9	6
9—13	10
13—17	18
17—21	25
21—25	15
25—29	11
29—33	10
33—37	5
37—41	2

5 दो निर्माता कम्पनियों के वेतन के बटन सम्बन्धी सूचनाएँ निम्न प्रकार हैं —

	क—1 [रुपयों में]	क—2 [रुपयों में]
माध्य	75	80
माध्यिका	72	70
बहुलक	67	62
चतुर्थक	62 और 78	65 और 85
मानक-विचलन	13	17

इन दो बटनों सम्बन्धी तथ्यों की तुलना कीजिये ।

[एम० काम० दिल्ली, 1965]

6 निम्न बटन का माध्य के परित दूसरा घापूर्ण तथा विचरण-गुणांक ज्ञात कीजिये —

चर [X]	0,	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8
बारम्बारता	1,	9,	26,	59,	72,	52,	29,	7,	1

[एम० काम० दिल्ली 1965]

[उत्तर $\mu_2 = 1\ 98$, C. V=35 5]

7 प्रथम तीन घापूर्ण, जो कि स्वेच्छ मान 2 के परित लिए गये हैं, क्रमश 2, 10, 30 हैं । शून्य के परित पहले तीन घापूर्ण ज्ञात कीजिये और यह भी सिद्ध कीजिये कि इस बटन का प्रसरण 6 है । [आई० सी० डब्लू० ए० 1964].

[उत्तर $\mu_1 = 5$, $\mu_2 = 31$, $\mu_3 = 201$]

8 एक बारम्बारता बटन के लिए निम्न सूचना उपलब्ध है —

विचरण-गुणाक $= 5$

मानक विचलन $= 2$

कार्ल पियर्सन का वैषम्य-गुणाक $= 0\ 5$

बटन का माध्य व बहुलक ज्ञात कीजिये । [बी० काम०, बम्बई, 1967]

[उत्तर माध्य $= 40$, बहुलक $= 39$]

9 दो प्रतिदर्शों के लिए निम्न मान उपलब्ध है —

प्रतिदर्श I	प्रतिदर्श II
$n_1 = 10$	$n_2 = 12$
$\sum_{j} X_{1} = 70\ 0$	$\sum_{j} X_{j}^{2} = 46$
$\sum_{j} X_{1}^{2} = 754\ 0$	$\sum_{j} X_{j}^{2} = 318$

इन दोनों प्रतिदर्शों का सम्मिलित प्रसरण ज्ञात कीजिये ।

☐ ☐ ☐

5 प्रारम्भिक प्रायिकता सिद्धांत

प्रायिकता का प्रयोग हम दिन प्रतिदिन के कार्यों में करते हैं। अनेक कथन सुनने मे आते हैं जिनमे प्रायिकता का बोध होता है, जैसे, शायद इस वर्ष मैं कक्षा मे प्रथम आऊँगा, चार व्यक्तियो के ताश के खेल मे शायद इस बार मेरे पास चारो इक्की [aces] आयें, एक सिक्के को चार बार उछालने पर सम्भवत तीन बार शीर्ष [head] ऊपर आयेगा आदि। इन सब कथनो मे किसी घटना की अनिश्चितता का भाव प्रकट होता है। किन्तु किसी अनिश्चितता का संख्यात्मक रूप मे परिकलन करना ही प्रायिकता सिद्धात है।

संयोग-प्रधान खेलो के निमित्त किसी घटना की प्रायिकता ज्ञात करने के हेतु, गणितज्ञ पास्कल [Pascal], बरनूली 1713 [Bernoulli 1713], बेज 1764 [Bayes, 1764] और कार्ल पियर्सन [Karl Pearson] ने प्रायिकता सिद्धात को विधि पूर्वक दिया। यह विषय आज सांख्यिकी का मुख्य अंग बन गया है।

प्रायिकता सिद्धान्त का प्रारम्भिक वर्णन इस अध्याय मे दिया गया है। यह एक गूढ़ विषय है, फिर भी इसके प्रारम्भिक सिद्धान्तो को सुगमता से समझा जा सकता है। प्रायिकता की परिभाषा तथा सैद्धान्तिक विवरण देने से पूर्व इससे सम्बद्ध मुख्य-मुख्य पारिभाषिक शब्दो का वर्णन दिया गया है।

घटना —किसी यादृच्छिक प्रयोग[1] के परिणाम जिनमे कि कुछ निश्चित गुण विद्यमान हो, घटना कहलाते हैं। घटना को इस प्रकार स्पष्ट समझ सकते हैं। प्रतिदर्श समष्टि के प्रत्येक अंश [element] मे या तो निर्धारित गुण होते हैं या नही होते हैं। वे सब बिन्दु जिनमे ये गुण होते हैं एक समुच्चय का गठन करते हैं। अत प्रतिदर्श समष्टि का प्रत्येक उपसमुच्चय [*subset*] *जिसमे निश्चित गुण विद्यमान हैं, एक घटना कहलाता है।*

यदि घटनाएँ इस प्रकार हैं कि किसी एक घटना के घटित होने पर अन्य घटनाओ का घटित होना असम्भव हो तो इन घटनाओ को परस्पर अपवर्जी [mutually exclusive] घटनाएँ कहते हैं। जैसे एक सिक्के को उछालें तो यदि शीर्ष ऊपर की ओर आता है तो सन् [tail] ऊपर की ओर नही आ सकता है या सन् ऊपर आने पर शीर्ष ऊपर नहीं आ सकता है। अत शीर्ष ऊपर आने व सन् ऊपर आने की घटनाएँ परस्पर अपवर्जी हैं।

माना कि दो घटनाएँ A और B हैं। A और B के प्रतिदर्श बिन्दुओ द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र इस प्रकार हैं कि इनमे एक भी बिन्दु सार्व नही है जैसा कि चित्र [5 1] मे दिखाया

1 यादृच्छिक प्रयोग [Random experiment) : जिस प्रयोग के हल परिणामों का निश्चित रूप से पूर्वकथन सम्भव न हो किन्तु उसके समस्त सम्भव हल परिणामों को बताना सम्भव हो और यह प्रयोग एक सी परिस्थितियो में बारम्बार किया जा सकता हो, तो ऐसे प्रयोग को यादृच्छिक प्रयोग कहते हैं।
हल-परिणाम (outcome) किसी प्रयोग के प्रत्येक सम्भव परिणाम को हल-परिणाम कहते हैं।

गया है। यदि A और B मे कुछ बिन्दु सार्व हैं तो इस स्थिति को चित्र [5 2] मे दिखाया गया है।



चित्र 5–1 परस्पर अपवर्जी घटनाओ A व B का प्रदर्शन



चित्र 5–2 घटनाओ A व B मे सार्व बिन्दुओ के क्षेत्र का प्रदर्शन

घटना $A \cap B$ (या AB) उन बिन्दुओ को प्रदर्शित करती है जो A और B मे सार्व हैं अर्थात् A और B दोनो घटनाएँ एक साथ घटित होती हैं। यदि $A \cap B = \phi$ हो तो घटनाएँ परस्पर अपवर्जी कहलाती हैं।

दो घटनाओ के जोड को $A \cup B$ द्वारा प्रदर्शित करते हैं। इसका अभिप्राय है कि या तो घटना A या घटना B या दोनो घटनाएँ एक साथ घटित होती हैं। $A \cup B$ मे उन प्रतिदर्श बिन्दुओ को छोडकर जो A या B किसी मे नही है अन्य सब बिन्दु सम्मिलित होते है। इसी प्रकार घटना $A \cap B'$ का अभिप्राय है कि घटना A घटित होती है किन्तु घटना B घटित नही होती है। इन सकेतनो को दो से अधिक घटनाओ के लिए व्यापकीकरण किया जा सकता है। यदि प्रत्येक घटना के घटित होने की सम्भावना समान हो तो घटनाएँ समप्रायिक कहलाती हैं। इस परिभाषा को उदाहरण द्वारा इस प्रकार समझा जा सकता है। यदि एक सिक्के को उछालें तो सिक्का या तो शीर्ष (head) की ओर से गिरेगा या सन् (tail) की ओर से गिरेगा। यहाँ शीर्ष या सन् के ऊपर की ओर आने की सम्भावना समान है। अत ये घटनाएँ समप्रायिक हैं।

प्रायिकता की चिरप्रतिष्ठित परिभाषा

माना कि एक प्रयोग के परस्पर अपवर्जी समस्त सम्भव परिणाम N हैं और ये सभी परिणाम समप्रायिक हैं। यदि इनमे से n परिणाम किसी घटना E के लिए अनुकूल (favourable) हैं तो घटना E की प्रायिकता,

$$P(E) = \frac{n}{N} \qquad \text{....(5 1)}$$

$$= \frac{\text{अनुकूल परिणामो की सख्या}}{\text{समस्त सम्भव परिणामो की सख्या}} \qquad \text{....(5 1.1)}$$

है। यदि $n = N$ हो तो $P = 1$ है अर्थात् घटना E का घटित होना निश्चित है।

यदि $n = 0$ हो तो $P = 0$ है अर्थात् घटना E घटित नही होगी यह निश्चित है।

व्यंजक (5 1) से स्पष्ट है कि P का मान कदापि ऋणात्मक नहीं हो सकता और 1 से अधिक नहीं हो सकता क्योंकि $n \leq N$ है। अतः प्रायिकता का परिसर O से 1 है अर्थात् $0 \leq P \leq 1$, इसी प्रकार घटना E के घटित न होने अर्थात् E′ की प्रायिकता,

$$P(E') = 1 - P(E)$$

$$= 1 - \frac{n}{N} = \frac{N-n}{N} \qquad ....(5.2)$$

क्योंकि (N–n) परिणामों में घटना E के लक्षण विद्यमान नहीं हैं।

उपर्युक्त परिभाषा को लाप्लासियन (Laplacian) परिभाषा भी कहते हैं।

स्वतंत्र घटनाएँ

घटनाओं के एक समुच्चय में यदि एक घटना के घटित होने का किसी अन्य घटना के घटित होने की प्रायिकता पर कोई प्रभाव न हो तो ये घटनाएँ स्वतन्त्र कहलाती हैं।

यदि कोई दो घटनाएँ A व B स्वतन्त्र हो तो सांख्यिकीय रूप से सदैव निम्नांकित सम्बन्ध सत्य होता है —

$$P(A \cap B) = P(A)\, P(B) \qquad .(5\ 3)$$

इसी प्रकार तीन स्वतन्त्र घटनाओं A B व C के लिए निम्नांकित सम्बन्ध दिया जा सकता है।

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)\, P(B)\, P(C) \qquad .(5\ 3\ 1)$$

उदाहरण 5 1 एक थैले में 5 सफेद गेंदें और सात लाल गेंदें हैं। थैले को हिलाकर इसमें से एक गेंद को निकाला गया है तो इस गेंद के लाल होने की प्रायिकता इस प्रकार ज्ञात कर सकते हैं —

इस परीक्षण के कुल सम्भव परिणामों की संख्या 12 है। 12 गेंदों में से किसी भी गेंद को निकाला जा सकता है। ये सब परिणाम परस्पर अपवर्जी और समप्रायिक हैं N=12। कुल सात गेंदें लाल हैं। इसलिए 7 परिणाम लाल गेंद चुनी जाने के अनुकूल हैं। अतः गेंद के लाल होने अर्थात् घटना E_1 की प्रायिकता

$$P(E_1) = \tfrac{7}{12}$$

इसी प्रकार गेंद के सफेद होने अर्थात् घटना E_2 की प्रायिकता,

$$P(E_2) = \tfrac{5}{12}$$

घटना E_2 को इस प्रकार भी कह सकते हैं कि गेंद लाल न होने की प्रायिकता,

$$P(E_2) = 1 - P(E_1)$$

है क्योंकि यदि गेंद लाल नहीं है तो सफेद ही होगी।

$$P(E_2) = 1 - \tfrac{7}{12}$$

$$= \tfrac{5}{12}$$

उदाहरण 5 2 यदि उदाहरण (5 1) मे 4 गेंदो का चयन एक साथ किया गया है तो इनमे से 2 गेंदें लाल व 2 सफेद होने की प्रायिकता निम्न प्रकार ज्ञात कर सकते हैं –

12 गेंदो मे से 4 गेंदा का चयन $\binom{12}{4}$ ढग से किया जा सकना है ।

थैले की 5 गेंदो मे से 2 गेंदो का चयन $\binom{5}{2}$ ढग से और 7 लाल गेंदो मे से 2 गेंदा का चयन $\binom{7}{2}$ ढग से किया जा सकता है । यहाँ इन सभी गेंदो का चयन होना परस्पर स्वतन्त्र है । अत 4 गेंदो मे से 2 गेंदें सफेद और 2 गेंदें लाल होने की प्रायिकता निम्न है –

$$P(E)=\frac{\binom{5}{2}\times\binom{7}{2}}{\binom{12}{4}}$$

$$=\frac{\frac{5\,4}{1\,2}\times\frac{7\,6}{1\,2}}{\frac{12\,11\,10\,9}{4\,3\,2\,1}}$$

$$=0\,424$$

चिरप्रतिष्ठित परिभाषा के दोष

(क) इस परिभाषा म यह स्पष्ट कहा गया है कि प्रयोग के परिणाम समप्रायिक होने चाहिए । अत प्रत्याशित दृश्य-परिणाम समप्रायिक न होने की स्थिति मे प्रायिकता क्या होगी यह इस परिभाषा द्वारा ज्ञात करना असम्भव है । जैसे यदि एक सिक्का अभिनत (biased) हो तो शीर्ष या पट के ऊपर आने की प्रायिकता ज्ञात करना सम्भव नहीं है ।

(ख) यदि परस्पर अपवर्जी परिणामो की कुल सख्या अनत हो तो ऐसी स्थिति मे इस परिभाषा की सहायता से प्रायिकता ज्ञात नही की जा सकती है ।

(ग) यदि किन्ही स्थितियो मे परस्पर अपवर्जी परिणामो की परिगणना करना सम्भव न हो तो गणितीय परिभाषा द्वारा प्रायिकता ज्ञात करना सम्भव नही है ।

प्रायिकता की साख्यिकीय परिभाषा

यदि पूर्णतया एक समान परिस्थितियो मे अत्यधिक परीक्षण किये जाएँ तो इनमे से एक घटना (E) के अनुकूल परीक्षणो की सख्या और कुल परीक्षणो की सख्या के अनुपात की सीमा को घटना E के घटित होने की प्रायिकता कहते हैं । यहाँ यह कल्पना की गयी है कि अनुपात एक परिमित तथा अद्वितीय सीमा की ओर प्रवृत्त होता है ।

यदि कुल n परीक्षणो म स K परीक्षण ऐसे हैं जिनमे कि घटना E घटित होती है, तो E के घटित होने की प्रायिकता, गणितीय रूप मे निम्न प्रकार दी जा सकती है,

$$P(E)=\lim_{n\to N}\frac{K}{n} \qquad ..(5\,4)$$

यहाँ N परीक्षणो की एक अत्यधिक बृहत सख्या है । जबकि यह प्रतिबन्ध मत्य हो कि सीमा परिमित तथा अद्वितीय है ।

प्रायिकता की अभिगृहीतीय परिभाषा

यदि Ω एक प्रतिदर्श समष्टि है और β एक σ–क्षेत्र (σ–field) का Ω में समुच्चय है तो एक-मान फलन P घटना E की प्रायिकता कहलाता है यदि यह निम्न गुणधर्मों का समाधान करता है।

(1) $P(E) \geq 0$ ...(5 5)

जबकि $E \in \beta$

(2) $P(\Omega) = 1$ ...(5 6)

(3) यदि $E_i \in \beta$, $E_j \in \beta$, $E_i \cap E_j = \phi$, $i \neq j$

जबकि ϕ एक शून्य समुच्चय है।

तो $$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i)$$. (5 7)

ऊपर दी गयी परिभाषा में समुच्चय के विषय में परिभाषा दी गयी है क्योंकि घटना और समुच्चय में सदैव एकैकी संगति (one to one correspondence) स्थापित की जा सकती है। अतः जो विवरण समुच्चय के प्रति सत्य है वही घटनाओं के प्रति भी सत्य होता है या यह कहें कि किसी एक के लिए दिया गया विवरण दूसरे के लिए भी माना जा सकता है।

टिप्पणी (1) समुच्चय सिद्धान्त के विषय में अर्थात् Ω, β, σ–क्षेत्र व ϕ आदि के विषय में जानकारी के हेतु परिशिष्ट ग का अध्ययन कीजिये।

(2) *प्रायिकता की अभिगृहीतीय परिभाषा केवल गणितीय सांख्यिकी के विद्यार्थियों के लिए उपयोगी है। अन्य पाठक इस परिभाषा को छोड़ सकते हैं।*

योग प्रमेय

माना A और B दो घटनाएँ हैं, तो घटना A या B या दोनों घटनाओं के एक साथ घटित होने को $(A \cup B)$ द्वारा प्रदर्शित करते हैं। चित्र (5 2) में छायाग्रस्त क्षेत्र को छोड़कर शेष क्षेत्र घटना $(A \cup B)$ को प्रदर्शित करता है।

घटना $(A \cup B)$ की प्रायिकता के लिए निम्न सूत्र है —

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad ....(5\ 8)$$

जबकि चित्र (5.2) में छायाग्रस्त क्षेत्र घटना $(A \cup B)$ को प्रदर्शित करता है।

यदि घटनाएँ परस्पर अपवर्जी हों तो,

$$P(A \cap B) = 0$$

और इस स्थिति में, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ ....(5 8 1)

इसी प्रकार यदि तीन घटनाएँ A, B व C हैं तो,

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C) \quad ....(5\ 9)$$

यदि घटनाएँ A, B व C परस्पर अपवर्जी हो तो,

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) \qquad ....(5 9 1)$$

सामान्य रूप से n घटनाओं $E_1, E_2, E_3, \ldots \ldots, E_n$ के लिए निम्नांकित सम्बन्ध दिया जा सकता है।

$$P(E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup \ldots\ldots \cup E_n) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i) - \sum_{i \neq j=1}^{n} P(E_i \cap E_j)$$

$$+ \sum_{i \neq j \neq k=1}^{n} P(E_i \cap E_j \cap E_k) - \ldots \ldots + (-1)^{n-1} P(E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap \ldots \cap E_n)$$

...(5 10)

उदाहरण 5.3 एक सिक्के को दो बार उछालने पर प्रतिदर्श समष्टि मे चार सम-प्रायिक परिणाम HT, TH, HH, TT होंगे। यहाँ सिक्के के शीर्ष को H से और सन् को T से प्रदर्शित किया गया है।

माना कि पहली बार मे सिक्का शीर्ष की ओर से गिरता है, यह घटना A है और दूसरी बार मे शीर्ष की ओर से गिरता है, यह घटना B है।

घटना A के दो अवयव HT व HH हैं। $\therefore P(A) = 2/4$
घटना B के दो अवयव TH व HH हैं। $\therefore P(B) = 2/4$
घटना $A \cap B$ का अवयव HH है। $\therefore P(A \cap B) = 1/4$

क्योंकि घटनाएँ A और B स्वतन्त्र हैं और परस्पर अपवर्जी नही हैं,

$$P(A \cap B) = P(A)\ P(B)$$

यह घटना कि सिक्के को दो बार उछालने मे कम से कम एक बार सिक्का शीर्ष की ओर से गिरता है, घटना $(A \cup B)$ है। अत घटना $(A \cup B)$ की प्रायिकता,

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= P(A) + P(B) - P(A).\,P(B) \\ &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} \\ &= 1 - \tfrac{1}{4} \\ &= \tfrac{3}{4} \end{aligned}$$

उदाहरण 5.4 . एक फैक्ट्री द्वारा उत्पादित 75 बेयरिंगो मे से 12 दोषपूर्ण हैं। बेयरिंग के इस ढेर मे से दो बेयरिंग यादृच्छिक रीति द्वारा प्रतिस्थापन सहित निकाले गये। प्रायिकता ज्ञात करनी है कि (i) निकाले गये दोनो बेयरिंग दोषपूर्ण हैं। (ii) दोनो बेयरिंग दोष रहित हैं। (iii) एक बेयरिंग दोषपूर्ण और दूसरा दोष रहित है। क्योंकि दो बेयरिंगो के निकालने का कार्य एक-दूसरे से स्वतन्त्र है तो एक बेयरिंग निकालने पर इसके, दोषपूर्ण होने की प्रायिकता $= \frac{12}{75}$ और दोषरहित होने की प्रायिकता $= \frac{63}{75}$।

(i) दोनो बेयरिंग दोषपूर्ण होने की प्रायिकता,

$$=\frac{12}{75}\times\frac{12}{75}=0.0256$$

(ii) दोनो बेयरिंग दोषरहित होने की प्रायिकता,

$$=\frac{63}{75}\times\frac{63}{75}=0.7056$$

(iii) दोनो में से एक दोषपूर्ण और दूसरा दोषरहित होने की प्रायिकता,

$$=\frac{12}{75}\times\frac{63}{75}\times 2=0.2688$$

भाग (iii) में 2 से गुणा इसलिए किया गया है कि दो बेयरिंगो के चयन में पहला बेयरिंग दोषपूर्ण और दूसरा दोषरहित हो सकता है या पहला दोष रहित व दूसरा दोषपूर्ण हो सकता है। अतः दो बेयरिंगो में एक दोषरहित व एक दोषपूर्ण दो ढंग से घटित हो सकते हैं।

सप्रतिबन्ध प्रायिकता

यदि किसी प्रतिदर्श समष्टि में E एक घटना है जिसकी प्रायिकता $P(E)>0$ है और उसी प्रतिदर्श समष्टि पर आधारित कोई अन्य घटना A है तो A के घटित होने की प्रायिकता, जबकि यह ज्ञात हो कि घटना E घटित हो चुकी है, सप्रतिबन्ध प्रायिकता कहलाती है। इसे $P(A/E)$ द्वारा निरूपित करते हैं और निम्न सूत्र द्वारा ज्ञात कर सकते हैं

$$P(A/E)=\frac{P(A\cap E)}{P(E)} \qquad (5.11)$$

उदाहरण 5.5 माना कि एक परिवार में दो बच्चे हैं। यदि बच्चा लड़का है तो इसे b से और यदि लड़की है तो इसे g से निरूपित किया गया है तो एक परिवार में दोनो लड़के होने, पहला बच्चा लड़का व दूसरा बच्चा लड़की होने, पहला बच्चा लड़की व दूसरा बच्चा लड़का होने या दोनो लड़की होने के लिए क्रमश चार चयन *bb, bg, gb, gg* हैं। इनमे से प्रत्येक चयन के घटित होने की प्रायिकता $\frac{1}{4}$ है।

यदि परिवार में कम से कम एक लड़का होने की घटना को E से और दोनो लड़के होने की घटना को A से सूचित करें तो,

$$P(E)=P(bb)+P(bg)+P(gb)=\frac{3}{4}$$

$$P(A)=P(bb)=\frac{1}{4}$$

यहाँ $A\cap E=A$

$$\therefore\ P(A\cap E)=P(A)=\frac{1}{4}$$

यह दिया हुआ होने पर कि परिवार में कम से कम एक लड़का है, दोनो लड़के होने की प्रायिकता,

$$P(A/E)=\frac{P(A\cap E)}{P(E)}$$

$$=\frac{1/4}{3/4}=\frac{1}{3}$$

सांख्यिकीय स्वतन्त्रता

यद्यपि घटनाओं की स्वतन्त्रता को पहले दिया जा चुका है फिर भी यहाँ इसे सप्रतिबन्ध प्रायिकता की सहायता से दिया गया है।

दो घटनाएँ E_1 और E_2 साख्यिकीय रूप से स्वतन्त्र कही जाती हैं यदि,

$$P(E_1/E_2)=P(E_1) \text{ और } P(E_2/E_1)=P(E_2) \quad ....(5\ 12)$$

सूत्र (5 11) के अनुसार,

$$P(E_1/E_2)=\frac{P(E_1\cap E_2)}{P(E_2)}=P(E_1)$$

$$\therefore \quad P(E_1\cap E_2)=P(E_1)P(E_2) \quad ...(5\ 13)$$

इसी प्रकार,

$$P(E_2/E_1)=\frac{P(E_1\cap E_2)}{P(E_1)}=P(E_2)$$

या $\quad P(E_1\cap E_2)=P(E_1)\ P(E_2)$

यदि तीन घटनाएँ E_1, E_2, E_3 परस्पर स्वतन्त्र हैं ता,

$$P(E_1/E_2)=P(E_1)$$

$$P(E_1/E_2E_3)=P(E_1)$$

$$P(E_1\cap E_2/E_3)=P(E_1\cap E_2)$$

$$=P(E_1)\ P(E_2)$$

हम जानते हैं कि

$$P(E_1\cap E_2/E_3)=\frac{P(E_1\cap E_2\cap E_3)}{P(E_3)}$$

$$=P(E_1\cap E_2)$$

$$=P(E_1)\ P(E_2)$$

$$\therefore \quad P(E_1\cap E_2\cap E_3)=P(E_1)\ P(E_2)\ P(E_3) \quad .(5\ 14)$$

इस प्रकार सूत्र (5 14) का कितनी ही परस्पर स्वतन्त्र घटनाओं के लिए व्यापकीकरण किया जा सकता है।

बेज़ का प्रमेय

माना कि n परस्पर अपवर्जी घटनाएँ $E_1, E_2, E_3 ... E_n$ हैं और ये घटनाएँ मिलकर प्रतिदर्श समष्टि Ω का गठन करती हैं। प्रतिदर्श समष्टि Ω मे E एक घटना है जिसकी प्रायिकता $P(E)\neq 0$। माना कि घटनाओं $E_1, E_2, E_3, ..., E_n$ की क्रमश प्रागनुभव (apriori) प्रायिकताएँ $P(E_1), P(E_2), P(E_3), .., P(E_n)$ हैं।

यदि $P(E/E_1)$, $P(E/E_2)$, $P(E/E_3)$, ...$P(E/E_n)$ क्रमश सप्रतिबन्ध प्रायिकताऐं हैं तो इस प्रमेय द्वारा पश्च (*Posteriori*) प्रायिकताऐं $P(E_i/E)$ ज्ञात करते हैं, जबकि $i=1, 2, 3, ..n$ (5 11) द्वारा ज्ञात है कि

$$P(E/E_i)=\frac{P(E\cap E_i)}{P(E_i)}$$

या $$P(E\cap E_i)=P(E/E_i)\,P(E_i) \quad (5\,14\,1)$$

और $$P(E_i/E)=\frac{P(E\cap E_i)}{P(E)}$$

या $$P(E\cap E_i)=P(E_i/E)\,P(E) \quad (5\,14\,2)$$

(5 14 1) व (5 14 2) में बायी ओर के पद समान हैं।

$$\therefore\; P(E/E_i)\,P(E_i)=P(E_i/E)\,P(E)$$

$$\therefore\; P(E_i/E)=\frac{P(E/E_i)\,P(E_i)}{P(E)} \quad ...(5\,15)$$

हमे $P(E/E_i)$ ज्ञात है और

$$P(E)=P(E\cap E_1)+P(E\cap E_2)+P(E\cap E_3)\,..P(E\cap E_n)$$
$$=P(E_1)P(E/E_1)+P(E_2)P(E/E_2)+P(E_3)P(E/E_3)+..P(E_n)P(E/E_n)$$

$$\therefore\; P(E_i/E)=\frac{P(E/E_i)P(E_i)}{P(E_1)P(E/E_1)+P(E_2)P(E/E_2)+...+P(E_n)P(E/E_n)} \quad ...(5\,16)$$

सूत्र (5 16) में i का मान 1, 2, 3, n रखकर क्रमश प्रायिकताऐं $P(E_1/E)$, $P(E_2/E)$,..., $P(E_n/E)$ ज्ञात कर सकते हैं।

उदाहरण 5.6 : *एक फैक्ट्री में एक पुरानी और एक नयी मशीन है। नयी मशीन की* उत्पादन क्षमता पुरानी मशीन की अपेक्षा चार गुना है। पूर्व सूचना से पता चलता है कि पुरानी मशीन द्वारा उत्पादित 6 प्रतिशत वस्तुऐं दोषपूर्ण है जबकि नयी मशीन द्वारा उत्पादित 2 प्रतिशत वस्तुऐं दोषपूर्ण हैं। प्रायिकता ज्ञात करनी है कि एक चयनकृत दोषपूर्ण वस्तु (1) पुरानी मशीन द्वारा उत्पादित है (2) नयी मशीन द्वारा उत्पादित है।

एक चयनकृत वस्तु के पुरानी मशीन द्वारा उत्पादित होने की घटना को E_1 से सूचित करें, एक चयनकृत वस्तु के नयी मशीन द्वारा उत्पादित होने की घटना को E_2 से सूचित करें और एक चयनकृत वस्तु दोषपूर्ण होने की घटना को E से सूचित करें तो इस समस्या में प्रायिकताऐं $P(E_1/E)$ व $P(E_2/E)$ ज्ञात करनी हैं।

दी गयी सूचना के अनुसार,

$$P(E_1)=0\;20$$
$$P(E_2)=0\;80$$

और $P(E/E_1) = 0{\cdot}06$

$$P(E/E_2) = 0{\cdot}02$$

$$P(E) = P(E_1 \cap E) + P(E_2 \cap E)$$
$$= 0{\cdot}20 \times {\cdot}06 + 0{\cdot}80 \times {\cdot}02$$
$$= {\cdot}028$$

अतः सम्बन्ध (5.15) के अनुसार,

$$P(E_1/E) = \frac{{\cdot}06 \times {\cdot}20}{{\cdot}028}$$
$$= \frac{3}{7}.$$

इसी प्रकार,

$$P(E_2/E) = \frac{{\cdot}02 \times {\cdot}80}{{\cdot}028}$$
$$= \frac{4}{7}$$

निर्वचन : इस प्रकार इस उदाहरण द्वारा पता चलता है कि दोषपूर्ण वस्तु का नयी मशीन द्वारा उत्पादन होने की प्रायिकता अधिक है।

यादृच्छिक चर

एक संख्यात्मक मान-फलन जोकि एक प्रतिदर्श-समष्टि पर परिभाषित है, यादृच्छिक चर कहलाता है। यदि X एक ऐसा चर है तो यादृच्छिक प्रयोग के विभिन्न निष्पादनों (Performances) में X के विभिन्न मान होंगे।

चर X के एक निर्दिष्ट मान x लेने की घटना की प्रायिकता को $P(X=x)$ द्वारा प्रदर्शित करते हैं। यदि a और b दो वास्तविक संख्याएँ हैं और $a<b$ है तो चर X के निर्दिष्ट अन्तराल $a<X\leq b$ में होने की घटना की प्रायिकता को $P(a<X\leq b)$ द्वारा प्रदर्शित करते हैं। यदि अन्तराल (a, b) में X के विभिन्न मान लेने की घटनाओं की प्रायिकता ज्ञात हो तो हम कह सकते हैं कि चर X का प्रायिकता बंटन या बंटन ज्ञात है। अतः प्रायिकता $P(X\leq x)$, x का एक फलन होगा। माना कि $F(x)=P(X\leq x)$. $F(x)$ को चर X का बंटन फलन कहते हैं।

असंतत यादृच्छिक चर

यदि बंटन की कुल मात्रा कुछ वियुक्त बिन्दुओं (isolated points) पर केन्द्रित हो या एक परिमित अन्तराल मात्रा बिन्दुओं की गणनीय या परिमित संख्या रखता हो। तो यादृच्छिक चर X असंतत प्रकार का कहा जाता है।

असंतत चर X के लिए प्रायिकता फलन $p(x)=P(X=x)$ और $P(X=x_i)=p$ जबकि x का एक मान x_i है।

संतत यादृच्छिक चर

एक यादृच्छिक चर X सतत प्रकार का कहा जाता है यदि बंटन फलन $F(x)$ सर्वत्र सतत हो । साथ ही प्रायिकता घनत्व फलन $f(x)$ का अस्तित्व है अर्थात् $f(x) > 0$ और यह x के लगभग प्रत्येक मान के लिए सतत है, जबकि $f(x) = \frac{d}{dx}\{F(x)\}$.

असतत व सतत चर को सम्भात्मक मान फलन $\psi(x)$ के रूप मे क्रमश निम्न उदाहरणो द्वारा समझ सकते हैं

माना कि एक सिक्के को उछालने पर यदि शीर्ष (H) ऊपर की ओर आता है तो यह 1 से और सत् (T) ऊपर की ओर आता है तो यह 0 से निरूपित है । इस स्थिति में,

$$\psi(H) = 1 \text{ और } \psi(T) = 0$$

यदि किन्ही एकका के भार, ऊँचाई या लम्बाई आदि X द्वारा निरूपित हैं तो,

$$\psi(X) = X$$

उपर्युक्त वर्णन के आधार पर यह कह सकते हैं कि प्रत्येक परिणाम को कोई एक मान दिया जा सकता है । यह विदित है कि किसी घटना की प्रायिकता ज्ञात की जा सकती है। अत घटना के तदनुसार चर के मान की प्रायिकता ज्ञात कर सकते हैं। इससे इस निष्कर्ष पर पहुँचते हैं कि घटना और चर के मानो मे संगति (Correspondence) निर्धारित की जा सकती है और इसके प्रति प्रायिकता ज्ञात की जा सकती है ।

प्रायिकता बंटन सिद्धांत

बंटन फलन $F(x)$ को संचयी बंटन फलन भी कहते हैं । $F(x)$ के मुख्य लक्षण निम्न प्रकार हैं :—

(क) $F(+\infty) = 1$

(ख) $F(-\infty) = 0$

(ग) यदि $x_1 > x_2$ हो तो $F(X_1) > F(X_2)$

(घ) किसी असतत चर X के लिए,

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a) = \sum_{a < X < b} p(x) \quad \text{....(5.17)}$$

(ङ) किसी सतत चर X के लिए,

$$P(X < x) = F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx \quad \text{....(5.18)}$$

और

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a) = P(a < X < b)$$

$$=P(a<X<b)=P(a\leqslant X\leqslant b)=\int_{a}^{b} f(x)dx \qquad (5\ 19)$$

दो यादृच्छिक चरो X और Y के लिए

$$P(X\leqslant x,\ Y\leqslant y)=F(x\ \ y) \qquad (5\ 20)$$

F(x, y) को चरा X और Y का सयुक्त सचयी बटन फलन (joint cumulative distribution function) कहते है। असतत यादृच्छिक चरा X और Y के लिए सयुक्त प्रायिकता फलन

$$p(x, y)=P(X=x,\ Y=y) \qquad (5\ 21)$$

है और बटन फलन निम्नाकित है —

$$P(X\leqslant x,\ Y\leqslant y)=F(x, y)=\sum_{u\leqslant x}\ \sum_{v\leqslant y} p(u, v) \qquad (5\ 22)$$

सतत यादृच्छिक चरो X और Y के लिए सयुक्त प्रायिकता घनत्व फलन इस प्रकार है —

$$f(x, y)=\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x\ \partial y}$$

और सयुक्त बटन फलन निम्नाकित है —

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x} du \int_{-\infty}^{y} f(u, v)dv \qquad \ldots(5\ 23)$$

f(x, y) के कुछ मुख्य लक्षण निम्न प्रकार हैं —

(क) $f(x, y)\geqslant 0$

(ख) असतत चरा X और Y के लिए,

$$\sum_{x}\sum_{y} p(x, y)=1$$

है। सतत चरो X और Y के लिए निम्नाकित सम्बन्ध होता है —

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\ dx\ dy=1$$

F(x, y) के लक्षण निम्न प्रकार हैं —

(क) $F(-\infty, y)=F(x, -\infty)=F(-\infty, -\infty)=0$

(ख) $F(\infty, \infty)=1$

उपांत बंटन

यदि दो सतत चरों X व Y का संयुक्त प्रायिकता घनत्व फलन $f(x, y)$ है तो उपांत बंटन के लिए निम्न सम्बन्धों पर विचार करें —

$$P(a<X<b)=P(a<X<b, -\infty<Y<\infty)$$

$$=\int_a^b \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dx\, dy$$

$$=\int_a^b f_1(x)\, dx \qquad ....(5\ 24)$$

$$\text{जबकि} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dy = f_1(x)$$

यदि X के बंटन का विचार करें तो,

$$P(a<X<b)=\int_a^b f_X(x)\, dx \qquad ....(5\ 25)$$

सम्बन्धों (5 24) और (5.25) की सहायता से निम्न सम्बन्ध दिया जा सकता है —

$$\int_a^b f_X(x)\, dx = \int_a^b f_1(x)\, dx \qquad ....(5\ 26)$$

(5 26) तब ही सत्य हो सकता है जब $f_X(x)=f_1(x)$ है। यह सम्बन्ध a व b के किन्हीं भी वास्तविक मानों के लिए सत्य है। अत चर X का उपांत बंटन निम्न प्रकार है —

$$f_1(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dy \qquad ....(5\ 27)$$

इसी प्रकार सिद्ध कर सकते हैं कि Y का उपांत बंटन निम्नलिखित होता है —

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, v)\, dx \qquad (5\ 28)$$

बंटन फलन F (x, y) के लिए उपांत बंटन निम्नांकित होते हैं —

Y क्या मान ग्रहण करता है यदि इस तथ्य की उपेक्षा कर दी जाय तो $P(X<x)$ को $F_1(x)$ द्वारा प्रदर्शित कर सकते है और इसे चर X का उपांत बटन कहते है।

$$F_1(x)=P(X<x)=\int_{-\infty}^{x} du \int_{-\infty}^{\infty} f(u,y)dy \tag{5 29}$$

$$\text{और } f_1(x)=\frac{d}{dx}\left\{F_1(x)\right\}=F_1'(x) \tag{5 30}$$

इसी प्रकार Y का उपांत बटन दिया जा सकता है जो कि निम्न है —

$$F_2(y)=P(Y<y)=\int_{-\infty}^{y} dv \int_{-\infty}^{\infty} f(x,v)dx \tag{5 31}$$

$$\text{और } f_2(y)=\frac{d}{dx}\left\{F_2(y)\right\}=F_2'(y) \tag{5 32}$$

दो असतत चरो X और Y के संयुक्त बटन फलन $F(x, y)$ के लिए उपांत बटन निम्नांकित होते हैं —

यदि चर X के उपांत बटन को $F_1(x)$ और Y के उपांत बटन को $F_2(y)$ से निरूपित करें तो,

$$F_1(x)=P(X<x)=F(x, \infty) \tag{5 33}$$

$$\text{और } F_2(y)=P(Y\leqslant y)=F(\infty, y) \tag{5 34}$$

होते हैं। उपांत प्रायिकता फलन निम्न प्रकार ज्ञात हैं

$$p_1(x)=\sum_y p(x, y) \text{ और } p_2(y)=\sum_x p(x, y) \tag{5 34 1}$$

विचरों की स्वतन्त्रता : यदि दो चर X और Y सांख्यिकीय रूप से स्वतन्त्र हों तो संबंध $F(x, y)=F_1(x)\ F_2(y)$ (5 35)

सदैव सत्य होता है। यह सिद्ध किया जा सकता है कि स्वतन्त्रता की स्थिति में

$$f(x, y)=f_1(x)\quad f_2(y) \tag{5 36}$$

होता है यदि घनत्व फलन का अस्तित्व हो।

सप्रतिबंध बटन (Conditional distribution)

दो सतत चरों X, Y के संयुक्त प्रायिकता घनत्व फलन $f(x, y)$ में यदि चर X को स्थिर रखा जाये, जबकि $f_1(x)>0$ है, तो X के स्थिर मान x के लिए फलन $f(x, y)/f_1(x)$, y का सप्रतिबन्ध बारम्बारता फलन कहलाता है। $f(y/x)$ द्वारा निरूपित करते हैं। अत

$$f(y/x)=\frac{f(x, y)}{f_1(x)} \tag{5 37}$$

(5 37) द्वारा प्राप्त y के सप्रतिबन्ध बारम्बारता फलन के लिए निम्न गुणधर्म दिया जा सकता है :—

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(y/x)dy = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x, y)}{f_1(x)}\,dy = \frac{1}{f_1(x)}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dy = \frac{f_1(x)}{f_1(x)} = 1$$

इसी प्रकार Y के स्थिर मान के लिए X का सप्रतिबन्ध बारम्बारता फलन,

$$f(x/y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)} \qquad (5\ 38)$$

दिया जा सकता है।

सप्रतिबन्ध बारम्बारता फलन $f(y/x)$ उस मात्रा के बटन को निरूपित करता है जो कि बिन्दु $X=x$ पर एक अत्यधिक पतली उर्ध्वाधर पट्टी मे स्थित है। यहाँ X को एक स्वतन्त्र चर और Y को एक आश्रित चर कहे तो X के निश्चित मान x के लिए Y का बारम्बारता फलन $f(y/x)$ होता है। इसी प्रकार का विवरण $f(x/y)$ के लिए दिया जा सकता है।

दो असतत चरो X और Y की स्थिति मे, माना कि X व Y के उपान्त प्रायिकता फलन क्रमश $p_1(x)$ व $p_2(y)$ है जबकि चरो X और Y का सयुक्त प्रायिकता फलन $p(x, y)$ है। माना कि चरो की समष्टि A है जिस पर कि $p(x, y)$ धनात्मक है अन्यथा शून्य है। *माना कि A_1 और A_2 समष्टि A के दो समुच्चय हैं।*

माना कि समुच्चय $A_1=\{x=x', -\infty<y<\infty\}$ है जबकि x' इस प्रकार है कि $P(A_1)=P(X=x')=p_1(x')>0$ और समुच्चय $A_2=\{-\infty<x<\infty, y=y'\}$ है।

परिभाषा के अनुसार निर्दिष्ट घटना A_1 के लिए घटना A_2 की सप्रतिबन्ध प्रायिकता निम्न प्रकार है —

$$P(A_2/A_1) = \frac{P(A_2\cap A_1)}{P(A_1)} = \frac{P(X=x', Y=y')}{P(X=x')}$$

$$= \frac{p(x', y')}{p_1(x')} \qquad (5\ 39)$$

यदि (x, y) एक बिन्दु है जिसके लिए $p_1(x)>0$ है तो *निर्दिष्ट घटना $X=x$ के* लिए घटना $Y=y$ की सप्रतिबन्ध प्रायिकता $p(x, y)/p_1(x)$ है।

x को स्थिर रखा जाय तो y का फलन असतत यादृच्छिक चर Y का प्रायिकता फलन होने के प्रतिबन्धों को पूरा करता है क्योंकि

$p(x, y)/p_1(x) \geq 0$

$$\text{और } \sum_{y} \frac{p(x, y)}{p_1(x)} = \frac{1}{p_1(x)} \sum_{y} p(x, y) = \frac{p_1(x)}{p_1(x)} = 1$$

अतः निर्दिष्ट x के लिए y का सप्रतिबन्ध प्रायिकता फलन $p(y/x)$ निम्न प्रकार होता है :—

$$p(y/x) = \frac{p(x,y)}{p_1(x)} \quad \text{जबकि } p_1(x) > 0 \tag{5.40}$$

इसी प्रकार निर्दिष्ट y के लिए x का सप्रतिबन्ध प्रायिकता फलन $p(x/y)$ निम्न प्रकार दिया जा सकता है —

$$p(x/y) = \frac{p(x, y)}{p_2(y)} \quad \text{जबकि } p_2(y) > 0 \tag{5.41}$$

गणितीय प्रत्याशा

माना कि एक यादृच्छिक चर X है जो कि मान $x_1, x_2, x_3, \ldots \ldots, x_n$ क्रमश प्रायिकता $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ में ग्रहण करता है। $g(X)$ चर X का एक फलन है तो X के मान x_i के लिए फलन का मान $g(x_i)$ है। यदि घटना $X = x_i$ की प्रायिकता p_i है तो फलन $g(X)$ की प्रत्याशा $E\{g(x)\}$ की परिभाषा निम्न सूत्र से दी जाती है —

एक असतत प्रकार के बटन के लिए,

$$E\{g(X)\} = \sum_{i=1}^{n} p_i\, g(x_i) \tag{5.42}$$

एक सतत प्रकार के बटन के लिए,

$$E\{g(X)\} = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx \tag{5.43}$$

आघूर्ण

यदि $g(X) = X^k$

है तो एक असतत प्रकार के बटन के लिए,

$$E(X^k) = \sum_{i=1} p_i (X_i^k) \tag{5.44}$$

एक सतत प्रकार के बटन के लिए,

$$E(X^k) = \int_{-\infty}^{\infty} X^k f(x)\, dx \qquad (5\ 45)$$

$E(X^k)$ को शून्य के परित Kवां आघूर्ण कहते हैं और इसे μ_k' द्वारा निरूपित करते है जैसा कि अध्याय चार म दिया गया है।

इसी प्रकार माध्य को परित kवा आघूर्ण,

$$\mu_k = E\{X - E(X)\}^k \qquad (5\ 46)$$

एक असतत बटन के लिए,

$$\mu_k = \sum_{i=1}^{n} p_i\{X_i - E(X_i)\}^k \qquad (5\ 47)$$

और सतत बटन के लिए,

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{\infty} \{X - E(X)\}^k f(x)dx \qquad (5\ 47\ 1)$$

यदि $k=1$ है तो,

$$\mu_1 = \sum_{i=1}^{n} p_i\{X_i - E(X_i)\}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} p_i(X_i - \mu)$$

$$= 0 \qquad (5\ 48)$$

यदि $k=2$ है तो,

$$\mu_2 = E\{X-E(X)\}^2$$

$$= E(X^2) - \{E(X)\}^2 \qquad (5\ 49)$$

μ_2 को चर X का प्रसरण कहते हैं।

इसी प्रकार अन्य उच्च क्रम के आघूर्णों को दिया जा सकता है।

माना कि X व Y दो चर हैं जिनके माध्य व प्रसरण परिमित हैं। तो इन दो चरों X व Y के लिए माध्य के परित द्वितीय क्रम के आघूर्ण μ_{11} को चरा X व Y मे सहप्रसरण कहते है और इसके लिए निम्नांकित सूत्र है।

$$\mu_{11} = Cov(X, Y) \quad E[\{X-E(X)\}\{Y-E(Y)\}] \qquad (5\ 50)$$

यदि दो चर X और Y स्वतन्त्र हैं तो यह सिद्ध किया जा सकता है कि

$$E(XY) = E(X)\, E(Y)$$

आघूर्ण जनक फलन

यदि X एक यादृच्छिक चर है और t एक वास्तविक संख्या है तो चर X या इसके बटन के आघूर्ण जनक फलन $M_X(t)$ की परिभाषा निम्न सूत्र द्वारा दी जाती है।

$$M_X(t) = E(e^{tX}) \tag{5 51}$$

जबकि अक्षर E फलन e^{tX} की प्रत्याशा को सूचित करता है।

यदि चर X असतत है तो,

$$M_X(t) = \sum_{r} e^{tx_r} f(x_r) \tag{5 52}$$

यदि चर X सतत है तो

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)dx \tag{5 53}$$

जबकि $-\infty \leqslant X \leqslant \infty$

आघूर्ण जनक फलन द्वारा किसी बटन के आघूर्ण ज्ञात किये जा सकते हैं जिसकी विधि इस प्रकार है। बटन का kवां आघूर्ण ज्ञात करने के लिए फलन $M_X(t)$ का t के सम्बन्ध में k बार अवकलन करके इनमें $t=0$ रख दिया जाता है यदि $M_X(t)$ का kवा अवकलज $M_X^k(t)$ है तो $M_X^k(0)$ को ज्ञात कर लिया जाता है जो कि सदैव $E(X^k)$ के समान होता है जबकि

$$E(X^k) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)\, dx \quad \text{या} \quad \sum_{x} x^k p(x) \tag{5 54}$$

स्पष्टत $E(X^k)$ के मानो का $M_x(t)$ द्वारा जनन किया जा सकता है जो कि चर X के बटन का kवा आघूर्ण है। यही कारण है कि $M_x(t)$ को आघूर्ण जनक फलन कहते है।

उपर्युक्त विधि का प्रयोग आघूर्णो का ज्ञात करने के लिए अध्याय 6 व 7 मे किया गया है।

आघूर्ण जनक फलन का उपयोग कम होता है क्योंकि अनेकों बटनो के लिए आघूर्ण जनक फलन का अस्तित्व नहीं है। इसके स्थान पर अभिलक्षण फलन का उपयोग अच्छा समझा जाता है क्योंकि प्रत्येक बटन के लिए अभिलक्षण फलन का अस्तित्व है।

अभिलक्षण फलन

माना कि एक यादृच्छिक चर X का एक फलन $g(X)$ है और t एक वास्तविक संख्या है तो $E(e^{itx})$ को X के बटन का अभिलक्षण फलन कहते हैं उसे $\phi_x(t)$ से सूचित करते हैं।

$$\therefore \; \phi_x(t) = E(e^{itx}) \qquad (\text{जहाँ } i=\sqrt{-1}) \qquad (5\ 55)$$

यदि चर X असतत है तो,

$$\phi_x(t) = \sum_r e^{itx_r} p(x_r) \qquad (5\ 56)$$

और यदि चर X सतत है तो

$$\phi_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x)dx \qquad (5\ 57)$$

$\phi_x(t)$ को अभिलक्षण फलन इस कारण कहते है कि प्रत्येक बटन का एक अद्वितीय अभिलक्षण फलन होता है और प्रत्येक अभिलक्षण फलन के संगत एक अद्वितीय बटन फलन होता है।

अद्वितीयता प्रमेय

दो बटन फलन तब ही समरूप होते हैं जबकि उनके अभिलक्षण फलन भी समरूप हों।

प्रश्नावली

1 निम्न पदों की परिभाषा दीजिये और स्पष्टीकरण भी कीजिये।
(अ) प्रायिकता
(ख) गणितीय प्रत्याशा
(ग) सांख्यिकीय स्वतन्त्रता

2 स्वतन्त्र एव परस्पर अपवर्जी घटनाओं में अन्तर स्पष्ट कीजिये। इनका एक-एक उदाहरण भी दीजिये।

3 यदि एक ताश के दो पत्तों का प्रतिस्थापन सहित चयन किया गया है तो प्रायिकता ज्ञात कीजिये कि ये दो पत्ते गुलाम हैं?

4 प्रायिकता ज्ञात कीजिये कि एक यमसम्भावित रीति से चयनकृत अधिवर्ष (Leap year) में 53 रविवार होंगे। (उत्तर 2/7)
(एम एस सी, आगरा 1955)

5 एक ताश की गड्डी से चार पत्ते निकाले गये तो प्रायिकता ज्ञात करो कि ये पत्ते पान के नहीं हैं?

6 एक सिक्के को चार बार उछाला गया तो प्रायिकता ज्ञात करो कि यह चारों शीर्ष (head) है?

7 . एक कम्पनी मे 20 काम करने वाले व्यक्तियों मे से 5 स्नातक स्तर तक शिक्षित है। यदि समसंभाविक रीति द्वारा इनमे से तीन व्यक्तियो का चयन किया जाता है तो प्रायिकता ज्ञात कीजिये कि (अ) ये तीनो स्नातक हैं ? (ब) इन तीनो में से कम से कम एक स्नातक स्तर तक शिक्षित है ?

$$\left[\text{उत्तर : (अ) } \frac{1}{114} \text{ (ब) } \frac{137}{228}\right]$$

(आई. सी. डब्लू. ए. 1965)

8 . ब्रिज के खेल में एक हाथ में 9 पत्ते एक ही प्रकार (*same suit*) के होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिये ।

$$\left[\text{उत्तर: } \frac{\binom{13}{9}\binom{39}{4}\binom{4}{1}}{\binom{52}{13}}\right]$$

(दिल्ली, 1968)

9 . एक थैले मे 5 सफेद और 4 काली गेंदें हैं। इस थैले मे से एक गेंद को निकाल कर प्रतिस्थापित कर दिया जाता है और फिर दूसरी गेंद निकाली जाती है। प्रायिकता ज्ञात कीजिये कि ये दोनो गेंदें अलग-अलग रंगों की हैं ?

$$\left(\text{उत्तर : } \frac{40}{81}\right)$$

(आगरा, 1967)

10 . तीन कलश हैं। कलश I मे 3 लाल और 7 हरी गेंदें हैं, कलश II में 5 लाल और 3 हरी गेंदें हैं और कलश III मे 8 लाल और 4 हरी गेंदें हैं इन कलशों मे से एक लाल गेंद निकाली गयी है। प्रायिकता बताइये कि (अ) यह गेंद कलश I से निकाली गयी है ? (ब) यह गेंद कलश III से निकाली गयी है ?

$$\left(\text{उत्तर (अ) } \frac{36}{191} \text{ (ब) } \frac{80}{191}\right)$$

(दिल्ली, 1970)

12 . एक ताश की गड्डी मे से केवल एक पत्ता निकाला जाता है प्रायिकता ज्ञात कीजिये कि यह या तो हुकुम का इक्का है या चिड़ी का गुलाम है ?

$$\left(\text{उत्तर } \frac{1}{26}\right)$$

(इलाहाबाद, 1970)

13 . एक फैक्ट्री द्वारा यन्त्र रचना (Mechanism) के तीन स्वतन्त्र भाग हैं। यह ज्ञात है कि पहिले भाग 1 प्रतिशत, दूसरे भाग 4 प्रतिशत और तीसरे भाग 2 प्रतिशत दोषपूर्ण है। प्रायिकता का परिकलन कीजिये कि यन्त्र-रचना अदोषपूर्ण है ?

(उत्तर : 0 931)

(एम. बी ए. दिल्ली, 1971)

14 . एक युद्ध मे लक्ष्य पर बम गिरने की सभावना $\frac{1}{5}$ है। पुल को नष्ट करने के लिए दो बम पर्याप्त हैं। पुल को लक्ष्य बनाकर 6 बम डाले गये तो पुल के नष्ट होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिये।

(उत्तर : 0 345)

(दिल्ली, 1963)

□ □ □

6 | कुछ मुख्य असंतत प्रायिकता बंटन

प्रायिकता बटन का सामान्य विवरण अध्याय 5 में दिया जा चुका है। यहां केवल मुख्य असतत बटनों का वर्णन दिया गया है।

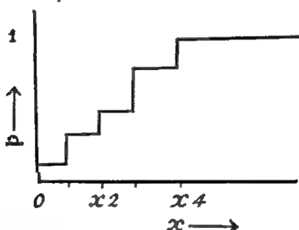
यदि एक यादृच्छिक चर X असतत है तो इसका बटन भी असतत होता है। इस चर के मानों का कुछ ही बिन्दुओं पर केन्द्रीकरण होता है। माना कि सहति बिन्दुओं $x_1, x_2, x_3, \ldots$ का परिमित या अनन्त अनुक्रम है और इन बिन्दुओं की सहति क्रमश $p_1, p_2, p_3, \ldots$ है। इस प्रकार X के सम्भव मान $x_1, x_2, x_3, \ldots$ हैं और X के एक निर्दिष्ट मान x_i लेने की प्रायिकता p_i होती है।

अर्थात् $P(X=x_i)=p_i$ जबकि $i=1, 2, 2, \ldots$

और $\sum_i p_i=1$, क्योंकि बटन में कुल सहति 1 होती है।

यदि चर X का बटन फलन F(x) है तो

$$F(x)=P(X\leq x)=\sum_{x_i\leq x} p_i \qquad (6\ 2)$$



चित्र (6–1) असतत बटन का लेखाचित्रीय रूप

असतत बटन F(x) को चित्र (6–1) में प्रदर्शित किया गया है। इस बटन का रूप सीढ़ी-कक्ष जैसा होता है :

द्विपद-बंटन

एक यादृच्छिक प्रयोग और एक घटना E पर विचार करें। प्रयोग के परिणाम में यदि घटना E के गुण विद्यमान होते हैं तो प्रयोग को सफल कहते हैं अन्यथा असफल कहते हैं। मानलें कि एक प्रयोग में सफलता मिले के दृश्य-परिणाम को 1 से और असफलता

में इसका परिमाण को 0 से सूचित किया गया है। अतः प्रयोग में किसी एक चर X के केवल दो मान 1 व 0 सम्भव हैं अर्थात् परिणाम द्विप्रात्मक (dichotomous) हैं। यदि $X=1$ होने की घटना की प्रायिकता p है तो $X=0$ होने की प्रायिकता $q=1-p$ होगी। इस प्रकार $p+q=1$

यदि n परीक्षणों के परिणाम x_1 x_2 x_3 x_n है तो k वें परीक्षण में यादृच्छिक चर X_k को निम्न प्रकार निरूपित कर सकते है —

$X_k=1$ जब K वें परीक्षण में सफलता होती है जिसकी कि प्रायिकता p है। अन्यथा $X_k=0$ और इसकी प्रायिकता q है।

इस स्थिति में n स्वतन्त्र प्रयोगों के योग का मान सफलताओं की संख्या के समान होता है।

माना कि n परीक्षणों में कुल सफलताओं की संख्या r है अर्थात्

$$x_1+x_2+x_3+ \quad +x_n=r \text{ है।}$$

प्रत्येक x स्वतन्त्र है अतः X अंगों में r सफलताओं और $(n-r)$ असफलताओं की प्रायिकता $p^r q^{n-r}$ है। यह विदित है कि n प्रयोगों में r सफल घटनाएँ $\binom{n}{r}$ ढंग में घटित हो सकती हैं। अतः n प्रयोगों में r सफलताओं की प्रायिकता P_r निम्न है —

$$P_r=\binom{n}{r} p^r q^{n-r} \tag{6 2}$$

दायी ओर का व्यञ्जक $(q+p)^n$ के द्विपद विस्तार में $(r+1)$ वाँ पद है।

इस बटन के सामान्य गुण इस प्रकार है। यह एक असतत बटन है जिसके प्राचल[1] n और p है। n एक धनात्मक पूर्ण संख्या है और p का मान 0 से 1 तक विचरण करता है। द्विपद बटन का माध्य np और प्रसरण npq है।

$p=0$ या $p=1$ होने की दशा में कुछ कठिनाइयाँ उत्पन्न हो जाती हैं किन्तु इनका वर्णन यहाँ नहीं दिया गया है।

द्विपद बटन फलन

$$B_n(x\ n)=P(r\leqslant x)$$

$$=\sum_{r\leqslant x}\binom{n}{r} p^r q^{n-r} \tag{6 3}$$

इस प्रकार के बटन को चित्र (6–1) में दिखाया जा चुका है। जिसमें कि $(x+1)$ वियुक्त सहति बिन्दुओं $r=0, 1, 2\ 3 \quad x$ पर ऊँचाई $P(r\leqslant x)$ के समान है।

उदाहरण 6 1 एक अस्पताल में एक दिन में 10 प्रसव हुए। इन 10 प्रसवों में से 4 लड़के होने की प्रायिकता निम्न प्रकार ज्ञात कर सकते है बच्चा या तो लड़का हो

1 प्राचल (Parameter) समष्टि के किसी अचर मान को प्राचल कहते हैं जैसे समष्टि माध्य, इसका प्रसरण आदि।

सकता है या लडकी । माना कि लडका होने की प्रायिकता $p=\frac{1}{2}$ और लडकी होने की प्रायिकता $q=\frac{1}{2}$ है । प्रति दिन 4 लडके होने की प्रायिकता (सूत्र 6 2) द्वारा निम्नांकित है —

$$P_r = \binom{10}{4} (\tfrac{1}{2})^4 (\tfrac{1}{2})^{10-4}$$

$$= \frac{10\ 9\ 8\ 7}{4\ 3\ 2\ 1} \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^6$$

$$= \frac{10\ 3\ 7}{2^{10}} = \frac{210}{1024} = 205$$

यदि कम से कम 4 लडके होने की प्रायिकता ज्ञात करनी हो तो सूत्र (6 3) का प्रयोग करना होता है । यहाँ $r \geq x$ का प्रयोग किया जाता है इस स्थिति में r के मान 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 हो सकते हैं । इन सबके लिये प्रायिकताओं का योग कम से कम 4 लडके होने की प्रायिकता बतायेगा ।

अत

$$P(r \geq 4) = \left\{ \binom{10}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^{10-4} + \binom{10}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{2}\right)^{10-5} \right.$$

$$+ \binom{10}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^6 \left(\frac{1}{2}\right)^{10-6} + \binom{10}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^7 \left(\frac{1}{2}\right)^{10-7}$$

$$+ \binom{10}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^8 \left(\frac{1}{2}\right)^{10-8} + \binom{10}{9}\left(\frac{1}{2}\right)^9 \left(\frac{1}{2}\right)^{10-9}$$

$$\left. + \binom{10}{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{10} \right\}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \left\{ \binom{10}{4} + \binom{10}{5} + \binom{10}{6} + \binom{10}{7} + \binom{10}{8} + \binom{10}{9} + \binom{10}{10} \right\}$$

$$= \frac{1}{210} (210 + 252 + 210 + 120 + 45 + 10 + 1)$$

$$= \frac{848}{1024} = \cdot 828$$

उपर्युक्त घटना की प्रायिकता अन्य रूप में भी ज्ञात कर सकते हैं । वह यह कि पहिले 4 से कम लडके होने अर्थात् अधिक से अधिक 3 लडके होने की प्रायिकता ज्ञात कर लें और इसे 1 में से घटा दें तो कम से कम 4 लडके होने की प्रायिकता ज्ञात हो जाती है ।

3 या 3 से कम लडके होने की स्थिति मे

$$r=0, 1, 2, 3,$$

इस घटना की प्रायिकता

$$P(r\leqslant 3)=\sum_{r=0}^{3}\binom{n}{r}p^{r}q^{n-r}$$

$$P(r\leqslant 3)=\binom{10}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^{0}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}+\binom{10}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^{1}\left(\frac{1}{2}\right)^{10\ 1}$$

$$+\binom{10}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{10\ 2}+\binom{10}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{10-3}$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\left\{\binom{10}{0}+\binom{10}{1}+\binom{10}{2}+\binom{10}{3}\right\}$$

$$=\frac{1}{2^{10}}\left(1+10+\frac{10\ 9}{2\ 1}+\frac{10\ 9\ 8}{3\ 2\ 1}\right)$$

$$=\frac{176}{1024}$$

$$=172$$

अत कम से कम 4 लडके प्रति दिन होने की प्रायिकता,

$$P(r\geqslant 4)=1-P(r\leqslant 3)$$

$$=1-172$$

$$=828$$

टिप्पणी : इसी प्रकार अन्य किसी भी द्विधा चर के लिए जो द्विपद बटन का पालन करता है प्रायिकता ज्ञात कर सकते है। इसी प्रकार क कुछ अन्य उदाहरण प्रायिकता सिद्धान्त के अध्याय मे दिये गये हैं।

उपर्युक्त उदाहरण मे द्विपद बटन का माध्य,

$$np=10\ \tfrac{1}{2}=5 \text{ है}$$

और प्रसरण,

$$npq=10\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}=2\ 5 \text{ है।}$$

द्विपद बटन का अभिलक्षण फलन

द्विपद बटन का अभिलक्षण फलन सूत्र (5 56) द्वारा निम्न प्रकार ज्ञात कर सकते हैं।

$$E\left(e^{itr}\right) = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} p^{r} q^{n-r} e^{itr} \quad ....(6.4)$$

$$= \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} (pe^{it})^{r} q^{n-r}$$

$$= (q+pe^{it})^{n} \quad ....(6.4.1)$$

प्रमेय 6.1 : यदि r_1 और r_2 दो स्वतन्त्र चर हैं जो द्विपद बंटन का पालन करते हैं और इनके प्राचल क्रमशः (p, n_1) व (p, n_2) है, तो (r_1+r_2) का बंटन भी द्विपद बंटन होता है।

प्रमाण चर (r_1+r_2) का अभिलक्षण फलन

$$\phi(t) = E\left\{e^{it(r_1+r_2)}\right\}$$

$$= E\left(e^{itr_1} \, e^{itr_2}\right) = E\left(e^{itr_1}\right) E\left(e^{itr_2}\right)$$

$$= \left(pe^{it}+q\right)^{n_1}\left(pe^{it}+q\right)^{n_2}$$

$$= \left(pe^{it}+q\right)^{n_1+n_2}$$

दायीं ओर का व्यंजक द्विपद बंटन का अभिलक्षण फलन है जिसके कि प्राचल p और (n_1+n_2) हैं।

बरनूली प्रमेय

माना n परीक्षणों में r सफलताएँ होती है और एक परीक्षण में सफलता की प्रायिकता p है तो अनुपात $\frac{r}{n}$ और इसके माध्य p का अन्तर एक धनात्मक अल्पणु संख्या ϵ से अधिक न होने की प्रायिकता शून्य की ओर प्रवृत्त होती है जबकि n अनन्त की ओर प्रवृत्त होता है। अर्थात्

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{r}{n}-p\right| > \epsilon\right) = 0 \quad ....(6.5)$$

इस प्रमेय को इस प्रकार समझ सकते है। यदि एक परीक्षण को समान परिस्थितियों में बहुत बार, माना n बार, करें और इनमें r सफलताएँ प्राप्त हों तो अनुपात $\frac{r}{n}$ लगभग p के समान होता है जबकि एक परीक्षण में सफलता की प्रायिकता p है।

आघूर्ण जनक फलन

द्विपद बंटन के लिए आघूर्ण जनक फलन निम्न प्रकार ज्ञात कर सकते हैं —

$$M(t) = E(e^{tr})$$

$$= \sum_{r=0}^{n} e^{tr} \binom{n}{r} p^r q^{n-r} \quad \text{....(6 6)}$$

$$= \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} (pe^t)^r q^{n-r}$$

$$= (pe^t + q)^n \quad \text{....(6 7)}$$

(6 7) में $(pe^t+q)^n$ का एक बार, दो बार, ..., k बार अवकलन करके, और t का मान शून्य रखकर क्रमशः आघूर्ण $\mu'_1, \mu'_2, \mu'_3, \ldots \mu'_k$ ज्ञात किये जा सकते हैं। जैसे

$$\frac{d}{dt} M(t) = \frac{d}{dt} (pe^t+q)^n$$

$$= n (pe^t+q)^{n-1} pe^t$$

$t=0$ रखने पर,

$$\mu'_1 = np \quad \text{....(6 8)}$$

$$\because \quad (p+q=1,\ e^0=1)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \{M(t)\} = \frac{d}{dt} \left\{ \frac{d}{dt} M(t) \right\}$$

$$= \frac{d}{dt} \left\{ npe^t \ (pe^t+q)^{n-1} \right\}$$

$$= npe^t (pe^t+q)^{n-1} + n(n-1)\, pe^t\, (pe^t+q)^{n-2}\, pe^t$$

$t=0$ रखने पर,

$$\mu'_2 = np + n(n-1)\, p^2$$

$$= np + n^2 p^2 - np^2$$

$$= np + n^2 p^2 - np\,(1-q)$$

$$= np + n^2p^2 - np + npq$$

$$= n^2p^2 + npq \quad \text{....(6 9)}$$

हम जानते हैं कि,

$$\mu_2 = \mu'_2 - \mu'^2_1$$

$$\therefore \quad \mu_2 = n^2 p^2 + npq - (np)^2$$

$$= npq \qquad \text{....(6.10)}$$

इसी प्रकार $\mu_3 = npq\ (q - p)$ ....(6.11)

और $\mu_4 = npq\ \{1 + 3\ (n-2)pq\}$ ....(6.12)

आवश्यकता पड़ने पर किसी भी अन्य उच्च क्रम के आघूर्ण पाठक स्वयं ज्ञात कर सकते हैं।

प्वासों-बंटन

यदि एक यादृच्छिक चर X का प्रायिकता बंटन इस प्रकार है कि,

$$P\ (X = r) = \frac{e^{-m} \cdot m^r}{r!} \qquad \text{....(6 13)}$$

(जहाँ m एक धनात्मक अचर मान है और r=0, 1, 2, 3, ...) है तो चर X को प्वासो बंटित चर कहा जाता है।

एक द्विपद बंटन में, जिसके प्राचल (n, p) हैं, चर के मान r धारण करने की प्रायिकता $\binom{n}{r} p^r q^{n-r}$ है।

यदि $np = m$ हो और n अत्यधिक बृहत् हो तो यह प्रायिकता लगभग

$$\frac{e^{-m} \cdot m^r}{r!}$$

होगी। इस तथ्य को निम्न प्रकार सिद्ध कर सकते हैं :—

सूत्र (6 2) के अनुसार n प्रयोगों में r सफलताओं की प्रायिकता P_r निम्न है :—

$$P_r = \binom{n}{r} p^r q^{n-r}$$

$$= \binom{n}{r} \left(\frac{m}{n}\right)^r \left(1 - \frac{m}{n}\right)^{n-r} \qquad \left\{\begin{array}{l} \because q = 1 - p \\ \text{और } p = \frac{m}{n} \end{array}\right\}$$

या $$P_r = \frac{n(n-1)(n-2)....(n-r+1)}{r!} \left(\frac{m}{n}\right)^r \left(1 - \frac{m}{n}\right)^n \left(1 - \frac{m}{n}\right)^{-r}$$

$$= \frac{m^r}{r!} \left(1 - \frac{m}{n}\right)^n \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) ...... \left(1 - \frac{r-1}{n}\right)}{\left(1 - \frac{m}{n}\right)^r}$$

$$=\frac{m^r}{r!}\, e^{-m} \quad \text{जब } n \to \infty$$

यहाँ r का मान कोई पूर्ण संख्या 0, 1, 2, 3, ... हो सकता है।
अत किसी यादृच्छिक चर X के प्रायिकता फलन,

$$P(X=r)=\frac{e^{-m}\, m^r}{r!}$$

जबकि $r=0, 1, 2, \ldots$

को प्वासों-बटन फलन कहते हैं। यह एक असतत बटन है जिसमें परीक्षणो की सख्या बहुत बडी होनी है और इस सख्या की अपेक्षा मे सफलताओ की सख्या बहुत कम होती है। इस बटन की विशेषता यह है कि इसका एक ही प्राचल है। इस बटन का माध्य एव प्रसरण समान होता है। यहाँ इस बटन का माध्य व प्रसरण m है। प्वासो बटन के कुछ उदाहरण निम्नांकित हैं —

1 एक शहर मे घोडे के लात मारने से मृतको की संख्या।
2 100 बालबेयरिंगो के प्रत्येक डिब्बे मे दोषपूर्ण बालबेयरिंगो की सख्या।
3 किसी टकन किये हुए पृष्ठ मे टकन के कारण अशुद्धियों की सख्या, आदि।

प्वासों-बंटन का अभिलक्षण फलन

प्वासो-बटन का अभिलक्षण फलन निम्न प्रकार है —

$$\phi_r(t)=E\,(e^{itr})$$
$$=\sum_{r=0}^{\infty} e^{itr}\,\frac{e^{-m}\, m^r}{r!}$$
$$=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(me^{it})^r\, e^{-m}}{r!}$$
$$=e^{me^{it}}.\,e^{-m}$$
$$=e^{m(e^{it}-1)} \qquad \ldots(6\,14)$$

इसी प्रकार प्वासो-बटन का आघूर्ण जनक फलन,

$$M_r(t)=E\,(e^{tr})$$
$$=e^{m(e^t-1)} \qquad \ldots(6\,15)$$

है। इस आघूर्ण जनक फलन का t के सम्बन्ध मे एक बार अवकलन करके t=0 रखने पर पहला आघूर्ण ज्ञात हो जाता है।

$$\frac{d}{dt}\,M(t)=\frac{d}{dt}\left\{e^{m(e^t-1)}\right\}$$

$$= e^{m(e^t-1)} \; me^t$$

$t=0$ रखने पर,

$$\mu'_1 = m \qquad \text{....(6 16)}$$

फलन M (t) का दो बार अवकलन करके $t=0$ रखने पर दूसरा आघूर्ण μ'_2 ज्ञात हो जाता है।

$$\frac{d^2}{dt^2}\{M(t)\} = \frac{d}{dt}\{me^t \, e^{m(e^t-1)}\}$$

$$= me^t \, e^{m(e^t-1)} + me^t \, e^{m(e^t-1)} me^t$$

$t=0$ रखने पर,

$$\mu'_2 = m + m^2$$

इसलिए प्वासो-बटन का प्रसरण अर्थात् दूसरा माध्य का परित आघूर्ण,

$$\mu_2 = \mu'_2 - \mu'^2_1$$

$$= m + m^2 - m^2 = m \qquad \text{....(6.17)}$$

अत (6 16) और (6 17) द्वारा सिद्ध होता है कि प्वासो-बटन का माध्य व प्रसरण एक समान होता है। दिये हुए प्वासो-बटन के लिए इसका मान m है।

इसी प्रकार k बार M (t) का अवकलन करके $t=0$ रख कर k वाँ आघूर्ण ज्ञात किया जा सकता है जबकि $k=1, 2, 3,$

प्रमेय 6 2 यदि X_1 और X_2 दो स्वतन्त्र चर है जिनका बटन, प्वासो बटन है और *प्राचल क्रमश m_1 व m_2 हैं तो (X_1+X_2) का बटन भी प्वासो-बटन होता है जिसका प्राचल (m_1+m_2) है।*

प्रमाण (X_1+X_2) का अभिलक्षण फलन

$$E\left\{e^{it(X_1+X_2)}\right\} = E\left(e^{itX_1} \, e^{itX_2}\right)$$

$$= E\left(e^{itX_1}\right) E\left(e^{itX_2}\right)$$

$$= e^{m_1(e^t-1)} \, e^{m_2(e^t-1)}$$

$$= e^{(m_1+m_2)(e^t-1)}$$

उपर्युक्त अभिलक्षण फलन, प्वासों-बटन का अभिलक्षण फलन है जिसका प्राचल (m_1+m_2) है। अत: (X_1+X_2) का बटन, प्वासो-बटन है और इसके प्राचल (m_1+m_2) है।

ऋणात्मक द्विपद बंटन

यह एक विशेष प्रकार का बटन है जिसका प्रयोग मुख्यत उद्योगो से उत्पादित वस्तुओं के सम्बन्ध मे होता है। मान लीजिये प्रयोग मे कुल परीक्षण $(x+r)$ किये गये हैं जिनमे r सफलताएँ हैं अर्थात् परीक्षण तबतक करते रहते हैं जबतक कि r सफलताएँ प्राप्त न हो जाय माना कि एक सफलता की प्रायिकता p है और $(x+r)$ परीक्षणो मे r सफलताओ की प्रायिकता $P(x)$ है। $(r-1)$ और rवी सफलता की सम्मिलित प्रायिकता, दोनो सफलताओ की प्रायिकता के गुणनफल के समान होती है क्योकि सब परीक्षण स्वतन्त्र हैं। अत द्विपद बटन की सहायता से

$$P[X=r]=\binom{x+r-1}{r-1}p^{r-1}q^{x}\cdot p$$

$$=\binom{x+r-1}{x}p^{r}\cdot q^{x} \qquad ....(6.18)$$

जब कि $x=0, 1, 2, ...$ और $r>0$, $0<p<1$

अत x के समस्त सम्भव मानो के लिए प्रायिकता,

$$\sum_{x=0}^{\infty} P(x)=\sum_{x=0}^{\infty}\binom{x+r-1}{x}p^{r}q^{x}$$

$$=\sum_{x=0}^{\infty}\binom{x+r-1}{x}p^{r}q^{x} \qquad ....(6\ 18\ 1)$$

$$=1$$

$$\left\{\because\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r}\right\}$$

(6 18) द्वारा दिये गये बटन को ऋणात्मक द्विपद बटन कहते हैं। इस बटन का माध्य $\frac{rq}{p}$ और प्रसरण $\frac{rq}{p^2}$ है। हम जानते हैं कि

$$\binom{x+r-1}{r-1}=\binom{x+r-1}{x}=\frac{(x+r-1)(x+r-2)...(r+1)(r)}{x!}$$

और $$\binom{-r}{x}=\frac{(-r)(-r-1)(-r-2)\ .\ (-r-x+1)}{x!}$$

$$=(-1)^{x}\frac{r(r+1)(r+2)....(x+r-1)}{x!}$$

$$=(-1)^{x}\binom{x+r-1}{r-1}$$

(6 18) द्वारा,

$$P(x) = \binom{-r}{x} p^r (-1)^x q^x$$

$$= \binom{-r}{x} p^r (-q)^x \qquad ....(6\ 19)$$

(6 19) द्वारा निरूपित बटन को पास्कल बटन (Pascal's distribution) भी कहते हैं। इस बटन के दो प्राचल p व r हैं।

यदि पास्कल-बटन मे r=1 रख दिया जाय तो

$$P(x) = \binom{-1}{x} p (-q)^x \qquad ...(6\ 20)$$

जब कि X=O, 1, 2, 3, ...

(6 20) द्वारा दिये गये बटन को गुणोत्तर बटन कहते हैं।

टिप्पणी : प्राय यह जानने की उत्कंठा होती है कि (6 19) द्वारा दिये गये बटन को ऋणात्मक द्विपद बटन क्यो कहते हैं ? इसका कारण यह है कि द्विपद बटन मे P (x=r), $(q+p)^n$ का (r+1)वाँ पद होता है और उपर्युक्त बटन मे प्रायिकता P (x), $(Q+P)^{-r}$ का (x+1)वाँ पद होता है जबकि $\frac{Q}{P} = -q$ और $\frac{1}{P} = p$ है। साथ ही Q+P=1

$(Q+P)^{-r}$ का (x+1) वाँ पद

$$= \binom{-r}{x} Q^x P^{-r-x}$$

$$= \binom{-r}{x} \left(\frac{Q}{P}\right)^x \left(\frac{1}{P}\right)^r$$

$$= \binom{-r}{x} (-q)^x (p)^r$$

$$= \binom{-r}{x} p^r (-1)^x q^x$$

अत (x+1)वाँ पद और (6 19) सर्वसम हैं।

(Q+P) की घात −r है अत उपर्युक्त बटन को ऋणात्मक द्विपद बटन कहते हैं।

अतिगुणोत्तर बंटन

माना कि एक थैले मे n गेंदें हैं और इनमे से n_1 सफेद गेंदें हैं और n_2 काली गेंदें हैं।

$$\therefore n = n_1 + n_2$$

इस थैले मे से r गेंदें बिना प्रतिस्थापन के थैले को हिलाने के पश्चात् निकाली जाती हैं।

माना कि r में से x सफेद गेंदें होने की प्रायिकता P (x) है। इस प्रकार चयनकृत गेंदों में से (r – x) काले रंग की गेंदें होंगी। अतः प्रायिकता

$$P(x) = \frac{\binom{n_1}{x}\binom{n_2}{r-x}}{\binom{n}{r}} \qquad \text{....(6.21)}$$

जब कि $x = 0, 1, 2, ..., r$

और $x \leq r, \quad r \leq n$

प्रायिकता बटन फलन के लिए,

$$\sum_{x=0}^{r} P(x) = \sum_{x=0}^{r} \binom{n_1}{x}\binom{n_2}{r-x} \Big/ \binom{n}{r}$$

$$= \binom{n}{r} \Big/ \binom{n}{r} = 1$$

(6.21) द्वारा निरूपित बटन को अतिगुणोत्तर बटन कहते हैं। इस बटन का

$$\text{माध्य} = \frac{n_1 r}{n}$$

और $$\text{प्रसरण} = \frac{n_1 n_2 r (n-r)}{n^2 (n-1)}$$

प्रश्नावली

1. द्विपद बटन के मुख्य गुण बताइये।
2 प्यासों-बटन और द्विपद बटन का अन्तर स्पष्ट रूप से बताइये।
3 यदि X_1 और X_2 दो यादृच्छिक स्वतन्त्र चर हैं जो कि प्यासों-बटित हैं और इनके प्राचल क्रमशः λ_1 और λ_2 हैं, तो सिद्ध करो कि $(X_1 + X_2)$ का बटन भी प्यासों-बटन है जिसका प्राचल $(\lambda_1 + \lambda_2)$ है।
4. यदि n वृहद् हो और p अल्प हो, तो सिद्ध कीजिये कि द्विपद बटन

   $P(r) = \binom{n}{r} p^r q^{n-r}$ प्यासों-बटन की ओर प्रवृत्त होता है।
5. प्यासों-बटन के शून्य के परित प्रथम तथा द्वितीय आघूर्ण ज्ञात कीजिये।
6. एक द्विपद बटन का माध्य 18 और प्रसरण 6 है तो n, p व q के मान परिकलित कीजिये।
7. प्यासों-बटन का अभिलक्षण फलन ज्ञात कीजिये।
8 द्विपद बटन और ऋणात्मक द्विपद बटन का अन्तर स्पष्ट कीजिये।

9 आघूर्ण जनित फलन किस प्रकार से ज्ञात किये जाते हैं और इनका बटन फलनों के लिए क्या महत्त्व है ? विस्तार पूर्वक बताइये।

10. तीन अप्रचलित असतत बटनों के नाम बताइये और प्रत्येक का एक उदाहरण दीजिये।

11. किसी असतत बटन का स्वरूप किन बातों पर निर्भर रहता है ? इसका उल्लेख कीजिये।

12. यदि λ और μ_r क्रमश: प्यासों-बटन के माध्य और केन्द्रीय rवाँ आघूर्ण हैं तो निम्न आवृत्ति-सबंध को ज्ञात कीजिये।

$$\mu_{r+1} = r\lambda\mu_{r-1} + \lambda \frac{d}{d\lambda}\mu_r$$

और β_1 तथा β_2 भी ज्ञात कीजिये। (एम० ए० पटना, 1956)

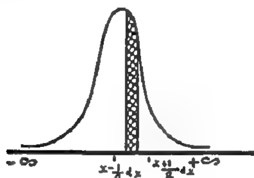
□ □ □

7 | कुछ मुख्य संतत प्रायिकता बंटन

एक अत्यणु अन्तराल $(x - \frac{1}{2} dx)$ और $(x + \frac{1}{2} dx)$ में एक सतत चर X के विचर मानों के होने की प्रायिकता f (x) निम्न सम्बन्ध के अनुसार होती है —

$$\lim_{dx \to 0} \frac{P\,(x - \frac{1}{2}dx < X < x + \frac{1}{2}dx)}{dx} = f\,(x) \qquad ....(7.1)$$

फलन f (x) (dx) को प्रायिकता घनत्व फलन कहते हैं। इसी प्रायिकता को चित्र (7–1) में दिखाया गया है।



चित्र 7–1 रेखाच्छादित क्षेत्र जो $P\,(x - \frac{1}{2}\,dx < X < x + \frac{1}{2}\,dx)$ को प्रदर्शित करता है।

f (x) dx को प्रायिकता अवकल (probability differential) कहते हैं। सतत वक्र y=f (x) को प्रायिकता घनत्व वक्र कहते हैं। चर X की सीमाएँ अनन्त अर्थात् $-\infty < X < \infty$ मानी जाती हैं। यदि चर X की सीमाएँ परिमित हो तो भी चर X की सीमाएँ अनन्त मान सकते हैं। ऐसी दशा में यह अभिधारणा रखनी होती है कि प्रायिकता घनत्व फलन निर्धारित सीमाओं के बाहर शून्य है। इसी बात को गणितीय भाषा में निम्न प्रकार कह सकते हैं —

माना कि चर X की सीमाएँ (a, b) हैं तो प्रायिकता घनत्व फलन f (x) निम्न प्रकार दिया जा सकता है —

$f\,(x) = 0$, जबकि $x < a$ या $x > b$

$f\,(x) = \phi\,(x)$, जहाँ $\phi\,(x)$, सीमाओं a व b में प्रायिकता घनत्व फलन है।

सतत बंटनों का सैद्धान्तिक विवरण अध्याय 5 में दिया जा चुका है। यहाँ केवल सतत बंटन दिये गये हैं।

प्रसामान्य बंटन

यदि किसी चर X के बंटन का प्रायिकता घनत्व फलन निम्न प्रकार का हो तो उसे प्रसामान्य चर कहते है और उसके बंटन को प्रसामान्य बंटन कहते हैं।

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} \qquad ..(7\ 2)$$

जहाँ $\sigma>0$ और μ दो प्राचल हैं। यह सिद्ध किया जा सकता है कि (7 2) मे बंटन का माध्य μ और मानक विचलन σ है। इस बंटन को $N(\mu, \sigma)$ से सूचित करते हैं।

यदि $\mu=0$ और $\sigma=1$ हो तो समीकरण (7 2) का रूप निम्नांकित हो जाता है –

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{1}{2}x^2} \qquad ...(7\ 3)$$

इस स्थिति मे चर X को मानक प्रसामान्य विचर (standard normal variate) कहते हैं। मानक प्रसामान्य बंटन फलन और घनत्व फलन की सारणियाँ बनायी जा चुकी हैं। यदि X एक $N(\mu, \sigma)$ चर है और हम उसके अचर मानो x_1 और x_2 के बीच होने की प्रायिकता ज्ञात करना चाहते है तो

$$P(x_1<X<x_2)=P\left(\frac{x_1-\mu}{\sigma}<\frac{X-\mu}{\sigma}<\frac{x_2-\mu}{\sigma}\right)$$

$$=F\left(\frac{x_2-\mu}{\sigma}\right)-F\left(\frac{\mu_1-\mu}{\sigma}\right) \qquad ..(7\ 4)$$

*यह सिद्ध किया जा सकता है कि यदि $X\sim N(\mu, \sigma)$ है तो $\frac{(X-\mu)}{\sigma}$ मानक प्रसा-*मान्य विचर होगा। इसके बंटन फलन की सारणियाँ बनायी जा चुकी हैं और हम $P(x_1\leqslant X\leqslant x_2)$ ज्ञात कर सकते हैं।

माना कि $Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$ है, जहाँ $Z\sim N(0, 1)$ .. (7 5)

कार्ल पियर्सन द्वारा दी गयी सारणी से 0 और Z पर कोटियो के बीच का क्षेत्रफल ज्ञात किया जा सकता है। यही क्षेत्रफल एक घटना की प्रायिकता या कुल का अनुपात बताता है। यदि इस क्षेत्रफल को 100 से गुणा करदें तो एकको या अशा का 0 से Z के बीच प्रतिशत ज्ञात हो जाता है। मानक विचर के उपयोग को निम्न उदाहरण द्वारा प्रदर्शित किया गया है।

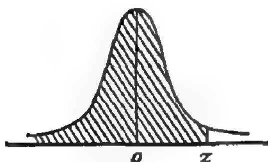
उदाहरण 7.1 हाई स्कूल की परीक्षा म एक शहर के विद्यार्थियो के प्राप्त अको का माध्य 228 और मानक विचलन 36 है, जहा पूर्णांकों की सख्या 500 हैं। यदि यह कल्पना की गयी है कि अको का बंटन प्रसामान्य है तो ज्ञात करना है कि कितने प्रतिशत

विद्यार्थियों के प्राप्तांक (1) 350 से कम हैं (2) 165 से कम हैं (3) 240 से 299 तक हैं (4) 300 से अधिक हैं (5) 150 से 250 तक हैं।

(1) सूत्र (7 5) के अनुसार इस स्थिति में

$$Z = \frac{350 - 229}{36} = 3\ 39$$

सारणी द्वारा 0 से Z तक का क्षेत्रफल ज्ञात कर लिया जो कि 0 4997 है।



चित्र 7–2 रेखाच्छादित क्षेत्र जो P (Z< 3 39) को प्रदर्शित करता है।

यहाँ चित्र (7–2) में दिखाये गये रेखाच्छादित भाग का क्षेत्रफल आवश्यक अनुपात को प्रदर्शित करता है। इस भाग का क्षेत्रफल $= 0\ 5 + 0\ 4997$

$= 0\ 9997$

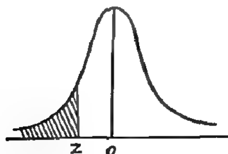
अतः 350 से कम अंक पाने वाले विद्यार्थियों का प्रतिशत $= 0\ 9997 \times 100$

$= 99\ 97$

(2) इस स्थिति में

$$Z = \frac{165 - 228}{36}$$

$$= -1\ 75$$



चित्र (7–3) रेखाच्छादित क्षेत्र जो P (Z<– 1 75) को प्रदर्शित करता है।

चित्र (7.3) म दिये गये रेखाच्छादित क्षेत्र को ज्ञात करने के लिए पहले 0 से 1 75 तक का क्षेत्र ज्ञात करके, फिर 0 5 मे से इस क्षेत्र को घटा देना चाहिए जिससे आवश्यक क्षेत्रफल ज्ञात हो जाता है।

0 से 1 75 तक का क्षेत्रफल=0·4599

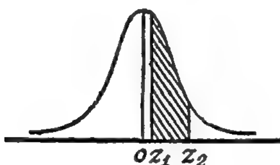
अत रेखाकित क्षेत्र=0 5 − 0 4599= 0411

अत विद्यार्थियो का प्रतिशत=0 411 × 100=4 11

(3) इस स्थिति मे Z के दो मान ज्ञात किये गये हैं। इन Z मानो के बीच का क्षेत्र ही आवश्यक क्षेत्र है जैसा कि चित्र (7–4) म दिखाया गया है।

$$Z_1 = \frac{240 - 228}{36} = 333$$

$$Z_2 = \frac{299 - 228}{36} = 1\ 97$$



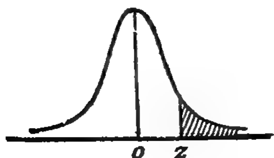
चित्र 7–4 रेखाच्छादित क्षेत्र जो P (333 ≤ Z ≤ 1 97) को प्रदर्शित करता है।

0 से Z_2 तक का क्षेत्रफल=0 4756

0 से Z_1 तक का क्षेत्रफल= 1293

अत Z_1 और Z_2 के बीच का क्षेत्रफल=0 4756 − 0 1293= 3463

अतः विद्यार्थियो का प्रतिशत=0 3463 × 100=34 63



चित्र 7–5 रेखाच्छादित क्षेत्र जो P (Z > 2 0) को प्रदर्शित करता है।

(4) इस स्थिति मे

$$Z=\frac{300-228}{36}=2\ 0$$

0 से Z तक का क्षेत्रफल=0 4772

चित्र (7.5) के अनुसार रेखाच्छादित भाग का क्षेत्रफल=0 5 − 0 4772=0 0228

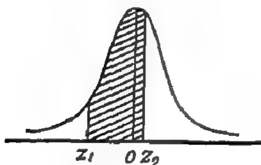
अत प्रतिशत विद्यार्थियों की संख्या=0 0228 × 100

=2 28

(5) इस स्थिति मे Z के दो मान ज्ञात करने होते है। यहाँ

$$Z_1=\frac{150-228}{36}=-2\ 17$$

$$Z_2=\frac{250-228}{36}=0\ 61$$



चित्र 7.6 रेखाच्छादित क्षेत्र जो $P(-2\ 17<Z<0\ 61)$ को प्रदर्शित करता है।

0 से Z_1 तक का क्षेत्र=0 4850

0 से Z_2 तक का क्षेत्र=0 2291

चित्र (7.6) के अनुसार Z_1 और Z_2 के बीच का रेखांकित क्षेत्र= 4850+0 2291

=0 7141

अत प्रतिशत विद्यार्थियों की संख्या=0 7141 × 100

=71 41

टिप्पणी यदि किसी प्रश्न में प्रतिशत संख्या न पूछकर, प्रायिकता पूछी गयी हो तो इन भागो का क्षेत्रफल ही प्रायिकता को निरूपित करता है अर्थात् इन संख्याओं को 100 से गुणा करने की आवश्यकता नहीं है।

प्रसामान्य बंटन के लिए माध्य के परित आघूर्ण

सतत बटन के लिए माध्य के परित Kवां आघूर्ण सूत्र (5 47.1) द्वारा ज्ञात कर सकते हैं।

स्थिति 1 : यदि K एक सम सख्या है,

अर्थात् K=2r, जहाँ r=1, 2, 3,.... ...है तो निम्न व्यजक का समाकलन करके Kवां आघूर्ण ज्ञात कर सकते है।

$$\mu_{2r}=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^{2r}\;\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}\;dx \qquad ....(7.6)$$

(7 6) का समाकलन करने पर निम्न सम्बन्ध प्राप्त होता है। पाठक चाहे तो स्वय समाकलन करके इस सम्बन्ध की पुष्टि कर सकते हैं।

$$\mu_{2r}=(2r-1)\;\sigma^2\;\mu_{2r-2} \qquad ....(7.7)$$

अतः प्रेरण विधि द्वारा,

$$\mu_{2r-2}=(2r-3)\;\sigma^2\;\mu_{2r-4} \qquad ....(7.8)$$

समीकरण (7.7) में μ_{2r-2} का मान रखने पर,

$$\mu_{2r}=(2r-1)(2r-3)\;\sigma^4\;\mu_{2r-4} \qquad ....(7.9)$$

इसी प्रकार निरन्तर प्रेरण विधि द्वारा,

$$\mu_{2r}=(2r-1)(2r-3)(2r-5)....3\cdot1\;\sigma^{2r} \qquad ....(7.10)$$

r को विभिन्न मान 1, 2, 3,.... आदि देकर कोई सा भी सम क्रम का आघूर्ण ज्ञात कर सकते हैं।

$\mu_2=\sigma^2$ जब r=1

$\mu_4=3\sigma^4$ जब r=2

$\mu_6=15\sigma^6$ जब r=3

आदि।

प्रसामान्य वक्र के लिए ककुदता-गुणांक 3 के बराबर होता है। इस तथ्य को यहाँ आघूर्णों की सहायता से सिद्ध किया जा सकता है।

$$\beta_2=\frac{\mu_4}{\mu_2^2}$$

$$=\frac{3\sigma^4}{(\sigma^2)^2}$$

$$=3$$

स्थिति 2 · यदि K एक विषम संख्या है,

अर्थात् $K=2r+1$

है, जहाँ $r=0, 1, 2, 3, ...$ है तो निम्न समाकलन द्वारा K वाँ आघूर्ण μ_{2r+1} ज्ञात कर सकते हैं।

$$\mu_{2r+1} = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^{2r+1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} dx \quad ....(7.11)$$

यदि $\frac{x-\mu}{\sigma}=Z$ का प्रतिस्थापन करदें तो उपर्युक्त समाकलन का रूप निम्न हो जाता है :—

$$\mu_{2r+1} = \frac{\sigma^{2r+1}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} Z^{2r+1} e^{-\frac{Z^2}{2}} dZ \quad ....(7.11.1)$$

(7.11.1) द्वारा दिये गये समाकलन में Z का फलन विषम है। अतः इस समाकलन का मान शून्य है।

इस प्रकार $\mu_{2r+1}=0$, जहाँ $r=1, 2, 3, ...$

या $\mu_1=\mu_3=\mu_5=....=0$

इससे सिद्ध होता है कि प्रसामान्य बटन के विषम क्रम के माध्य के परित सब आघूर्ण शून्य के बराबर होते हैं।

प्रसामान्य बंटन का अभिलक्षण फलन

माना कि चर $X \sim N(\mu, \sigma)$ है। अध्याय 5 में दी गयी परिभाषा के अनुसार अभिलक्षण फलन,

$$\phi_x(t) = E(e^{itx})$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} dx \quad ....(7.12)$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} dx \quad ....(7.12.1)$$

प्रतिस्थापन $\frac{x-\mu}{\sigma}=Z$ का प्रयोग करके (7.12.1) का समाकलन करने पर अभिलक्षण फलन $\phi_x(t)$ ज्ञात हो जाता है जो कि निम्न प्रकार है :—

$$\phi_x(t) = e^{\left(it\mu - \frac{1}{2}t^2\sigma^2\right)} \qquad ....(7\ 13)$$

यदि $X \sim N(0, 1)$ है अर्थात् $\mu = 0$ और $\sigma = 1$ है तो प्रसामान्य बटन का अभिलक्षण फलन,

$$\phi_x(t) = e^{-\frac{1}{2}t^2} \qquad ...(7\ 13\ 1)$$

प्राप्त हो जाता है।

प्रमेय 1 · यदि स्वतन्त्र एव यादृच्छिक चरा X और Y के योग का बटन प्रसामान्य है तो चर X और Y भी अलग-अलग प्रसामान्य रूप में बटित होते हैं। यहाँ प्रमेय को सिद्ध नहीं किया गया है।

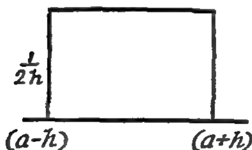
आयताकार बंटन

एक यादृच्छिक चर X का बटन आयताकार कहा जाता है यदि इसका बारम्बारता फलन अन्तराल $(a-h, a+h)$ में सदैव $\frac{1}{2h}$ के समान होता है और इस अन्तराल के बाहर शून्य होता है। अत प्रायिकता फलन

$$f(x) = \frac{1}{(a+h)-(a-h)} = \frac{1}{2h} \qquad ....(7.14)$$

$$= 0, \text{ अन्यथा}$$

जबकि $(a-h) < x < (a+h)$



चित्र 7.7 आयताकार बटन

इस बटन का माध्य a और प्रसरण $\frac{h^2}{3}$ के बराबर होता है। चर के रेखीय रूपान्तरण द्वारा बटन के विचरण विस्तार को किसी भी अन्तराल में परिवर्तित किया जा सकता है। उदाहरण के लिए चर,

$$U = \frac{X - a + h}{2h}$$

अन्तराल $(0, 1)$ में एक समान रूप से बटित है। इस स्थिति में,

$$f(u) = 1$$

$$= 0, \text{ अन्यथा} \qquad \text{जबकि} \quad 0 < u < 1$$

कौशी-बंटन

एक चर X के लिए कौशी-बंटन का बारम्बारता फलन,

$$f(x) = \frac{1}{\pi a} \frac{1}{1 + \left(\frac{x - \mu}{a}\right)^2} \qquad ...(7.15)$$

जहाँ $-\infty < x < \infty$

द्वारा दिया जाता है।

इस फलन में μ और a दो प्राचल हैं यदि $\mu = 0$ और $a = 1$ हो तो बारम्बारता फलन,

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1 + x^2)} \qquad ....(7.15.1)$$

होता है।

इस बंटन का अभिलक्षण फलन,

$$\phi_x(t) = e^{\mu it - a|t|} \qquad ....(7.16)$$

जहाँ $a > 0$

होता है।

कौशी-बंटन एक-बहुलकीय है और बिन्दु $x = \mu$ के परित सम है। μ इस बंटन की माध्यिका और बहुलक है। इस बंटन के किसी भी आघूर्ण का अस्तित्व नहीं है। इसके निम्न व उच्च चतुर्थक $(\mu - a)$ व $(\mu + a)$ होते हैं और अर्ध अन्तश्चतुर्थक परिसर a के समान है।

काई-वर्ग बंटन

यह बंटन सर्वप्रथम हेल्मर्ट (Helmert) और कार्ल पियर्सन (Karl Pearson) ने दिया। यदि X एक यादृच्छिक चर $N(0, 1)$ है तो X^2 का बारम्बारता फलन,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-\frac{x}{2}} \qquad ..(7.17)$$

होता है। जबकि $x > 0$

और $f(x) = 0$ जबकि $x < 0$

X^2 के बंटन का अभिलक्षण फलन,

$$\phi_x(t) = (1 - 2it)^{-\frac{1}{2}} \qquad ....(7.18)$$

होता है।

माना कि n स्वतन्त्र यादृच्छिक चर $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$ हैं जिनमे से प्रत्येक N (0, 1) बंटित है तो चर,

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^{n} X_j^2 \text{ से होता है ।}$$

(7 18) द्वारा हम जानते हैं कि प्रत्येक X_i^2 के बटन का अभिलक्षण फलन

$$(1 - 2it)^{-\frac{1}{2}}$$

है । χ^2 के बटन का अभिलक्षण फलन निम्न प्रकार ज्ञात कर सकते है ।

$$\phi(t) = E\left(e^{it\chi^2}\right)$$

$$= E\left\{e^{it(X_1^2+X_2^2+\ldots+X_n^2)}\right\}$$

$$= E\left(e^{itX_1^2}\right)E\left(e^{itX_2^2}\right)E\left(e^{itX_3^2}\right)\ldots E\left(e^{itX_n^2}\right)$$

$$= (1-2it)^{-\frac{n}{2}} \qquad \ldots(7.19)$$

(7.19) द्वारा दिये गये फलन $(1 - 2it)^{-\frac{n}{2}}$ को χ^2 बटन का अभिलक्षण फलन कहते हैं ।

गामा-बंटन

यदि किसी चर X के बटन का बारम्बारता फलन निम्नलिखित हो, तो उसे गामा बटन कहते हैं ।

$$f(x, \alpha, \beta) = \frac{\alpha^\beta}{\lceil\beta} x^{\beta-1} e^{-\alpha x} \qquad \ldots(7.20)$$

जबकि $x > 0$

$= 0$ जबकि $x < 0$

जहाँ $\alpha > 0, \beta > 0$ बटन के दो प्राचल हैं ।

इस बटन का अभिलक्षण फलन,

$$\phi_x(t) = \left(1 - \frac{it}{\alpha}\right)^{-\beta} \qquad \ldots(7\ 21)$$

है । यदि इस अभिलक्षण फलन में

$$\alpha = \frac{1}{2} \text{ और } \beta = \frac{n}{2}$$

के समान हो तो अभिलक्षण फलन का रूप निम्नांकित हो जाता है —

$$\phi_x(t) = (1-2it)^{-\frac{n}{2}} \qquad ....(7\ 21\ 1)$$

(7 21 1) द्वारा यह निष्कर्ष निकलता है कि χ^2 का बारम्बारता वक्र वही होगा जो

$$\alpha = \frac{1}{2} \text{ और } \beta = \frac{n}{2}$$

होने पर गामा बंटन के लिए है। अतः समीकरण (7 20) में

$$\alpha = \frac{1}{2},\ \beta = \frac{n}{2}$$

और x के स्थान पर χ^2 रखने पर χ^2–बंटन का प्रायिकता घनत्व फलन ज्ञात हो जाता है जो कि निम्नलिखित है —

$$f_n(\chi^2) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\left|\frac{n}{2}\right.} (\chi^2)^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{\chi^2}{2}} \qquad ....(7\ 22)$$

जबकि $\chi^2 \geq 0$

$= 0$ अन्यथा

χ^2–बंटन के एक मात्र प्राचल n को उस बंटन की स्वतन्त्रता-कोटि[1] (degrees of freedom) कहते हैं।

काई-वर्ग बंटन वक्र

स्वतन्त्रता कोटि 6 या इससे अधिक होने की स्थिति में χ^2–बंटन के बारम्बारता वक्र का रूप चित्र (7–8) में दिखाया गया है।

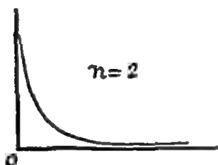


चित्र 7–8 काई वर्ग बंटन वक्र जब $n > 6$

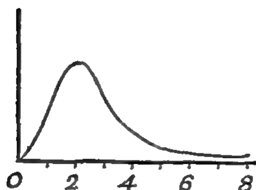
यह वक्र X–अक्ष पर 0 से ∞ तक विचरता है और इसका कोई भी भाग ऋणात्मक चतुर्थांश में नहीं होता है। χ^2–बंटन के बारम्बारता वक्र का रूप n के मान पर निर्भर

1. स्वतन्त्रता-कोटि का वर्णन अध्याय 9 में किया गया है। उसे वहाँ पढ़िये।

रहता है। यदि n=2 हो तो वक्र का रूप चित्र (7–9) और n=4 या 5 होने की स्थिति में वक्र का रूप चित्र (7–10) में दिखाया गया है।



चित्र 7–9 काई-वर्ग बंटन वक्र जब n=2



चित्र 7–10 काई-वर्ग बंटन वक्र जब n=4 या 5

काई-वर्ग बंटन के आघूर्ण

χ^2–बंटन का शून्य के परित k वाँ आघूर्ण μ_k' निम्न होता है।

$$\mu_k' = \frac{2^k \left\lceil \frac{n}{2} + k \right.}{\left\lceil \frac{n}{2} \right.} \qquad \text{....(7.23)}$$

सम्बन्ध (7.23) में k के मान 1, 2, 3, ... रखने पर χ^2–बंटन के पहले, दूसरे, तीसरे .... क्रम के आघूर्ण ज्ञात हो जाते हैं। यहाँ केवल प्रथम दो आघूर्ण दिये गये हैं।

$$\mu'_1 = \frac{2. \left\lceil \frac{n}{2} + 1 \right.}{\left\lceil \frac{n}{2} \right.} = n \qquad \text{....(7.23.1)}$$

$$\mu'_2 = \frac{2^2 \sqrt{\frac{n}{2}+2}}{\sqrt{\frac{n}{2}}} = (n+2)\, n \qquad ....(7\ 23\ 2)$$

अतः X^2 का प्रसरण μ_2 निम्न प्रकार ज्ञात कर सकते हैं —

$$\mu_2 = \mu_2' - (\mu_1')^2$$
$$= (n+2)\, n - n^2 = 2n \qquad ....(7\ 23\ 3)$$

अकेन्द्रीय काई-वर्ग बंटन

यदि $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_k$ स्वतन्त्र चर हैं, जहाँ X_i का बंटन $N(\mu_i, 1)$ है $(i=1, 2, 3, \ldots, k)$ तो चर

$$U = \sum_{i=1}^{k} X_i^2$$

के बंटन का घनत्व फलन निम्न होता है —

$$f_u(u) = \sum_{\beta=0}^{\infty} \frac{e^{-\tau}\ \tau^{\beta}}{(\beta)!} \frac{1}{2^{\frac{k}{2}+\beta}} \frac{u^{\beta+\frac{k}{2}-1}}{\sqrt{\beta+\frac{k}{2}}}\ e^{-\frac{u}{2}} \qquad ....(7\ 24)$$

जबकि $0 < u < \infty$

(7 24) में k प्रसामान्य चरों की संख्या है और

$$\tau = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k} \mu_i^2$$

है। इस बंटन को अकेन्द्रीय काई-वर्ग बंटन कहते हैं। k और τ इस बंटन के प्राचल हैं। τ को अकेन्द्रीयता प्राचल कहते हैं।

यदि $\tau = 0$ हो तो उपर्युक्त बंटन केन्द्रीय काई वर्ग बंटन के सर्वसम हो जाता है।

(7 24) द्वारा दिये गये U के बंटन का घापूर्ण जनक फलन,

$$\sum_{\beta=0}^{\infty} \frac{e^{-\tau}\ \tau^{\beta}}{\beta\,!} (1-2t)^{-\left(\frac{k}{2}+\beta\right)} \qquad ...(7\ 25)$$

है।

टिप्पणी τ के विभिन्न मानों के लिए मिस एवलिन फिक्स (Miss Evelyn Fix) ने अकेन्द्रीय काई वर्ग बंटन के लिए सारणियाँ बनायीं। ये सारणियाँ कैलिफोर्निया विश्वविद्यालय प्रेस द्वारा 1949 में प्रकाशित हुई हैं।

स्टुडेन्ट का t–बंटन

यह बंटन सर्वप्रथम डब्लू एस गासेट (W S Gosset) ने 1908 में दिया था। माना कि U और $U_1, U_2, U_3, \ldots, U_n$, (n+1) स्वतन्त्र यादृच्छिक चर हैं। इनमें से प्रत्येक का बंटन प्रसामान्य है और इनके प्राचल (0, σ) हैं।

माना कि,

$$V = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} U_i^2} \qquad \ldots(7\ 26)$$

यहाँ केवल धनात्मक वर्गमूल ही लिया गया है।

चर $\frac{U}{V}$ को चर t कहते हैं।

$$t = \frac{U}{V} = \frac{U}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} U_i^2}} \qquad \ldots(7\ 27)$$

t का बंटन फलन,

$$F(t) = P(t \leqslant x)$$

$$= P\left(\frac{U}{V} \leqslant x\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}} dt \qquad \ldots(7\ 28)$$

व्यंजक (7 28) में t बंटन की स्वतन्त्रता की कोटियाँ n है। t का बारम्बारता फलन

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} \qquad \ldots(7\ 29)$$

व्यंजक $\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}$

को $\beta\left(\frac{1}{2}, \frac{n}{2}\right)$ से भी सूचित किया जाता है।

इस बंटन के प्राचल n को उसकी स्वतन्त्रता-कोटि कहते हैं।

जबकि $n=1, 2, 3, \ldots$

t बंटन का माध्य 0 है और $n>2$ के लिए प्रसरण $\frac{n}{n-2}$ है।

टिप्पणी यदि चरा $U_1, U_2, U_3, \ldots U_n$ का प्रसरण समान न हो तो उस स्थिति में प्रत्येक चर को उसके तदनुसार मानक विचलन से भाग दे देना चाहिये। इस प्रकार रूपान्तरित चरा का प्रसरण 1 के समान होगा अर्थात् रूपान्तरित चरों के लिए $\sigma=1$ हो जायेगा।

साधारणतया t बंटन को निम्न प्रकार से समझ सकते हैं। माना कि एक सामान्य समग्र, जिसका माध्य μ और प्रसरण σ^2 है, में से n परिमाण के एक प्रतिदर्श का चयन किया गया है और प्रतिदर्श प्रेक्षण $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$ हैं इस प्रतिदर्श द्वारा परिकलित माध्य $\overline{X}$ और मानक विचलन s हो तो परिकल्पना Ho $\mu=\mu_0$ के अन्तर्गत

$$t = \frac{(\overline{X}-\mu)\sqrt{n}}{s} \qquad \ldots(7.30)$$

होता है।

चर t का बारम्बारता फलन (7 29) द्वारा दिया गया है। यदि n वृहद् हो तो चर t का बंटन प्रसामान्य हो जाता है।

t–बंटन के गुण

(क) t–बंटन का बारम्बारता वक्र एक-बहुलक है और बिन्दु 0 के परित सममित है।

(ख) $k<n$ के लिए k वां आघूर्ण परिमित होगा है अर्थात् यदि $n>2$ हो तो मानक विचलन और उच्च क्रम के आघूर्ण परिमित होते हैं।

(ग) t–बंटन सममित होने के कारण इसके सभी विषम क्रम के आघूर्ण शून्य होते हैं। अतः यदि $2r+1<n$ हो तो $\mu_{2r+1}=0$

(घ) यह सिद्ध किया जा सकता है कि

$$\mu_2=\frac{n}{n-2} \text{ और } \mu_4=\frac{3n^2}{(n-2)(n-4)}$$

(ङ) 1 स्वतन्त्रता कोटि का t-बंटन कोशी बंटन होता है।

अकेन्द्रीय t–बंटन

यदि X और U यादृच्छिक चर हों जिनमें से $X\sim N(D, \sigma)$ और चर U केन्द्रीय χ_n^2 बंटित हों तो अनुपात

$$\frac{\frac{X}{\sigma}}{\sqrt{\frac{U}{n}}}$$

का बटन अकेन्द्रीय t–बटन कहलाता है जिसकी स्वतन्त्रता-कोटि n है और अकेन्द्रीय प्राचल D है जो कि शून्य नही है। अनुपात

$$\frac{\frac{X}{\sigma}}{\sqrt{\frac{U}{n}}}$$

का प्रायिकता घनत्व फलन f (t) निम्नांकित होता है :—

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}}\, e^{-\frac{D^2}{2\sigma^2}} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{D^2}{2n\sigma^2}\right)^k \frac{1}{k!\ \beta\left(\frac{n}{2}, k+\frac{1}{2}\right)} \frac{t^{2k}}{\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n}{2}+k+\frac{1}{2}}} \quad \text{....(7.31)}$$

जहाँ $-\infty < t < \infty$

टिप्पणी : अकेन्द्रीय बटन के लिए जी. जे. रेनीकाफ (G. J. Renikoff) और जी. जे. लिबरमैन (G J Liberman) ने सर्वप्रथम व्यापक सारणी दी और इसे स्टेनफोर्ड विश्वविद्यालय ने 1957 मे प्रकाशित किया।

F-बंटन

माना कि स्वतन्त्र एव प्रसामान्य (n_1+n_2) यादृच्छिक चर $U_1, U_2, U_3, \ldots U_{n_1}$ और $V_1, V_2, V_3, \ldots, V_{n_2}$ हैं जिनमे से प्रत्येक के प्राचल $(0, \sigma)$ हैं।

$$\xi = \sum_{i=1}^{n_1} U_i^2 \text{ और } \eta = \sum_{j=1}^{n_2} V_j^2$$

ξ और η के अनुपात के बटन को F_{n_1, n_2} (ξ/η) द्वारा निरूपित करते हैं या इसे केवल F–बटन कहते हैं। स्पष्ट है कि ξ और η अलग-अलग $\sigma^2\chi^2$ बटन का पालन करते हैं। इसका अभिप्राय है कि दो χ^2 चरों के अनुपात का बटन F होता है।

माना कि

$$w = \frac{\xi/n_1}{\eta/n_2} = \frac{\sum_{i=1}^{n_1} U_i^2/n_1}{\sum_{j=1}^{n_2} V_j^2/n_2} \quad \text{....(7.32)}$$

ξ और η स्वतन्त्र एवं धनात्मक हैं अत $w>0$ है। यहाँ ξ व η क्रमश $\chi^2_{n1}\sigma^2$ व $\chi^2_{n2}\sigma^2$ बटित हैं अत यह सिद्ध किया जा सकता है कि w का बटन F–बटन होता है। यह बटन ξ और η के अलग अलग बारम्बारता फलनों के समाकलों के गुणनफल के समान होता है जोकि असमिकाओं $\eta>0$ और $0\leqslant\xi\leqslant\eta w$ द्वारा दिये गये प्रक्षेत्र (domain) पर परिभाषित है।

व्यवहार में F–बटन का प्रयोग दो प्रसरणों के अनुपात के लिए होता है। अत इसी को लेकर F–बटन का वर्णन दिया गया है।

प्रमेय 2 यदि एक समग्र N (μ, σ) हो और उससे लिए गये प्रतिदर्श प्रेक्षण X_1, X_2, X_3 , X_n हों व इन प्रतिदर्शों का माध्य X और प्रसरण s^2 हो, तो चर $\frac{(n-1)\,s^2}{\sigma^2}$ का बटन χ^2 होता है जिसकी स्वतन्त्रता-कोटियाँ $(n-1)$ हैं।

माना कि दो समग्रों से, जिनके प्रसरण समान हैं, परिमाण n_1 व n_2 के प्रतिदर्शों का चयन किया गया है। इन प्रतिदर्शों के प्रसरण क्रमश s_1^2 व s_2^2 हैं।

(7.32) के लिए दिए वर्णन के आधार पर प्रमेय 2 के उपयोग से निम्नांकित सम्बन्ध दिया जा सकता है :—

$$\frac{\nu_1}{\nu_2}F_{\nu_1\ \nu_2}=\frac{\nu_1\, s_1^2/\sigma^2}{\nu_2\, s_2^2/\sigma^2}=\frac{\chi^2_{\nu_1}}{\chi^2_{\nu_2}} \qquad \ldots(7\ 33)$$

जहाँ $n_1-1=\nu_1$ और $n_2-1=\nu_2$

उपर्युक्त सम्बन्ध से स्पष्ट है कि दो काई वर्गों का अनुपात F–बटित है। यह अनुपात, माना x, एक बीटा चर है और इसका घनत्व फलन निम्न होता है —

$$f(x)\ dx=\frac{x^{p-1}(1+x)^{-p-q}}{\beta\ (p, q)}\ dx \qquad \ldots(7\ 34)$$

$$\text{जहाँ } p=\frac{\nu_1}{2},\ q=\frac{\nu_2}{2}$$

$$\text{और } 0\leqslant x\leqslant\infty$$

$$\text{यहाँ } F=\frac{\nu_2}{\nu_1}x \text{ या } dF=\frac{\nu_2}{\nu_1}dx$$

अत F का घनत्व फलन (7 34) की सहायता से,

$$f(x)\ dx=g\ (F)\frac{\nu_1}{\nu_2}\ dF$$

$$\therefore \quad g(F)\,dF = \frac{\left(\frac{\nu_1}{\nu_2}F_{(\nu_1,\nu_2)}\right)^{p-1}\left(1+\frac{\nu_1}{\nu_2}F_{(\nu_1,\nu_2)}\right)^{-(p+q)}}{\beta(p,q)}\frac{\nu_1}{\nu_2}dF$$

$$= \frac{\left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)^{p} F^{p-1}_{(\nu_1,\nu_2)}}{\beta(p,q)\left(1+\frac{\nu_1}{\nu_2}F_{(\nu_1,\nu_2)}\right)^{p+q}}dF$$

$$g(F) = \frac{\left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)^{\nu_1/2} F^{\nu_1/2-1}_{(\nu_1,\nu_2)}}{\beta\left(\frac{\nu_1}{2},\frac{\nu_2}{2}\right)\left(1+\frac{\nu_1}{\nu_2}F_{(\nu_1,\nu_2)}\right)^{\frac{\nu_1+\nu_2}{2}}} \quad ....(7.35)$$

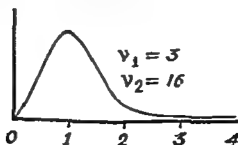
ν_1 व ν_2 को F बटन की स्वतन्त्रता कोटि कहते है।

F-बंटन के गुण

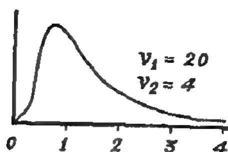
(अ) F का मान कदापि ऋणात्मक नही हो सकता क्योंकि अंश व हर मे प्रसरण सदैव धनात्मक सख्याएँ हैं। अत. इनका अनुपात भी धनात्मक ही होता है।

(ब) F-बटन एक धनात्मक-विषम बटन है।

(स) प्रतिदर्श F-बटन वक्र का उच्चतम बिन्दु $F = \frac{n_2(n_1-2)}{n_1(n_2+2)}$ पर स्थित होता है और इसका माध्य $F = \frac{n_2}{n_2-2}$ पर स्थित होता है। स्पष्टत: माध्य सर्वदा 1 से कुछ बडा होता है। विभिन्न स्वतन्त्रता कोटियों के लिए दो F वक्रो के रूप चित्र (7.11) और (7.12) में दिखाये गये हैं।



चित्र 7–11 F-बटन वक्र जब $\nu_1=3$, $\nu_2=16$.



चित्र 7–12 F–बंटन वक्र जब $\nu_1=20,\ \nu_2=4$

अकेन्द्रीय F–बंटन

अकेन्द्रीय F, एक अकेन्द्रीय χ^2 और एक स्वतन्त्र व केन्द्रीय χ^2 के अनुपात के समान होता है। माना कि इनकी स्वतन्त्रता कोटियाँ क्रमश: ν_1 और ν_2 हैं और माना कि अकेन्द्रीय काई-वर्ग χ_1^2 से और केन्द्रीय काई वर्ग χ_2^2 से प्रदर्शित किये गये हैं, तो अकेन्द्रीय F विचर निम्नांकित होता है।

$$F_1=\frac{\chi_1^2/\nu_1}{\chi_2^2/\nu_2} \qquad \text{....(7.35)}$$

यहाँ अकेन्द्रीय F को F_1 द्वारा निरूपित किया गया है जिसकी स्व० को० ν_1 व ν_2 है।

χ_1^2–बंटन का अकेन्द्रीय प्राचल τ है जबकि τ एक धनात्मक अचर मान है और χ_2^2 का बंटन (7.22) के अनुसार है। अत: χ_1^2 व χ_2^2 का सम्मिलित बंटन, दोनों बंटनों के गुणनफल के समान है क्योंकि χ_1^2 व χ_2^2 स्वतन्त्र हैं। सम्मिलित बंटन का χ_2^2 के सम्बन्ध में प्रांतिक समाकलन करके, $\frac{\nu_2\chi_1^2}{\nu_1\chi_2^2}$ के स्थान पर F_1 का प्रतिस्थापन करने पर F_1 का अर्थात् अकेन्द्रीय-F का बंटन ज्ञात हो जाता है। अत: F_1 का प्रायिकता घनत्व फलन निम्न रूप में दिया जा सकता है।

$$f(F_1)=\frac{e^{-\tau}}{\Gamma\left(\frac{\nu_2}{2}\right)}\sum_{\beta=0}^{\infty}\frac{\tau^{\beta}}{\beta!}\left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)^{\frac{\nu_1}{2}+\beta}\frac{F_1^{\frac{\nu_1}{2}+\beta-1}\ \Gamma\left[\frac{1}{2}(\nu_1+\nu_2)+\beta\right]}{\Gamma\left(\frac{\nu_1}{2}+\beta\right)\left(1+\frac{\nu_1}{\nu_2}F_1\right)^{\frac{\nu_1+\nu_2}{2}+\beta}} \qquad \text{....(7.36)}$$

जबकि $0<F_1<\infty$

फिशर का Z–बंटन

Z–बंटन के लिए फिशर ने माना कि

$$Z=\frac{1}{2}\log_e\frac{s_1^2}{s_2^2}=\frac{1}{2}\log_e F \qquad ....(7.37)$$

या $$F=e^{2Z} \qquad ....(7.37.1)$$

अतः (7.35) में F के स्थान पर e^{2Z} रखने पर फिशर का Z बंटन ज्ञात हो जाता है। इसलिए Z का प्रायिकता घनत्व फलन

$$f(Z)\,dZ=\left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)^{\frac{\nu_1}{2}}\frac{1}{B\left(\frac{\nu_1}{2},\frac{\nu_2}{2}\right)}\frac{(e^{2Z})^{\frac{\nu_1}{2}-1}}{\left(1+\frac{\nu_1}{\nu_2}e^{2Z}\right)^{\frac{\nu_1+\nu_2}{2}}}\,2e^{2Z}dz \qquad ....(7.38)$$

$$[\because\ 2e^{2z}dz=dF]$$

$$f(Z)=2\left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)^{\frac{\nu_1}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{\nu_1+\nu_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu_2}{2}\right)}\frac{e^{\nu_1 z}}{\left(1+\frac{\nu_1}{\nu_2}e^{2z}\right)^{\frac{\nu_1+\nu_2}{2}}} \qquad ....(7.38.1)$$

बंटन F और e^{2z} के लिए दिये गये फलनों में कोई मूल अन्तर नहीं है। यह एक ही बंटन के दो रूप हैं। इसी कारण F या e^{2z} बंटन के लिए एक ही प्रायिकता सारणी दी जाती है।

बीटा–बंटन

माना कि

$$\theta=\frac{w}{1+w}=\frac{\xi}{\xi+\eta} \qquad ....(7.39)$$

जब कि w का मान (7.32) द्वारा दिया गया है। θ की सीमाएँ 0 से 1 हैं अर्थात् $0\leqslant\theta\leqslant 1$

अत: θ का बारम्बारता फलन,

$$f(\theta)=0 \quad \text{जब कि } \theta<0 \quad \text{या } \theta>1$$

अत: θ का बटन फलन,

$$P(\theta<x)=P\left(w<\frac{x}{1-x}\right)=F_{\nu_1,\nu_2}\left(\frac{x}{1-x}\right) \quad \text{...(7 40)}$$

और θ का बारम्बारता फलन निम्नांकित है —

$$f(\theta)=\frac{1}{(1-x)^2}f_{(\nu_1,\nu_2)}\left(\frac{x}{1-x}\right) \quad \text{....(7 41)}$$

$$=\frac{\left|\frac{\nu_1+\nu_2}{2}\right.}{\left|\frac{\nu_1}{2}\right.\left|\frac{\nu_2}{2}\right.}\, x^{\frac{\nu_1}{2}+1}\,(1-x)^{\frac{\nu_2}{2}-1} \quad \text{....(7 41 1)}$$

$$=\beta\left(x,\frac{\nu_1}{2},\frac{\nu_2}{2}\right) \quad \text{....(7 41 2)}$$

क्योंकि हम जानते हैं कि,

$$\beta(m,n)=\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx=\frac{\left|m\right.\left|n\right.}{\left|m+n\right.}$$

बीटा-बटन का kवां आघूर्ण

परिभाषा के अनुसार,

$$\mu'_k=\int_0^1 x^k\frac{\left|\frac{\nu_1+\nu_2}{2}\right.}{\left|\frac{\nu_1}{2}\right.\left|\frac{\nu_2}{2}\right.}\,x^{\frac{\nu_1}{2}-1}(1-x)^{\frac{\nu_2}{2}-1}\,dx \quad \text{....(7.42)}$$

$$=\frac{\left|\frac{\nu_1+\nu_2}{2}\right.\left|\frac{\nu_1}{2}+k\right.}{\left|\frac{\nu_1}{2}\right.\left|\frac{\nu_1+\nu_2}{2}+k\right.} \quad \text{....(7.42.1)}$$

व्यंजक (7.42 1) में k के विभिन्न मान रखने पर विभिन्न आघूर्ण ज्ञात हो जाते हैं।

जब $k=1$ हो तो,

$$\mu_1' = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu_1+\nu_2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu_1}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu_1+\nu_2}{2}+1\right)} = \frac{\nu_1/2}{(\nu_1+\nu_2)\,2} \qquad \text{....(7 43)}$$

जब k=2 हो तो,

$$\mu_2' = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu_1+\nu_2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu_1}{2}+2\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu_1+\nu_2}{2}+2\right)}$$

$$= \frac{\left(\frac{\nu_1}{2}+1\right)\left(\frac{\nu_1}{2}\right)}{\left(\frac{\nu_1+\nu_2}{2}+1\right)\left(\frac{\nu_1+\nu_2}{2}\right)}$$

$$= \frac{\nu_1\,(\nu_1+2)}{(\nu_1+\nu_2)\,(\nu_1+\nu_2+2)} \qquad \text{....(7 44)}$$

अत बीटा बटन का प्रसरण,

$$\mu_2 = \mu_2' - \mu_1'^2$$

$$= \frac{\nu_1\,(\nu_1+2)}{(\nu_1+\nu_2)\,(\nu_1+\nu_2+2)} - \frac{\nu_1^2}{(\nu_1+\nu_2)^2}$$

$$= \frac{2\,\nu_1\,\nu_2}{(\nu_1+\nu_2)^2\,(\nu_1+\nu_2+2)} \qquad \text{....(7 45)}$$

इसी प्रकार किसी भी क्रम के आघूर्ण ज्ञात किये जा सकते है।

Z, F, t और χ^2 में सम्बन्ध

ये सब प्रतिदर्शज एक दूसरे से भिन्न हैं और इनका प्रयोग परिस्थितियो के अनुसार होता है। किन्तु कुछ विशेष परिस्थितियों मे ये एक दूसरे से सम्बन्धित हो जाते हैं। इन सबका विवरण इस अध्याय मे दिया जा चुका है अत यहाँ इनमें केवल सम्बन्ध ही के विषय मे बताया गया है।

$$\text{फिशर } Z = \log_e \sqrt{F} \qquad \text{....(7.46)}$$

यदि विभिन्न सार्थकता स्तरो के लिए Z–सारणी दी गयी हो तो F का मान ज्ञात कर सकते हैं और यदि F–सारणी उपलब्ध हो तो Z का मान ज्ञात कर सकते हैं।

$$t_{\nu_2} = \sqrt{F_{(1,\,\nu_2)}} \qquad \text{....(7.47)}$$

जब कि प्रतिदर्शज t की स्व० को० ν_2 है और F की स्व० को० $(1, \nu_2)$ है। यहाँ भी यदि एक प्रतिदर्शज का सारणीबद्ध मान ज्ञात हो तो अन्य का मान (7.47) की सहायता से ज्ञात कर सकते हैं। यहाँ यह बात ध्यान देने योग्य है कि F में अंश (प्रसरण या χ^2) की स्व० को० 1 ही होना चाहिए, अर्थात् $\nu_1 = 1$

$$t^2_{\infty} = \chi_1^2 \qquad ...(7.48)$$

यहाँ t^2 की स्व० को० ∞ और χ^2 की स्व० को० 1 है इस गुण के कारण इन दोनों को एक ही ग्राफ में दिखाया जा सकता है। χ^2 के मान F-सारणी द्वारा भी प्राप्त किये जा सकते हैं। $\nu_2 = \infty$ स्व० को० के लिए F के मान को अंश की स्व० को० से गुणा करने से χ^2 का मान ज्ञात हो जाता है।

क्रम सांख्यिकी

माना कि एक संतत बंटन वाले समष्टि में से एक n परिमाण के प्रतिदर्श का चयन किया गया है और प्रतिदर्श प्रेक्षण $X_1, X_2, X_3, ..., X_n$ है। मानाकि X का बारम्बारता फलन f (x) है जो कि सीमाओं a व b में x के किसी मान के लिए धनात्मक है अर्थात् $a \leq x \leq b$. यदि प्रेक्षणों X_i में से सबसे छोटे प्रेक्षण को y_1 से, उसके बाद उससे बड़े को y_2, ...और सबसे बड़े प्रेक्षण को y_n से से निरूपित कर दें तो $y_1 \leq y_2 \leq y_3 \leq ....y_n$ और इन क्रमित प्रेक्षणों में बंटन सम्बन्धी कुछ विशेष लक्षण होते हैं जिनको निम्नांकित प्रमेयों में दिया गया है। इन्हीं को क्रम सांख्यिकी कहते हैं।

प्रमेय 1 : यदि $y_1, y_2, y_3 ...y_n$ क्रमित प्रेक्षण हैं तो इनका सम्मिलित बंटन,

$$f(y_1, y_2, y_3 ... y_n) = n!\, f(y_1)\, f(y_2)\, f(y_3) ... f(y_n) \qquad ....(7.49)$$

जब कि $f(y_1), f(y_2), f(y_3), ..., f(y_n)$ क्रमशः $y_1, y_2, y_3, ..., y_n$ के बारम्बारता फलन हैं।

प्रमेय 2 : क्रमित प्रेक्षणों $y_1, y_2, y_3 ...y_n$ में से iवें प्रेक्षण y_i का उपांत बंटन फलन,

$$f_i(y_i) = n! \frac{\{1 - F(y_i)\}^{n-i}}{(n-i)!} \frac{\{F(y_i)\}^{i-1}}{(i-1)!} f(y_i) \qquad ....(7.50)$$

जब कि $F(y_i)$, y_i का बंटन फलन है और $f(y_i)$, y_i का बारम्बारता फलन है।

प्रमेय 3 : क्रम सांख्यिकी में y_i और y_j का सम्मिलित बारम्बारता फलन $f_{ij}(y_i, y_j)$ निम्न होता है जब कि $i < j$

$$f_{ij}(y_i, y_j) = \frac{n!}{(i-1)!\,(j-i-1)!\,(n-j)!} [F(y_i)]^{i-1} \times$$

$$[F(y_j) - F(y_i)]^{j-i-1} \times [1 - F(y_j)]^{n-j} f(y_j) f(y_i) \qquad ....(7.51)$$

प्रमेय 4 : यदि प्रतिदर्श परास $R = (y_n - y_1)$ हो तो R का उपांत बंटन $f(R)$ निम्नांकित होता है :—

माना कि $y_1 = U$ और $y_n = y_1 + R = U + R$ तो उपांत बंटन $f(R)$, निम्नांकित होता है :—

$$f(R) = \int_a^{b-R} \frac{n!}{(n-2)!} \left[F(R+U) - (F) \right]^{n-2} \times f(U)\, f(R+U)\, dU \quad ....(7.52)$$

प्रमेय 5 : माना कि समग्र से एक n परिमाण के प्रतिदर्श $X_1, X_2, X_3, ..., X_n$) का चयन किया गया है और $L_1 (X_1, X_2, X_3 ... ... X_n)$ व $L_2 (X_1, X_2, X_3 .... X_n)$ प्रतिदर्श प्रेक्षणों के दो फलन इस प्रकार हैं कि $L_1 < L_2$ और अन्तराल (L_1, L_2) में समग्र के एक निश्चित प्रतिशत का होना प्रत्याशित है, तो L_1 व L_2 को सहिष्णुता सीमाएँ कहते हैं। इन सहिष्णुता सीमाओं पर बारम्बारता फलन $f(X)$ के रूप का कोई प्रभाव नहीं पड़ता।

माना कि $L_1 (X_1, X_2, X_3 ... X_n) = y_1$
और $L_2 (X_1, X_2, X_3 ... X_n) = y_n$

तो y_1 और y_n के बीच में प्रेक्षणों का कम से कम α अनुपात होने की प्रायिकता β निम्न सम्बन्ध से ज्ञात कर सकते हैं।

$$P \left\{ (y_1 < X < y_n) > \alpha \right\} = \beta \quad (7{\cdot}53)$$

सूत्र (7·51) की सहायता से, y_1 व y_n का सम्मिलित बारम्बारता फलन,

$$f_{1n}(y_1, y_n) = \frac{n!}{(n-2)!} \left[F(y_n) - F(y_1) \right]^{n-2} f(y_n) f(y_1) \quad (7{\cdot}54)$$

जहाँ $a < y_1 < y_n < b$

यदि रूपान्तरण $F(y_1) = Z_1$, $F(y_n) = Z_n$ कर दिया जाय

तो जैकोबियन $J = \frac{1}{f(y_1)\, f(y_n)}$

और $f(Z_1, Z_n) = \frac{n!}{n(n-2)!} (Z_n - Z_1)^{n-2}$ (7·54·1)

जहाँ $0 < Z_1 < Z_n < 1$

अन्यथा $f(Z_1, Z_n) = 0$

फिर रूपान्तरण $Z_n - Z_1 = p$ और $Z_1 = m_1$ कर दें तो,

जैकोबियन $J = 1$

और $f(m_1, p) = n(n-1) p^{n-2}$ (7 54 2)

जहाँ $0 < p < 1$

p का उपांत बंटन,

$$f(p) = \int_0^{1-p} f(m_1, p)\, dm_1$$

$$= \int_0^{1-p} n(n-1)p^{n-2} dm_1$$

$$= n(n-1)p^{n-2} \left(m_1 \right)_0^{1-p}$$

$$= n(n-1)p^{n-2}(1-p) \qquad (7\ 54\ 3)$$

अत (7 54 3) के आधार पर प्रमेय को निम्न रूप में लिख सकते हैं —

यदि चर का सतत बारम्बारता फलन है और p इस समग्र में से एक n परिमाण के यादृच्छिक प्रतिदर्श के चरम प्रेक्षणों के बीच समग्र का अनुपात है तो p का बारम्बारता फलन $f(p)=n(n-1)\,(p^{n-2}-p^{n-1})$

जहाँ $0 < p < 1$

अन्यथा $f(p)=0$

व्यञ्जक (7 53) द्वारा दी गयी प्रायिकता को सूत्रों (7 54) और (7 54 3) की सहायता से ज्ञात कर सकते हैं

$$P\{(y_1 < X < y_n) > \alpha\} = \beta$$

या $P\left[\{F(y_n)-F(y_1)\} > \alpha\right] = \beta$

$$P\{(Z_n - Z_1) > \alpha\} = \beta$$

$$P(p > \alpha) = \beta$$

$$\therefore \int_\alpha^1 n(n-1)p^{n-2}\,(1-p)\,dp = \beta$$

$$n(n-1)\left[\left\{\frac{p^{n-1}}{n-1}\right\}_\alpha^1 - \left\{\frac{p^n}{n}\right\}_\alpha^1\right] = \beta$$

$$n(n-1)\left[\frac{1}{n-1} - \frac{\alpha^{n-1}}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{\alpha^n}{n}\right] = \beta$$

$$\therefore 1 - n\alpha^{n-1} + (n-1)\alpha^n = \beta \qquad (7\ 55)$$

n के निश्चित मान के लिए (7 55) द्वारा प्राप्त प्रायिकता n का फलन है अत β के दिये हुए मान के लिए यह फलन केवल n पर निर्भर है। सामान्य रूप में यह फलन n, α और β पर निर्भर है जबकि $L_1 = y_1$ और $L_2 = y_n$ (L_1, L_2) स्वतन्त्र सहिष्णुता सीमाएँ हैं।

उदाहरण 14 9 :—प्रतिदर्श परिमाण कितना हो, कि प्रतिदर्श के चरम प्रेक्षणों y_1 और y_n के बीच 90 प्रतिशत समग्र के घटक होने की प्रायिकता 95 है इसे निम्न प्रकार ज्ञात कर सकते हैं —यहां $\alpha = 90$, $\beta = 95$

अत समीकरण (7 55) द्वारा

$$1 - n(90)^{n-1} + (n-1)(90)^n = 95$$

$$(90)^n = 05 - n(90)^{n-1} + n(90)^n$$

$$= 05 - n(90)^{n-1}(10)$$

$$(90)^n + \frac{n}{10}(90)^{n-1} = 05$$

$$(90)^{n-1}\left\{90 + \frac{n}{10}\right\} = 05$$

$$(90)^{n-1}(9+n) = 5$$

$$\therefore \quad 90^{n-1} = \frac{5}{9+n}$$

$$\text{या } (90)^n = \frac{45}{9+n}$$

n का मान जांच और भूल विधि (Trial and error method) द्वारा पाठक स्वय ज्ञात कर सकते हैं।

कोटियों द्वारा प्रसरण-विश्लेषण

कोटियों द्वारा प्रसरण विश्लेषण अत्यन्त सुगम है और इसका मुख्य लाभ यह है कि इसके लिए प्रेक्षणों का बटन प्रसामान्य मानना या प्रसरणों की सजातीयता के प्रति कल्पना नही करनी होती है इस विधि के अन्तर्गत शोधनों के परिणामों को कोटियों म परिवर्तित कर दिया जाता है और इसके पश्चात् प्रयोग म लिये गये प्रेक्षणों का प्रयोग करके शोधनों मे अन्तर के प्रति परिकल्पना की परीक्षा कर ली जाती है। यहां इन विधियों का विवरण नही दिया गया है क्योंकि विधियां अधिक प्रचलन म नही हैं। इस अध्याय म जो विधियां दी गयी हैं, उनमे विषय का समुचित ज्ञान मिल जाता है।

प्रश्नावली

1 : यदि X एक सतत चर है जिसका बारम्बारता फलन $f(x)$ है और बटन फलन $F(x)$ है, तो रैखीय फलन $(ax+b)$ का बटन ज्ञात कीजिये ।

2 प्रसामान्य बटन के गुणों का वर्णन कीजिये ।

(बी कॉं बम्बई 1970)

3 : अप्राचल बटन से आप क्या समझते हैं ? स्पष्ट कीजिये ।

4 : बताइये कि, t—बटन वक्र में और प्रसामान्य बटन वक्र में क्या अन्तर होता है ?

5 : किसी बटन के अभिलक्षण फलन से आप क्या समझते हैं ? स्पष्ट कीजिये और यह भी बताइये कि इनका बटन की दृष्टि से क्या महत्व है ?

6 क्या किन्हीं दो बटनों के अभिलक्षण फलन एक से हो सकते हैं ? उत्तर की पुष्टि कीजिये ।

7 · नीचे दिये गये सतत बटन के लिए,

$$dF = \frac{1}{\beta(m, n)} (1-x)^{m-1} \quad x^{n-1} \quad , o < x < 1, m, n > o$$

ज्ञात करिये कि,

$$\text{समान्तर माध्य} = \frac{m}{m+n}, \quad \text{हरात्मक माध्य} = \frac{m-1}{m+n-1},$$

$$\text{और प्रसरण} = \frac{mn}{(m+n)^2 (m+n+1)}$$

सत्यापन कीजिये कि

A H > H M

(आगरा, 1954)

□ □ □

8 | सीमा प्रमेय

अनेक बार किसी समग्र में बारम्बारता बंटन का ज्ञान नहीं होता है परन्तु यदि हम उसमें से एक वृहद् प्रतिदर्श लें तो प्रतिदर्श माध्य के बटन का सन्निकटन किया जा सकता है । सन्निकटन *(approximation)* प्रायिकता सिद्धान्त के कुछ प्रमेयों पर आधारित है जो सीमा प्रमेय कहलाते हैं ।

चेबीचेफ असमिका

माना X एक यादृच्छिक चर है, जिसके लिए,

$E(X)=\mu$ और $V(X)=\sigma^2$ है जहां, μ और σ^2 परिमित हैं, तो एक अऋणात्मक राशि k के लिए,

$$P(|X-\mu| > k) < \frac{\sigma^2}{k^2} \quad (8 \cdot 1)$$

प्रमाण : माना कि चर X का प्रायिकता घनत्व फलन f(x) है । तो

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx \quad (8 \cdot 2)$$

$$= \int_{-\infty}^{\mu-k} (x-\mu)^2 f(x)dx + \int_{\mu-k}^{\mu+k} (x-\mu)^2 f(x)dx$$

$$+ \int_{\mu+k}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx \quad (8 \cdot 2 \cdot 1)$$

(8·2·1) मे बीच के समाकलन का मान सदैव धनात्मक है तथा प्रथम और तृतीय समाकलन में $(x-\mu)^2 > k^2$ है ।

$$\therefore \sigma^2 > k^2 \left[\int_{-\infty}^{\mu-k} f(x)\,dx + \int_{\mu+k}^{\infty} f(x)\,dx \right]$$

$$> k^2 P(|x-\mu| > k)$$

या $P(|X-\mu| > k) < \dfrac{\sigma^2}{k^2}$

अत: प्रमेय सिद्ध हुआ ।

विभिन्न प्रकार के अभिसरणों की परिभाषा

माना कि $\{X_n\}$ यादृच्छिक चरों का एक अनुक्रम है।

(क) प्रायिकता-अभिसरण या दुर्बलता से अभिसरण

प्रत्येक $\epsilon > 0$ के लिए यदि

$$\lim_{n \to \infty} P(|X_n - C| > \epsilon) = 0 \qquad (8.3)$$

हो तो हम कहते हैं कि अनुक्रम $\{X_n\}$ प्रायिकता में स्थिरांक C की ओर अभिसृत हो रहा है। इसके लिए प्रतीक $X_n \xrightarrow{P} C$ का प्रयोग किया जाता है।

(ख) सबल या लगभग निश्चित अभिसरण

यदि $\lim_{n \to \infty} P(X_n = C) = 1 \qquad (8.4)$

हो तो हम कहते हैं कि अनुक्रम $\{X_n\}$ सबल या निश्चित रूप से स्थिरांक C की ओर अभिसृत होता है। इसके लिए प्रतीक $X_n \xrightarrow{a.s.} C$ का प्रयोग किया जाता है।

(ग) द्विघात-माध्य अभिसरण

यदि $\lim_{n \to \infty} P[(X_n - C)^2] = 0 \qquad (8.5)$

हो तो हम कहते हैं कि अनुक्रम $\{X_n\}$ द्विघात माध्य में स्थिरांक C की ओर अभिसृत होता है। इसके लिए प्रतीक $X_n \xrightarrow{q.m.} C$ का प्रयोग किया जाता है।

यहाँ अनुक्रम के अभिसरण के विषय में सामान्य रूप से ही कथन किया गया है। इसके पूर्ण विवरण या प्रमाण के लिए प्रायिकता सिद्धान्त पर लिखित पुस्तकों का अध्ययन कीजिये।

बृहत् संख्या का नियम

माना कि $\{X_n\}$ यादृच्छिक चरों का एक अनुक्रम है जिसमें प्रत्येक चर सर्वसम बंटित है और उनका माध्य परिमित है।

$$Z_n = \left\{ \frac{X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n}{n} - \frac{E(X_1 + X_2 + X_3 \dots + X_n)}{n} \right\}$$

अभिसरण की भावना में शून्य की ओर प्रवृत्त होता है जब n अनन्त की ओर प्रवृत्त होता है।

यदि Z_n प्रायिकता में 0 की ओर अभिसृत होता है तो अनुक्रम $\{X_n\}$ दुर्बल बृहत् संख्या के नियम का पालन करता हुआ कहा जाता है।

यदि Z_n प्रायिकता 1 से 0 की ओर अभिसृत होता है तो अनुक्रम $\{X_n\}$ सबल बृहत् संख्या के नियम का पालन करता हुआ कहा जाता है। जिन परिस्थितियों में ये अभिसरण होते हैं उनका विवरण कुछ नियमों में दिया हुआ है जो बृहत् संख्या के नियम कहलाते हैं।

बृहत् संख्या का दुर्बल नियम

इस नियम के अन्तर्गत (6·3 के अनुसार) यह सिद्ध करना है कि

$$\lim_{n \to \infty} P\left\{\left|\frac{X_1+X_2+X_3+....+X_n}{n} - \mu\right| > \epsilon\right\} = 0 \qquad (8\ 6)$$

जब कि ϵ एक धनात्मक अत्यणु ज्ञात राशि है।

प्रमाण : यह ज्ञात है कि,

$$E\left(\frac{X_1+X_2+X_3+....+X_n}{n}\right) = E(\bar{X}_n) = \mu$$

और $$V\left(\frac{X_1+X_2+X_3+....+X_n}{n}\right) = V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

चेबीचेफ प्रमेय के अनुसार,

$$\lim_{n \to \infty} P\left\{\left|\frac{X_1+X_2+X_3+....+X_n}{n} - \mu\right| > \epsilon\right\} < \frac{\sigma^2}{n\epsilon^2} \qquad (8·7)$$

जब कि ϵ एक अत्यणु धनात्मक संख्या है।

या $$\lim_{n \to \infty} P\left(|\bar{X}_n - \mu| > \epsilon\right) = 0 \qquad (8·7·1)$$

अत: प्रमेय सिद्ध हुआ।

यदि यह भी मानें कि प्रेक्षण स्वतन्त्र न होकर युग्मत: असहसंबधित (pairwise uncorrelated) हैं तो भी यह प्रमेय सत्य रहता है क्योंकि

$$V\left(\frac{X_1+X_2+X_3+....+X_n}{n}\right) = \frac{\sigma^2}{n}$$

बृहत् संख्या का सबल नियम

इस नियम को कोलमोगोरव प्रमेय (Kolmogorov theorem) भी कहते हैं। यदि $X_1, X_2, X_3, ...X_n$ यादृच्छिक चरों का एक अनुक्रम है जिसमें प्रत्येक X_i स्वतन्त्र एव सर्वसम बंटित है तो $\bar{X}$ के μ की ओर लगभग निश्चित रूप से अभिसृत होने के लिए यह आवश्यक और पर्याप्त है कि $E(X_i)$ का अस्तित्व है और $E(X_i) = \mu$ है।

इस प्रमेय को यहां सिद्ध नहीं किया गया है क्योंकि इसके प्रमाण के लिए कुछ आवश्यक विषयों का वर्णन इस पुस्तक के क्षेत्र से बाहर रखा गया है।

खिंचिन-प्रमेय

यह प्रमेय भी बृहत् संख्या के दुर्बल नियम में सम्बद्ध है। इसमें और चेबीचेफ प्रमेय में केवल इतनी भिन्नता है कि यदि हम यह न मानें कि यादृच्छिक चर X_i का प्रसरण परिमित है तो भी यह नियम सत्य रहता है। इस प्रमेय में केवल इतनी ही कल्पना की गयी है कि

प्रत्येक चर X_i का बटन सर्वसम है जिसका माध्य μ परिमित है। खिंचिन प्रमेय का प्रकथन इस प्रकार है —

माना कि $X_1, X_2, X_3, ..X_n$ स्वतन्त्र एव सर्वसम n यादृच्छिक चर हैं और इनमे से प्रत्येक चर का बटन फलन $F(x)$ है तथा $F(x)$ का परिमित माध्य μ है तो चर

$\bar{X}_n = \sum_{i=1}^{n} X_i/n$ प्रायिकता मे माध्य μ की ओर अभिसृत होता है।

केन्द्रीय सीमा प्रमेय

यदि n यादृच्छिक चरो का अनुक्रम $X_1, X_2, X_3, ..., X_n$ है जिसमे प्रत्येक X_i स्वतन्त्र एव सर्वसम बटित है और

$$E(X_i) = \mu$$

$$V(X_i) = \sigma^2$$

तो सबल या दुर्बल बृहद् सख्या नियम के अनुसार हम जानते हैं कि जैसे $n \to \infty$ तो $\bar{X}_n$ माध्य μ की ओर प्रवृत्त होता है किन्तु इससे $\bar{X}_n$ के बटन के विषय मे कोई ज्ञान नही होता है।

केन्द्रीय सीमा प्रमेय के अनुसार किसी प्रतिदर्श के माध्य $\bar{X}_n$ का बटन ऐसे प्रसामान्य बटन की ओर प्रवृत्त होता है जिसका माध्य μ और प्रसरण $\frac{\sigma^2}{n}$ है, यदि प्रतिदर्श परिमाण n बृहद् हो।

इस प्रमेय मे यह बात ध्यान देने योग्य है कि यादृच्छिक चर X_i के बटन के विषय मे कुछ नही कहा गया है अर्थात् इस चर का बटन कुछ भी हो सकता है। अत यदि n बृहद् हो तो परिमित प्रसरण वाले किसी भी समष्टि से चयनकृत प्रतिदर्श का माध्य सन्निकट प्रसामान्यत बटित होता है। इसी कारण बृहद् प्रतिदर्शो पर आधारित विभिन्न समष्टि के व्यास प्रसामान्य बटित मान लिए जाते हैं।

द-मॉयवर (De-Moivre) ने यह भी सिद्ध किया कि किसी चर X का बटन कुछ भी हो, n चरो का योग लगभग प्रसामान्यत बटित होता है, यदि n बृहद् हो।

लिंडबर्ग और लेवी-प्रमेय

यदि n यादृच्छिक चर $X_1, X_2, X_3, ..., X_n$ हैं जो कि स्वतन्त्र एव सर्वसम बटित हैं और $E(X_i) = \mu$ व $V(X_i) = \sigma^2$ है। यह भी कल्पना की गयी है कि μ व σ^2 का अस्तित्व है तो Z_n का बंटन फलन $F(Z_n)$, प्रसामान्य बटन फलन की ओर प्रवृत होता है जहाँ यादृच्छिक चर,

$$Z_n = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{\sigma} \quad ....(8\ 8)$$

माना कि $\phi(t)$, चर $(X_i-\mu)$ का अभिलक्षणिक फलन है। चर $(X_i-\mu)$ के पहले दो आघूर्ण 0, σ^2 हैं क्योंकि दो आघूर्णों का अस्तित्व है, तो

$$\phi(t) = 1 - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2 + 0(t^2) \qquad \text{....(8.9)}$$

जब कि (8.9) में पद $0(t^2)$, t के वर्ग से उच्च क्रम के पदों को निरूपित करता है

$$Z_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i-\mu)\sqrt{n}}{\sigma} \text{ का अभिलक्षण फलन,}$$

$$\phi_n(t) = \left\{ \phi\left(\frac{t}{\sqrt{n}\,\sigma}\right) \right\}^n$$

$$\doteq \left\{ 1 - \frac{1}{2}\sigma^2 \left(\frac{t}{\sqrt{n}\,\sigma}\right)^2 + 0\left(\frac{t}{\sqrt{n}\,\sigma}\right)^2 \right\}^n$$

$$= \left\{ 1 - \frac{1}{2n}t^2 + 0\left(\frac{t^2}{n\sigma^2}\right) \right\}^n$$

$$\log\{\phi_n(t)\} = n\log\left\{ 1 - \frac{t^2}{2n} + 0\left(\frac{t^2}{n\sigma^2}\right) \right\}$$

$$\to -\frac{t^2}{2} \quad \text{जब} \quad n \to \infty$$

$$\text{क्योंकि } 0\left(\frac{t^2}{n\sigma^2}\right) \to 0 \quad \text{जब } n \to \infty$$

$$\therefore \quad \phi_n(t) \to e^{-\frac{t^2}{2}} \qquad \text{....(8.10)}$$

$$\text{जब} \quad n \to \infty$$

हम जानते हैं $e^{-\frac{t^2}{2}}$ प्रसामान्य बंटन N (0, 1) का अभिलक्षण फलन है। अतः (8.10) से यह निष्कर्ष निकलता है कि Z_n का बंटन फलन $F(Z_n)$, n बृहद् होने की स्थिति में प्रसामान्य बंटन F (x) की ओर प्रवृत्त होता है, जबकि

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx.$$

$$\lim_{n\to\infty} F(Z_n) = F(x) \qquad \text{....(8.11)}$$

(8.11) द्वारा स्पष्ट है कि $\bar{X}$ का बटन सन्निकट प्रसामान्य बटन की ओर प्रवृत्त होता है जिसके प्राचल μ और $\frac{\sigma^2}{n}$ है जबकि n का मान वृहत् हो।

लिआपुनोव-प्रमेय

यदि $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$, n यादृच्छिक चरों का एक अनुक्रम है जिसमे $E(X_i)=\mu_i$ और $E(X_i-\mu_i)^2=\sigma_i^2<\infty$ माना कि माध्य के परित तीसरा निरपेक्ष आघूर्ण ρ_i^3, n के प्रत्येक मान के लिए परिमित है और इसका अस्तित्व है जहां,

$$\rho_i^3=E(|X_i-\mu_i|)^3$$

यदि सम्बन्ध $\lim_{n\to\infty}\frac{\rho}{\sigma}=0$ सत्य है जबकि

$$\rho^3=\rho_1^3+\rho_2^3+\ldots+\rho_n^3,$$

तो योग $\sum_1 X_i$ अनन्तस्पर्शत प्रसामान्य होता है जिसका

माध्य $\mu=\mu_1+\mu_2+\ldots+\mu_n$

और प्रसरण $\sigma^2=\sigma_1^2+\sigma_2^2+\ldots+\sigma_n^2$ है।

प्रमेय 8 1 यदि $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$ एक द्विपद बंटित चरों का अनुक्रम है जिनके माध्य व प्रसरण क्रमश np व npq हैं तो सिद्ध करना है कि चर X, सफलताओं की संख्या, का बटन प्रसामान्य बटन की ओर प्रवृत्त होता है जैसे-जैसे n अनन्त की ओर प्रवृत्त होता है।

प्रमाण क्योंकि सभी चर स्वतन्त्र और सर्वसम बंटित हैं और उनके माध्य एवं प्रसरण परिमित हैं, इस लिए यह लिंडबर्ग-लेवी प्रमेय का ही एक अनुप्रयोग है। इसी प्रमेय के प्रयोग को यहां प्रदर्शित किया गया है।

अध्याय [illegible] मे दिया गया है कि n परीक्षणो मे X सफलताएँ होने की स्थिति में प्रायिकता फलन $\binom{n}{X} p^X q^{n-X}$ है। इस बटन का अभिलक्षणिक फलन

$\phi(t)=\left(q+pe^{it}\right)^n$ है।

माना कि

$$Z=\frac{X-np}{\sqrt{npq}}$$

यदि यह सिद्ध कर दें कि Z का अभिलक्षणिक फलन

$$\phi_Z(t)\to e^{-\frac{t^2}{2}}$$

जब $n\to\infty$

है, तो प्रमेय सिद्ध हो जायेगा।

हम जानते हैं कि $E(Z)=0$ और $V(Z)=1$ है।
यहाँ

$$\phi_Z(t)=E\left(e^{itZ}\right)$$

या
$$\phi_Z(t)=\sum_{X=0}^{n} e^{\frac{it(X-np)}{\sqrt{npq}}}\binom{n}{X}p^X q^{n-X} \qquad \text{....(8 12)}$$

$$=e^{-i\sqrt{\frac{np}{q}}\,t}\left[q+pe^{\frac{it}{\sqrt{npq}}}\right]^n$$

$$=\left[q e^{-i\sqrt{\frac{p}{nq}}\,t}+pe^{\frac{it}{\sqrt{npq}}-i\sqrt{\frac{p}{nq}}\,t}\right]^n$$

$$=\left[p e^{it\sqrt{\frac{q}{np}}}+q e^{-it\sqrt{\frac{p}{nq}}}\right]^n$$

$$\phi_Z(t)=\left[p\left\{1+it\sqrt{\frac{q}{np}}+\frac{1}{2!}\left(it\sqrt{\frac{q}{np}}\right)^2+\frac{1}{3!}\left(it\sqrt{\frac{q}{np}}\right)^3+\ldots\right\}\right.$$
$$\left.+q\left\{1-\left(it\sqrt{\frac{p}{nq}}\right)+\frac{1}{2!}\left(it\sqrt{\frac{p}{nq}}\right)^2-\frac{1}{3!}\left(it\sqrt{\frac{p}{nq}}\right)^3+\ldots\right\}\right]^n$$

$$=\left[p\left\{1+it\sqrt{\frac{q}{np}}-\frac{1}{2!}t^2\frac{q}{np}-\frac{it^3}{3!\,n^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{3}{2}}+\ldots\right\}\right.$$
$$\left.+q\left\{1-it\sqrt{\frac{p}{nq}}-\frac{1}{2!}t^2\frac{p}{nq}+\frac{1}{3!}it^3\left(\frac{p}{nq}\right)^{\frac{3}{2}}+\ldots\right\}\right]^n$$

$$=\left[(p+q)-\frac{1}{2n}t^2+\text{पद जिनके हर में } n^{\frac{3}{2}} \text{ या उच्चतर घात हैं}\right]^n$$

$$=1-\tfrac{1}{2}t^2+\text{पद जिनके हर मे } n^{\frac{1}{2}} \text{ या उच्चतर घात हैं}$$

$$\phi_Z(t)\to e^{-\frac{t^2}{2}} \qquad \text{जब } n\to\infty$$

अतः प्रमेय सिद्ध हुआ।

प्रमेय 2 . यदि X एक यादृच्छिक चर है जिसका बंटन 1 स्वतन्त्रता-कोटि के साथ χ^2 है और अभिलक्षणिक फलन $\phi(t) = (1-2it)^{-\frac{1}{2}}$ है तो

$$\xi_n = X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_n$$

का χ_n^2 बटन, जिसकी स्वतन्त्रता-कोटि n है, प्रसामान्य बटन की ओर प्रवृत होता है जब n अनन्त की ओर प्रवृत्त होता है।

प्रमाण उपर्युक्त प्रमेय लिंडबर्ग लेवी प्रमेय का अनुप्रयोग है। इसी की सहायता से यहाँ प्रमेय को सिद्ध किया गया है।

अध्याय 7 में दिया जा चुका है कि χ_n^2 का अभिलक्षण फलन

$$\phi(t) = (1-2it)^{-\frac{n}{2}}$$

और $E(\xi_n) = n$ व $V(\xi_n) = 2n$

$\therefore$ मानक चर $\xi = \dfrac{\xi_n - n}{\sqrt{2n}}$

ξ का अभिलक्षण फलन

$$\psi(t) = E\left(e^{it\xi}\right)$$

$$= E\left\{e^{\frac{it(\xi_n - n)}{\sqrt{2n}}}\right\}$$

$$= e^{it\sqrt{\frac{n}{2}}}\, E\left(e^{\frac{it\,\xi_n}{\sqrt{2n}}}\right)$$

$$= e^{-it\sqrt{\frac{n}{2}}}\left(1 - \frac{2it}{\sqrt{2n}}\right)^{-\frac{n}{2}}$$

$$\therefore \log \psi_n(t) = -it\sqrt{\frac{n}{2}} - \frac{n}{2}\log\left(1 - it\sqrt{\frac{2}{n}}\right)$$

$$\log \psi_n(t) = -it\sqrt{\frac{n}{2}} - \frac{n}{2}\left(-it\sqrt{\frac{2}{n}} + \frac{t^2}{2}\cdot\frac{2}{n} + \text{पद जिनके हर में } n^{\frac{3}{2}} \text{ या उच्चतर घात हैं।}\right)$$

$$= -it\sqrt{\frac{n}{2}} + it\sqrt{\frac{n}{2}} - \frac{t^2}{2} + \text{पद जिनके हर में } n^{\frac{1}{2}} \text{ या उच्चतर घात हैं}$$

$$= -\frac{1}{2}t^2 + 0\left(n^{-\frac{1}{2}}\right)$$

$$\log \psi_n(t) = -\frac{t^2}{2} \quad \text{जब} \quad n \to \infty$$

$$\therefore \quad \psi_n(t) = e^{-\frac{1}{2}t^2}$$

$e^{-\frac{1}{2}t^2}$, प्रसामान्य बटन का अभिलक्षणिक फलन है अत χ^2 बटन भी प्रसामान्य बटन की ओर प्रवृत्त होता है जबकि प्रेक्षणों की सख्या n वृहद् हो।

प्रश्नावली

1. केन्द्रीय सीमा प्रमेय को समझाकर लिखिए और बताइये कि इसे अत्यधिक महत्वपूर्ण प्रमेय क्यों समझा जाता है ?
2. सीमा प्रमेयो का क्या महत्व है और इनका सांख्यिकी मे किस प्रकार प्रयोग होता है ?
3. यदि $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$ प्वासो बटित स्वतन्त्र चरो का अनुक्रम है और इनके प्राचल m हैं तो सिद्ध कीजिये कि जब n का मान अनन्त की ओर प्रवृत्त होता है तो $\sum_{i=1}^{n} X_i$ का बटन प्रसामान्य बटन की ओर प्रवृत्त होता है।

□□□

9 सांख्यिकीय परिकल्पना–परीक्षा

किसी प्रतिदर्श का अध्ययन समग्र के प्रति जानकारी के हेतु किया जाता है, न कि स्वयं प्रतिदर्श की जानकारी के उद्देश्य से। इस अध्ययन में एक तो किसी परिकल्पना की परीक्षा की जाती है और दूसरे किन्हीं प्राचलों का परिकलन करना होता है। इस अध्याय में परिकल्पना–परीक्षा के विषय में जानकारी दी गयी है। विभिन्न परीक्षाओं को जानने से पूर्व विभिन्न परिभाषाओं तथा मूल सिद्धान्तों को जानना आवश्यक है। अतः पाठकों को निम्न विवरण भली भाँति समझना चाहिये।

सांख्यिकीय परिकल्पना

साधारणतया हमको किसी भी बटन के प्राचल ज्ञात नहीं होते हैं अर्थात् समग्र के विषय में पूर्ण ज्ञान नहीं होता है। किन्तु किसी सिद्धान्त, अनुभव या अन्य परीक्षणों के आधार पर यह अनुमान लगाया जाता है कि किसी प्राचल का इतना मान होना चाहिये या किन्हीं एक से अधिक समग्रों के प्राचल में कोई विशेष सम्बन्ध होना चाहिये। अतः अपने इस ज्ञान को एक परिकल्पना के रूप में स्थापित करते हैं और फिर किसी भी उचित सांख्यिकीय परीक्षा का प्रयोग करके यह निश्चित करना होता है कि निराकरणीय परिकल्पना स्वीकृति करने योग्य है या नहीं। कोश में परिकल्पना शब्द का अर्थ है कि कोई सिद्धान्त, अनुभव या अनुमान जिसको कि किसी अन्य अन्वेषण के हेतु मान लिया जाता है किन्तु सांख्यिकीय परिकल्पना से अभिप्राय किसी समग्र के विषय में या मुख्यतया समग्र के एक या एक से अधिक प्राचलों के विषय में किसी कथन से है जैसे, एक सिक्के को उछालें तो इसके शीर्ष की ओर से गिरने की प्रायिकता $\frac{1}{2}$ है। इसी प्रकार एक पासक को फेंके तो ऊपर फलक पर किसी बिन्दु के आने की प्रायिकता $\frac{1}{6}$ है।

परिकल्पना को H द्वारा निरूपित करते हैं। माध्य एवं प्रसरण के लिए कुछ परिकल्पनाओं को सामान्य रूप में इस प्रकार दिया जा सकता है :—

$H: \mu = \mu_0$ (जबकि μ समग्र माध्य है और μ_0 एक स्थिरांक है जिसका कोई भी मान हो सकता है।)

$H: \mu < \mu_0$ या $\mu > \mu_0$

$H: \mu_1 > \mu_2$ या $\mu_1 < \mu_2$ (जबकि μ_1 और μ_2 दो भिन्न समग्रों के माध्य हैं।)

या $H: \mu_1 = \mu_2$

$H: \sigma^2 = \sigma_0^2$ (जबकि σ^2 एक समग्र का प्रसरण है और σ_0^2 एक अचर मान है।)

$H: \sigma_1^2 > \sigma_2^2$ या $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ (जबकि σ_1^2 व σ_2^2 दो भिन्न समग्रों के प्रसरण हैं।)

निराकरणीय परिकल्पना

किसी अनुसंधानकर्ता के लक्ष्य को प्राय परिकल्पना के रूप में दिया जाता है और इस परिकल्पना के विषय में यह निश्चित करना होता है कि इसे स्वीकार किया जाय या नहीं किया जाय। ऐसी परिकल्पना को निराकरणीय परिकल्पना कहते हैं और इसे H_0 द्वारा निरूपित करते हैं। निराकरणीय परिकल्पना को दो प्रकार से विभाजित किया गया है—

(क) सरल परिकल्पना —एक परिकल्पना जो कि सम्बन्धित चर के बटन फलन का पूर्णतया उल्लेख करती है सरल परिकल्पना कहलाती है। जैसे परिकल्पना H_0 कि एक सिक्का अनभिनत है अर्थात् हेड या टेल आने की प्रायिकता $\frac{1}{2}$ है।

(ख) संयुक्त परिकल्पना —प्राय वह निराकरणीय परिकल्पना 'H_0' जो सरल नहीं है संयुक्त परिकल्पना कहलाती है। इसको निम्नांकित उदाहरण द्वारा समझा जा सकता है :—

H_0 : चर X का बटन प्रसामान्य है।

इस परिकल्पना मे बटन के प्राचलो (माध्य एव प्रसरण) का कोई उल्लेख नहीं है इस कारण बटन फलन का उल्लेख पूर्ण नही है केवल बटनों के एक समूह का उल्लेख है जिनमे से कोई भी एक प्रेक्षित चर का बटन हो सकता है।

वैकल्पिक परिकल्पना

निराकरणीय परिकल्पना के विपरीत परिकल्पना को वैकल्पिक परिकल्पना कहते हैं और इसे प्राय H_1 या H_A द्वारा निरूपित किया जाता है। व्यवहार में सदैव निराकरणीय परिकल्पना H_0 की ही परीक्षा की जाती है। वैकल्पिक परिकल्पना किसी प्रयोगकर्त्ता की अनुसधान परिकल्पना का सक्रियात्मक कथन (Operational statement) है। अत: H_1 उस हढ़कथन का गठन करता है जिसको कि H_0 के अस्वीकार किये जाने पर, स्वीकार कर लिया जाता है। इसके विपरीत, यदि H_0 को स्वीकार किया जाता है तो H_1 को अस्वीकार कर दिया जाता है।

निराकरणीय व वैकल्पिक परिकल्पना के कुछ उदाहरण निम्न हैं। यहां सभी सकेत वही हैं जो परिकल्पना के साथ दिये गये हैं।

निराकरणीय परिकल्पना	वैकल्पिक परिकल्पना
Ho : $\mu=\mu_0$	$H_1 : \mu\neq\mu_0$
Ho : $\mu_1>\mu_2$	$H_1 : \mu_1<\mu_2$
Ho : $\mu_1=\mu_2$	$H_1 : \mu_1\neq\mu_2$
Ho : $\sigma^2>0$	$H_1 : \sigma^2>0$
Ho : $\sigma_1^2=\sigma_2^2$	$H_1 : \sigma_1^2\neq\sigma_2^2$
आदि।	

परिकल्पना परीक्षा में त्रुटियाँ

निराकरणीय परिकल्पना H_0 को स्वीकार करना है या नहीं इस बात का निर्णय, प्रतिदर्श प्रेक्षणों के आधार पर किसी भी उपयुक्त सांख्यिकीय परीक्षा का प्रयोग करके, करना होता है। परीक्षा कोई भी हो इस निर्णय में दो प्रकार की त्रुटि होने की संभावना सदैव रहती है। इन्हीं दो प्रकार की त्रुटियों का वर्णन निम्न प्रकार है —

प्रथम प्रकार की त्रुटि यदि H_0 को अस्वीकार कर दें जब कि H_0 वास्तव में सत्य है। प्रथम प्रकार की त्रुटि होने की प्रायिकता को α द्वारा निरूपित करते हैं।

द्वितीय प्रकार की त्रुटि यदि H_0 को स्वीकार कर लिया जाये जब कि H_0 असत्य या मिथ्या है तो इसे द्वितीय प्रकार की त्रुटि कहते हैं। द्वितीय प्रकार की त्रुटि की प्रायिकता को β द्वारा निरूपित करते हैं।

इन दोनों प्रकार की त्रुटियों को इस प्रकार समझ सकते हैं —

माना कि एक व्यक्ति ने कुछ अपराध किया है पर न्यायाधीश द्वारा वह व्यक्ति छोड़ दिया जाता है। यह प्रथम प्रकार की त्रुटि है।

एक व्यक्ति ने अपराध नहीं किया है किन्तु उसे दोषी मान लिया जाता है और दण्ड दे दिया जाता है। यह द्वितीय प्रकार की त्रुटि है।

इस उदाहरण से स्पष्ट है कि इन दोनों प्रकार की त्रुटियों में द्वितीय प्रकार की त्रुटि अधिक हानिकारक है। अब कोई भी निर्णय करते समय यह प्रयत्न किया जाता है कि किसी भी प्रकार की त्रुटि न हो जोकि पूर्णतया संभव नहीं है। अतः मुख्यतया यह प्रयत्न रहता है कि प्रथम प्रकार की कोई त्रुटि चाहे हो जाय, पर द्वितीय प्रकार की त्रुटि कम से कम होनी चाहिये।

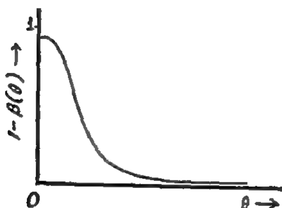
सार्थकता-स्तर

प्रथम प्रकार की त्रुटि होने की प्रायिकता को सार्थकता स्तर कहते हैं। व्यावहारिक दृष्टि से यह प्रथम प्रकार की त्रुटि की मात्रा है जिसकी कि कोई निर्णय लेते समय जोखिम (risk) ली जाती है। यदि यह प्रायिकता α है तो सार्थकता स्तर को प्रायः $100\,\alpha$ प्रतिशत अंकों के रूप में दिया जाता है। जैसे माना $\alpha = 0.05$ है तो सार्थकता स्तर 5 प्रतिशत कहलाता है। इसी प्रकार $\alpha = 0.01$ होने की स्थिति में सार्थकता स्तर 1 प्रतिशत कहलाता है। किसी परिकल्पना की परीक्षा में सार्थकता स्तर कितना रखना है इसका निश्चय प्रयोग करने से पूर्व कर लेना आवश्यक है अन्यथा निर्णय करते समय व्यक्तिगत अभिनति आ सकती है। अधिकतर परिकल्पना परीक्षाएँ 5 या 1 प्रतिशत सार्थकता स्तर पर ही की जाती है। यह एक व्यावहारिक नियम है।

परीक्षा की सामर्थ्य

किसी परीक्षा द्वारा मिथ्या परिकल्पना के अस्वीकार किये जाने की प्रायिकता को उस परीक्षा की सामर्थ्य कहते हैं। यह प्रायिकता वैकल्पिक परिकल्पना के अन्तर्गत वास्तविक प्राचल मान θ पर आधारित होती है और उसे $(1-\beta)$ द्वारा सूचित किया जाता है जहाँ β द्वितीय प्रकार की त्रुटि की प्रायिकता है। जितना $(1-\beta)$ का मान अधिक होगा

है उतनी परीक्षा अच्छी समझी जाती है। यदि दो परीक्षाएँ समान प्रतिदर्श परिमाण व समान सार्थकता स्तर पर आधारित हैं तो एक परीक्षा दूसरे से अधिक शक्तिशाली कहलाती है जब पहली परीक्षा में द्वितीय प्रकार की त्रुटि की प्रायिकता दूसरी परीक्षा की अपेक्षा कम हो। प्राचल θ व परीक्षा की सामर्थ्य $\{1-\beta\}$ के मानों का लेकर आलेखित बिन्दुओं द्वारा प्राप्त वक्र को सामर्थ्य वक्र कहते हैं और इसका रूप प्राय चित्र (9–1) जैसा होता है।



चित्र 9–1 सामर्थ्य वक्र का एक रूप।

स्वतंत्रता-कोटि

किन्ही प्रेक्षणो के समुच्चय में स्वतन्त्र प्रेक्षणों की सख्या को स्वतन्त्रता-कोटि कहते हैं। इस परिभाषा को इस प्रकार भी समझ सकते हैं —किसी समुच्चय के प्रेक्षणों की सख्या में से इस समुच्चय सम्बन्धी ज्ञात प्रतिबन्धों की सख्या घटादें तो स्वतन्त्रता-कोटि ज्ञात हो जाती है। जैसे, माना कि एक प्रतिदर्श में n प्रेक्षण $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$ हैं। यह ज्ञात है कि इन प्रेक्षणो के योग का सदैव एक नियत मान होता है। अत इनमें से $(n-1)$ प्रेक्षणो के मान ज्ञात हो तो शेष एक प्रेक्षण का मान सदैव ज्ञात कर सकते हैं। इस प्रकार केवल $(n-1)$ स्वतन्त्र प्रेक्षण हैं। अत इस प्रतिदर्श के लिए स्वतन्त्रता-कोटि $(n-1)$ हैं। यदि कोई एक अन्य प्रतिबन्ध अर्थात् प्रेक्षणों में सम्बन्ध ज्ञात हो तो इस प्रतिदर्श के लिए स्वतन्त्रता-कोटि $(n-2)$ होगी। यह ध्यान रहे कि भिन्न-भिन्न प्रतिदर्शों के लिए स्वतन्त्रता-कोटि भी भिन्न भिन्न हो सकती है।

निराकरण-क्षेत्र

एक परीक्षा के लिए निराकरण क्षेत्र R, किसी परीक्षा प्रतिदर्शज के वास्तविक मानों का वह उपसमुच्चय है जिसमें परिकल्पना को परीक्षा के अन्तर्गत अस्वीकार कर दिया जाता है। किसी परीक्षा में क्षेत्र R की सीमाओं (bounds) को क्रांतिक मान (critical values) कहते हैं। उदाहरणार्थ यदि किसी t – परीक्षा में H_0 को अस्वीकार कर दिया जाता है जब $t \geqslant t_\alpha$ हो तो t_α क्रांतिक मान है।

एक पुच्छ व दो पुच्छ परीक्षा

यदि निराकरण क्षेत्र निम्नांकित में से किसी प्रकार का हो,

$$t < x_1$$

अथवा $$t > x_2$$

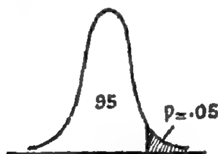
तो इन दोनों ही अवस्थाओं में परीक्षा को एक पुच्छ परीक्षा कहते हैं, जबकि t परीक्षा-प्रतिदर्शज है।

यदि निराकरण-क्षेत्र निम्न प्रकार का हो,

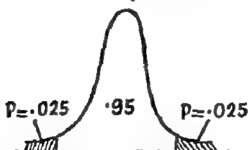
$$x_1 < t < x_2$$

तो परीक्षा को दो पुच्छ परीक्षा कहते हैं। इनके नामों की सार्थकता प्रतिदर्शज के बारम्बारता कलन के वक्र से स्पष्ट हो जाती है।

वैकल्पिक परिकल्पना के आधार पर यह ज्ञात हो जाता है कि निराकरण क्षेत्र बारम्बारता वक्र के एक सिरे पर है या दोनों सिरों पर। यदि यह क्षेत्र एक सिरे पर हो तो इसे एक पुच्छ परीक्षा और दोनों सिरों पर हो तो इसे दो पुच्छ परीक्षा कहते हैं। इस क्षेत्र का क्षेत्रफल सार्थकता स्तर α के समान होता है। $\alpha = 05$ अर्थात् 5 प्रतिशत सार्थकता-स्तर के लिए एक पुच्छ व दो पुच्छ परीक्षा की स्थिति में निराकरण क्षेत्र क्रमशः चित्र (9–2) व (9–3) में दिखाया गया है।



चित्र 9–2 एक पुच्छ परीक्षा में $\alpha = 05$ के लिए रेखाच्छादित क्षेत्र, क्रांतिक क्षेत्र है।



चित्र 9–3 दो पुच्छ परीक्षा में $\alpha = 05$ के लिए रेखाच्छादित क्षेत्र क्रांतिक क्षेत्रों को प्रदर्शित करते हैं।

स्टुडेन्ट t-परीक्षा

यदि इस परिकल्पना की परीक्षा करना है कि समग्र माध्य का मान μ_0 है तो t-परीक्षा का उपयोग होता है जिसको नीचे समझाया गया है। यह परीक्षा एक प्रतिदर्शज के मान पर आधारित होती है जिसका बटन t–बटन के समान होता है। परीक्षा के नाम का यही कारण है। स्टुडेन्ट t–परीक्षा का प्रयोग केवल एक समग्र माध्य या दो समग्र माध्यो के प्रति परिकल्पना की परीक्षा के लिए ही किया जाता है जिनका वर्णन इस अध्याय मे दिया गया है। इस परीक्षा का प्रयोग एक या दो सहसम्बन्ध गुणाकों या समाश्रयण गुणाको से सम्बन्धित परिकल्पनाओ की परीक्षा के लिए भी किया जाता है जिनका वर्णन आगामी अध्यायो मे दिया गया है।

मान लीजिये कि समग्र मे से n परिमाण का एक याहच्छिक प्रतिदर्श चुना गया जिसमे प्रेक्षण-मान $X_1, X_2, X_3, \ldots \ldots, X_n$ हैं। यदि इन मानो का माध्य $\overline{X}$ और मानक विचलन s से सूचित किया जाय तो प्रतिदर्शज,

$$t = \frac{\overline{X} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \qquad \ldots (9.1)$$

का बटन $(n-1)$ स्वतन्त्रता कोटि के t–बटन के समान होता है।

t–परीक्षा के प्रति अभिधारणाएँ

यदि प्रयोग मे निम्नांकित कल्पनाएँ सत्य प्रतीत होती है तो t–परीक्षा द्वारा प्राप्त परिणाम शुद्ध होते हैं।

(क) याहच्छिक चर X का बटन प्रसामान्य है।

(ख) प्रतिदर्श प्रेक्षण परस्पर स्वतन्त्र हैं।

(ग) प्रेक्षणो के अभिलेखन मे कोई त्रुटि नहीं हुई है।

(घ) प्रतिदर्श परिमाण वृहद् नही है। इसके लिए कोई विशेष सख्या बताना तो सम्भव नहीं है फिर भी यह माना जाता है कि प्रतिदर्श का परिमाण 50 से अधिक नही होना चाहिये। यदि प्रतिदर्श वृहद् हो तो t–बटन प्रसामान्य बटन के तुल्य हो जाता है।

परीक्षा निकष

यदि X एक t_{n-1} चर है तो इस बटन की भुजाक्ष t_α वह मान है जिसके लिए

$P(x > t_\alpha) = \alpha/2$ यहाँ α पूर्व-निर्धारित सार्थकता स्तर होता है।

$H_0 : \mu = \mu_0$ की $H_1 : \mu \neq \mu_0$ के विरुद्ध परीक्षा हेतु,

यदि $|t| > t_\alpha$ हो तो H_0 अस्वीकृत है

और यदि $|t| < t_\alpha$ हो तो H_0 स्वीकृत है

$H_0 : \mu = \mu_0$ की $H_1 \;\; \mu > \mu_0$ के विरुद्ध परीक्षा हेतु एक पुच्छ परीक्षा का उपयोग होता है।

यहाँ यदि परिकलित t का मान ऋणात्मक हो तो परीक्षा निकष का बिना प्रयोग किये ही H_0 को स्वीकार किया जा सकता है।

यदि परिकलित t का मान धनात्मक है तो t_α वह मान है जिसके लिए $P(x > t_\alpha) = \alpha$ है।

इस स्थिति मे परीक्षा निकष इस प्रकार है :—

यदि $t > t_\alpha$ हो तो H_0 अस्वीकृत है अर्थात् H_1 स्वीकृत है

और यदि $t < t_\alpha$ हो तो H_0 की H_1 $\mu < \mu_0$ के विरुद्ध परीक्षा हेतु भी एक पुच्छ का उपयोग होता है।

इस स्थिति मे परिकलित t का मान यदि धनात्मक हो तो H_0 को बिना परीक्षा निकष का प्रयोग किये ही अस्वीकार किया जा सकता है।

यदि t का परिकलित मान ऋणात्मक हो तो परीक्षा निकष निम्नांकित है —

यदि $-t < -t_\alpha$ हो तो H_0 अस्वीकृत है अर्थात् H_1 स्वीकृत है

और यदि $-t > -t_\alpha$ हो तो H_0 स्वीकृत है अर्थात् H_1 अस्वीकृत है।

यहाँ यह बात ध्यान देने योग्य है कि यदि उपर्युक्त असमिका को -1 से गुणा करदें अर्थात् t के चिह्नो को नहीं लिया जाये तो परीक्षा निकष, H_0 $\mu > \mu_0$ के लिए निकष के तुल्य हो जाता है।

यदि कभी ऐसी स्थिति आ जाए कि परिकलित t का मान सारणीबद्ध t के मान के समान हो तो किसी अन्य परीक्षा का प्रयोग करना चाहिये यदि ऐसा करना उचित हो, या एक नया प्रतिदर्श लेकर फिर से t-परीक्षा करली चाहिये। इसके अतिरिक्त एक उपाय यह भी है कि इस परीक्षा द्वारा H_0 के स्वीकार होने की प्रायिकता ज्ञात करली जाय और समस्या के महत्व के अनुसार निर्णय कर लिया जाय।

टिप्पणी यदि t बटन के लिए सारणी दोनो पुच्छों पर निराकरण क्षेत्र के लिए उपलब्ध हो, तो एक पुच्छ परीक्षा मे t_α का मान देखते समय α सार्थकता स्तर के लिए, 2α प्रायिकता पर सारणी का मान देखना होता है क्योंकि निराकरण क्षेत्र का क्षेत्रफल इस स्थिति में एक पुच्छ पर α ही होगा।

उदाहरण 9 1. पहले किये गये प्रयोगों के आधार पर ऐसा समझा जाता है कि बधिया पशुओ (steers) की प्रति दिन औसत ग्रहण शक्ति 7 5 किलोग्राम है। एक नये प्रयोग मे प्रति दिन ग्रहण शक्ति सम्बन्धी निम्न प्रेक्षण प्राप्त हुए।

प्रति दिन औसत

ग्रहण शक्ति (कि॰ ग्राम) 7 53, 5 84, 6 72, 6 78, 7 72, 7 54, 5 71, 5 97

तो परीक्षा करनी है कि यह प्रेक्षण पहले दी गयी 7 5 कि० ग्राम प्रति दिन ग्रहण शक्ति का समर्थन करते है ।

इस प्रयोग मे परिकल्पना

$$H_0 \quad \mu = 7{\cdot}5 \text{ किलोग्राम की } H_1 \quad \mu \neq 7\ 5$$

के विरुद्ध परीक्षा करनी है । अत t–परीक्षा का प्रयोग किया गया है । इस परीक्षा के लिए,

$\Sigma X = 53\ 91,$ $\Sigma X^2 = 368\ 144$

$\bar{X} = 6\ 7438,$

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\left\{ \Sigma X^2 - \frac{(\Sigma X)^2}{n} \right\}$$

$$= \tfrac{1}{7}\ (368\ 144 - 363\ 286)$$

$$= \tfrac{1}{7} \times 4\ 858$$

$$= 0\ 6940$$

$\therefore \quad s = 0\ 83$

$$t = \frac{6\ 738 - 7\ 5}{83/\sqrt{8}}$$

$$= \frac{-\ 76}{293}$$

$$= -\ 2\ 60$$

सारणी परि०[1] घ–3) द्वारा $\alpha = 05$ और स्व को[2] 7 के लिए $t\ (05) = 2\ 365$ सारणीवद्ध t का मान परिकलित t के मान से कम है अत $\alpha = 05$ के लिए H_0 को अस्वीकार कर दिया । इससे यह निष्कर्ष निकलता है कि नये प्रयोग के आधार पर 7 5 कि ग्राम ग्रहण शक्ति से सहमति नही है ।

यदि यहाँ $H_0 \quad \mu = 7\ 5$ की $H_1 \quad \mu < 7\ 5$ के विरुद्ध परीक्षा करनी हो तो एक पुच्छ परीक्षा करनी होगी । इस स्थिति मे $t_{(05,\ 7)} = 1\ 895$ है । t का परिकलित मान सारणीवद्ध t के मान से अधिक है । अत H_0 अस्वीकृत है या H_1 स्वीकृत है ।

दो समग्र माध्यो के प्रति परिकल्पनाओ की परीक्षा

माना कि दो प्रसामान्य समग्र हैं जिनके प्राचल क्रमश

(μ_1, σ_1^2) और (μ_2, σ_2^2) हैं । परिकल्पना

1. परि०—परिशिष्ट
2 स्व० को०—स्वतत्रता कोटि

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 \text{ की } H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$$

के विरुद्ध परीक्षा करनी है

माना कि इन समग्रों में से क्रमश n_1 और n_2 परिमाण के यादृच्छिक प्रतिदर्शों का चयन किया गया है।

इन प्रतिदर्शों में प्रेक्षण इस प्रकार हैं।

प्रतिदर्श 1 : $X_{11}, X_{12}, X_{13} \ldots\ldots X_{1n1}$

प्रतिदर्श 2 : $X_{21}, X_{22}, X_{23} \ldots X_{2n2}$

H_0 की परीक्षा दो स्थितियों में की जा सकती है —

(क) जब $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ और अज्ञात हैं (ख) जब $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ और ये प्रसरण अज्ञात हैं।

स्थिति (क) : $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ जब $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ और अज्ञात हैं।

परिकल्पना H_0 की परीक्षा के लिए निम्न प्रतिदर्शज t का प्रयोग करना होता है

$$t = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2)}{s_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \qquad \ldots(9\ 2)$$

जब कि व्यञ्जक (9 2) में $\overline{X}_1$ व $\overline{X}_2$ क्रमश प्रथम व द्वितीय प्रतिदर्शों के माध्य है। s_p एकत्रित मानक विचलन है। इनका परिकलन निम्नांकित सूत्रों द्वारा करते हैं —

$$\overline{X_1} = \sum_{i=1}^{n_1} X_{1i}/n_1, \ \overline{X_2} = \sum_{j=1}^{n_2} X_{2j}/n_2$$

और
$$s_p^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_1} (X_{1i} - \overline{X}_1)^2 + \sum_{j=1}^{n_2} (X_{2j} - \overline{X}_2)^2}{(n_1 + n_2 - 2)} \qquad \ldots(9\ 3)$$

$$s_p^2 = \frac{\left\{ \sum_i X_{1i}^2 - \frac{(\sum_i X_{1i})^2}{n_1} \right\} + \left\{ \sum_{j=1}^{n_2} X_{2j}^2 - \frac{(\sum_j X_{2j})^2}{n_2} \right\}}{(n_1 + n_2 - 2)} \qquad \ldots(9.3\ 1)$$

$$= \frac{(n_1 - 1)\, s_1^2 + (n_2 - 1)\, s_2^2}{(n_1 + n_2 - 2)} \qquad \ldots(9.3\ 2)$$

जब कि s_1^2 व s_2^2 क्रमशः प्रथम व द्वितीय प्रतिदर्शों के प्रसरण हैं।

t के परिकलित मान की, $t_{n_1+n_2-2}$ के α बिन्दु t_α, से तुलना करके पिछले खण्ड मे दिये गये नियमानुसार H_0 की स्वीकृति या अस्वीकृति के विषय मे निर्णय लिया जाता है।

उदाहरण 9.2 : एक डेरी फार्म पर ढोरो की गर्भावधि पाडा (male) या पडिया (Female) जन्मने के अनुसार निम्नाकित सारणी मे दी गयी है —

गर्भावधि पाडे के लिए, X_1 (दिन)	गर्भावधि पडिया के लिए X_2 (दिन)
288 60	287 95
289 44	286 47
291 24	285 20
290 61	287 95
291 04	287 17
288 50	287 63
289 29	286 49
289 86	287 87
289 87	287 95
288 75	287 59
289 45	286 72
291 43	

परीक्षा करनी है कि पाडे के जन्मने मे माध्य गर्भावधि μ_1 और पडिया के जन्मने मे गर्भावधि μ_2 समान हैं अर्थात् Ho $\mu_1=\mu_2$ की H_1 $\mu_1 \neq \mu_2$, के विरुद्ध परीक्षा करनी है।

माना कि पाडा व पडिया के जन्मने की गर्भावधि का प्रसरण समान है अर्थात् $\sigma_1^2=\sigma_2^2$. यहाँ,

$\bar{X}_1=289\ 84,$

$\bar{X}_2=287\ 18$

$(n_1-1)\ s_1^2=11\ 6582$

$(n_2-1)\ s_2^2=7\ 6991$

$s_p^2=0\ 9218$

$s_p=0\ 96$

और $t = \dfrac{289\ 84-287\ 18}{96\sqrt{\dfrac{1}{12}+\dfrac{1}{11}}}$

$= 6\ 645$

$\alpha = 05$ और स्व को $=21$ के लिए सारणी (परि ष-3) द्वारा t का मान $t_{05} = 2\ 080$ है जो कि परिकलित t के मान से अधिक है। अत H_0 अस्वीकृत है अर्थात् पाडा व पड़िया के लिए गर्भावधि समान नहीं है।

स्थिति ख परिकल्पना

$H_0\ \mu_1=\mu_2$ की $H_1\ \mu_1 \neq \mu_2$ के विरुद्ध परीक्षा करनी है, जब कि $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ और वे अज्ञात हैं।

स्थिति 'क' की भाँति यहाँ भी सब उन्हीं सांकेतनों का प्रयोग किया गया है। परिकल्पना की यह परीक्षा फिशर बरहेन (Fisber and Berhen) ने दी थी। $\sigma_1^2=\sigma_2^2$ की स्थिति में इस प्रकार प्राचला के लिए पूर्ण व पर्याप्त प्रतिदर्शज का अस्तित्व है किन्तु 'ख' में पूर्ण व पर्याप्त प्रतिदर्शज का अस्तित्व है या नहीं, यह जानना असम्भव है। अत (9 2) द्वारा इस परिकल्पना की परीक्षा नहीं की जा सकती। इस स्थिति में निम्नांकित प्रतिदर्शज का प्रयोग करना होता है —

$$t = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)}{\sqrt{\dfrac{s_1^2}{n_1}+\dfrac{s_2^2}{n_2}}} \qquad (9\ 4)$$

इस सूत्र में s_1^2 और s_2^2 प्रथम व द्वितीय प्रतिदर्शों के क्रमश प्रसरण हैं।

इस सूत्र द्वारा परिकलित t के मान की सारणी (परि ष-3) से प्राप्त t_α के मान से तुलना नहीं कर सकते क्योंकि यहाँ t की स्व को (n_1+n_2-2) नहीं है।

तुलना के लिए शुद्ध स्व को निम्नांकित सूत्र द्वारा ज्ञात करके, सारणीबद्ध t का मान ज्ञात कर लिया जाता है और इसकी परिकलित t से तुलना करके H_0 के विषय में निर्णय कर लिया जाता है।

$$\text{शुद्ध स्व को} = \frac{\left(\dfrac{s_1^2}{n_1}+\dfrac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\dfrac{1}{n_1+1}\left(\dfrac{s_1^2}{n_1}\right)^2+\dfrac{1}{n_2+1}\left(\dfrac{s_2^2}{n_2}\right)^2} \quad 2 \qquad (9\ 5)$$

पूर्वनिर्धारित सार्थकता स्तर α ही रहता है।

उपर्युक्त सूत्र (9 5) याद रखने की दृष्टि से कुछ कठिन प्रतीत होता है इस कारण (9 4) द्वारा परिकलित t की एक अन्य मान t' से भी तुलना की जाती है। जब $n_1 \neq n_2$ हो तो,

$$t' = \frac{\frac{s_1^2}{n_1} \times t_1 + \frac{s_2^2}{n_2} \times t_2}{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} \qquad (9\ 6)$$

(9 6) में t_1 और t_2 क्रमश (n_1-1) व (n_2-1) स्व को और α सा स्त पर सारणीबद्ध मान है व t_1 और t_2 के क्रमश भार s_1^2/n_1 और s_2^2/n_2 हैं। अत t' एक भारित मान है। इस स्थिति में भी पहले की भाँति निर्णय लेना होता है अर्थात् यदि $t > t'$ हो तो H_0 को अस्वीकार कर दिया जाता है और यदि $t < t'$, तो H_0 को स्वीकार कर लिया जाता है।

यदि $n_1 = n_2 = n$ हो तो t' का मान, स्व को $(n-1)$ व α सा स्त पर सारणीबद्ध t – मान के समान हो जाता है।

टिप्पणी —यदि दो प्रसरण σ_1^2 व σ_2^2 समान नही हो, तो t–परीक्षा वैध नही रहती है। अत प्रतिदर्श t को दो विभिन्न रूपो में एक तो फिशर व बरहेन द्वारा और अन्य वैल्श व एसपिन (Welch and Aspin) द्वारा दिया गया है। किन्तु स्थिति 'क' व 'ख' मे कोकरन (Cochran) द्वारा दिय गय सन्निकट मान परीक्षा के हेतु पर्याप्त परिशुद्ध हैं और विशेषता यह है कि इनके लिए साधारण t सारणी का प्रयोग करना होता है। यही कारण है कि (9 2) व (9 4) का ही अधिकतर प्रयोग होता है।

उदाहरण 9 3 यदि उदाहरण (9 2) मे यह माने कि पाडा या पडिया की गर्भावधि का प्रसरण समान नही है अर्थात् $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ और अज्ञात होने की स्थिति मे, H_0 $\mu_1 = \mu_2$ की H_1 $\mu_1 \neq \mu_2$ के विरुद्ध परीक्षा निम्न प्रकार कर सकते हैं —

परिकलन करने पर,

$$\bar{X}_1 = 289\ 84,\ \bar{X}_2 = 287\ 18$$

$$s_1^2 = \frac{11\ 6582}{11} = 1\ 06$$

$$s_2^2 = \frac{7\ 6991}{10} = 0\ 77$$

सूत्र (9 4) द्वारा,

$$t = \frac{289\ 84 - 287\ 18}{\sqrt{\frac{1\ 06}{12} + \frac{0\ 77}{11}}}$$

$$= \frac{2\ 66}{\sqrt{0883 + 0700}}$$

$$= \frac{2\ 66}{\cdot 398} = 6\ 68$$

सूत्र (9 5) द्वारा,

$$\text{शुद्ध स्व को} = \frac{(1583)^2}{\frac{(0883)^2}{13} + \frac{(07)^2}{12}} - 2$$

$$= 22\ 90$$

स्वतन्त्रता कोटि एक पूर्णांक है अत 22 9 का समायोजन करके 23 लिया जा सकता है।

$\alpha = 05$ व 23 स्व को के लिए सारणी (परि श-3) द्वारा $t_{(05)} = 2\ 069$ है जो कि परिकलित t के मान 6 68 से कम है अत H_0 अस्वीकृत है। इससे यह निष्कर्ष निकलता है कि पाडा व पडिया के हेतु गर्भावधि काल समान नही समझे जा सकते।

यदि चाहे तो शुद्ध स्व को ज्ञात न करके t के आधार पर निर्णय निम्न प्रकार से ले सकते हैं —

सूत्र (9 6) द्वारा,

$$t' = \frac{0\ 0883 \times 2\ 201 + 0\ 07 \times 2\ 228}{0883 + 0700}$$

जहाँ सारणी (परि श-3) द्वारा,

$$t_{(05,\ 11)} = 2\ 201 \text{ और } t_{(05,\ 10)} = 2\ 228$$

परिकलन करने पर, $t' = 2\ 213$

परिकलित t का मान t' से अधिक है अत H_0 के विषय मे वही निष्कर्ष निकलता है जो कि ऊपर दिया जा चुका है।

विश्वास्यता अन्तराल तथा विश्वास्यता सीमाएँ

यदि दो मान t_1 और t_2 जो कि केवल प्रतिदर्श प्रेक्षणो के फलन हैं, ज्ञात करने सम्भव हैं और प्राचल θ जिसका आगणन करना है वह इस प्रकार है कि

$$P(t_1 < \theta < t_2) = 1 - \alpha \qquad (9\ 6)$$

जब कि α एक निश्चित प्रायिकता है तो t_1 और t_2 के बीच का अन्तराल विश्वास्यता अन्तराल कहलाता है। इसका अभिप्राय है कि व्यवहार मे प्राचल θ के इन दो मानो, t_1 और t_2 के बीच मे होने की प्रायिकता $1-\alpha$ है।

इस विश्वास्यता अन्तराल के क्रमश न्यूनतम व अधिकतम मान t_1 व t_2 ही विश्वास्यता सीमाएँ कहलाते हैं।

विश्वास्यता अन्तराल का वर्णन अध्याय (12) मे भी दिया गया है। अधिक स्पष्टीकरण के लिए इसे प्रतिचयन सिद्धान्त के अध्याय मे भी पढ़ें।

विश्वास्यता-गुणांक

प्रायिकता माप जो कि प्राचल के अन्तराल मे स्वीकृत होने की प्रायिकता बताता है विश्वास्यता-गुणांक कहलाता है।

विश्वास्यता क्षेत्र

यदि अनेक प्राचलों का आगणन करना हो और प्राचल अवकाश में ऐसा क्षेत्र निर्धारित करना सम्भव हो कि प्राचलों के इस क्षेत्र में समावेश होने की प्रायिकता $(1-\alpha)$ है तो इस क्षेत्र को विश्वास्यता क्षेत्र कहते हैं।

समग्र माध्य μ की विश्वास्यता सीमाएँ

यदि एक चयनकृत प्रतिदर्श में n स्वतन्त्र प्रेक्षण $X_1, X_2, X_3, \ldots X_n$ है तो इनके द्वारा $(1-\alpha)$ प्रायिकता पर विश्वास्यता सीमाएँ ज्ञात करने के लिए प्रतिदर्श t का प्रयोग करना होता है जब कि α सा स्त[2] या प्रथम प्रकार की त्रुटि है।

यह ज्ञात है कि प्रतिदर्शज,

$$t = \frac{\overline{X} - \mu}{s/\sqrt{n}}$$

यदि $\sqrt{n}\ (\overline{X} - \mu)/s$ का मान सा स्त α पर $-t_\alpha$ और t_α के बीच में स्थित है अर्थात् स्वीकृति क्षेत्र में है तो समग्र माध्य μ का आगणित मान स्वीकृत होने की प्रायिकता $(1-\alpha)$ है।

अन्यथा इसका मान स्वीकृत नहीं है। अतः μ के विश्वास्यता अन्तराल के लिए निम्न असमिका का सत्य होना आवश्यक है।

$$-t_\alpha < \frac{\overline{X} - \mu}{s/\sqrt{n}} < t_\alpha \tag{9 7}$$

जब कि t_α, $(n-1)$ स्व को व α सा स्त के लिए सारणीबद्ध मान है।

$$\text{या } t_\alpha \frac{s}{\sqrt{n}} < (\overline{X}-\mu) < t_\alpha \frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$\text{या } \overline{X} - t_\alpha \frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + t_\alpha \frac{s}{\sqrt{n}} \tag{9 8}$$

असमिका (9 8) में $\overline{X}$, s और n के मान प्रतिदर्श के आधार पर प्रतिस्थापित कर दिये जाते है। t_α का मान t-बटन सारणी (परि घ-3) द्वारा देखकर प्रतिस्थापित कर

दिया जाता है। यहां μ का मान सीमाओं $(\overline{X} - t_\alpha \frac{s}{\sqrt{n}})$ और $(\overline{X} + t_\alpha \frac{s}{\sqrt{n}})$

के बीच स्वीकृत है अतः μ की उपरि सीमा $\overline{X} + t_\alpha \frac{s}{\sqrt{n}}$ और निम्न $\overline{X} - t_\alpha \frac{s}{\sqrt{n}}$ तक

[2] सा स्त = सार्थकता स्तर

है या μ की विश्वास्यता सीमाएँ $\overline{X} \pm \frac{s}{\sqrt{n}} t_{\alpha}$ के समान है। (9 9)

उपरि सीमा व निम्न सीमा के अन्तर या विश्वास्यता अन्तराल कहते हैं।

दो समग्र माध्यों मे अन्तर, $(\mu_1-\mu_2)$ को विश्वास्यता सीमाएँ

$(\mu_1-\mu_2)$ किसी भी प्राचल की विश्वास्यता सीमाएँ पिछले खण्ड मे दिये गये सिद्धान्त से ज्ञात कर सकते है। व्यञ्जक (9 9) को देखने से पता चलता है कि विश्वास्यता अन्तराल की सीमाएँ ज्ञात करने हेतु उस प्राचल के आकलन मे जिसका विश्वास्यता अन्तराल ज्ञात करना है, इस आगणक के मानक विचलन को प्रतिदर्शज के सारणीबद्ध—मान से गुणा करके एक बार जोड देने व एक बार घटा देने पर विश्वास्यता सीमाएँ ज्ञात हो जाती है। इसी बात को ध्यान मे रखकर $(\mu_1-\mu_2)$ की विश्वास्यता सीमाएँ ज्ञात कर सकते है। यहाँ भी दो स्थितियो, (क) $\sigma_1^2=\sigma_2^2$ और अज्ञात है (ख) $\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$ और अज्ञात है के अन्तर्गत सीमाएँ ज्ञात करनी होगी।

स्थिति 'क' म $(\mu_1-\mu_2)$ की विश्वास्यता सीमाएँ

$$(\overline{X}_1-\overline{X}_2)\pm s_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\ t_{\alpha,(n_1+n_2-2)} \qquad (9\ 10)$$

है

सूत्र (9 10) म सकेतन सूत्र (9 2) के अनुसार है।

$t_{(\alpha),(n_1+n_2-2)}$, t का α सा स्त व (n_1+n_2-2) स्व को के लिए t का सारणीबद्ध मान है। सूत्र मे सभी सकेतनो के मान रखकर $(\mu_1-\mu_2)$ का विश्वास्यता अन्तराल या सीमाएँ ज्ञात कर सकते है। स्थिति 'ख' मे $(\mu_1-\mu_2)$ विश्वास्यता सीमाएँ हैं,

$$(\overline{X}_1-\overline{X}_2)\pm\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}}\ .\ t' \qquad (9\ 11)$$

सूत्र (9 11) म सभी सकेतन सूत्र (9 4) के अनुसार हैं जब कि t' का भारित मान सूत्र (9 6) के अनुसार है। यदि चाहे तो t के स्थान पर शुद्ध स्व को व α सा स्त. पर सारणीबद्ध t मान का प्रतिस्थापन कर सकते है। सभी सकेतनो के मान, सूत्र (9 11) म रख कर, विश्वास्यता सीमाएँ ज्ञात कर सकते है।

उदाहरण 9 4 उदाहरण (9 1) म दिए गये प्रतिदर्श प्रेक्षणों के द्वारा समग्र माध्य μ की 95 प्रतिशत विश्वास्यता सीमाएँ निम्न प्रकार ज्ञात कर सकते हैं।

सूत्र (9 9) द्वारा μ के लिए वि सी.[3]

$=6\ 738\pm 293\times 2\ 365$

$=6\ 738\pm 683$

सूत्र (9 6) मे $\overline{X}$, $s/\sqrt{n}$ व t_{α} के मान उदाहरण 9 1 द्वारा प्रतिस्थापित कर दिये गये है। अत निम्न सीमा

$L=6\ 055$ और उपरि सीमा $U=7\ 42$

3. वि सी. = विश्वास्यता सीमाएँ

उदाहरण 9 5 : उदाहरण (9 2) मे दिये न्यास के आधार पर $(\mu_1-\mu_2)$ की 99% विश्वास्यता सीमाएँ सूत्र (9 10) द्वारा ज्ञात कर सकते हैं।

स्व को 21 के लिए वि सी (जब कि $\sigma_1^2=\sigma_2^2$)

$=2\ 66 \pm \cdot 4089 \times 2\ 831$

$=2\ 66 \pm 1\ 16$

यहाँ सूत्र (9 10) मे $(X_1-\overline{X}_2)$, $s_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}$ के मान उदाहरण (9 2) द्वारा प्रतिस्थापित किये गये हैं और $t_{01\ 21}$

$=2\ 831$ है (t का मान सारणी द्वारा देखा गया है)

अत निम्न सीमा L=1 50 और उपरि सीमा U=3 82

युगल t-परीक्षा

इस परीक्षा का प्रयाग तब करते हैं जब कि युगल प्रेक्षण एक ही या एक रूप जीव या निर्जीव पर लिए गये हैं। समग्र मे इन युगल प्रेक्षणों के अन्तर के माध्य के प्रति निराकरणीय परिकल्पना H_0 $\overline{D}=0$ की H_1 $\overline{D}\neq 0$ या C (जब कि C एक वास्तविक ज्ञात मान है) के विरुद्ध परीक्षा की जाती है। माना कि प्रतिदर्श मे n युगल प्रेक्षण एव इनमे तदनुसार अन्तर निम्नांकित है —

युगल प्रेक्षण (X_1)	(X_2)	अन्तर 'd' (X_1-X_2)
X_{11}	X_{21}	$X_{11}-X_{21}=d_1$
X_{12}	X_{22}	$X_{12}-X_{22}=d_2$
X_{13}	X_{23}	$X_{13}-X_{23}=d_3$
⋮		⋮
X_{1n}	X_{2n}	$X_{1n}-X_{2n}=d_n$

युगल प्रेक्षणों मे अन्तर 'd' ज्ञात करते समय यह ध्यान रखना चाहिये कि अन्तर (X_1-X_2) या (X_2-X_1) कोई भी ले सकते हैं किन्तु जो क्रम एक अन्तर के लिए है वही सब अन्तरों के लिए रहता है। जो अन्तर ऋणात्मक हो उन्हें ऋणात्मक ही रखा जाता है और परिकलन करते समय इनका विचार करना होता है। अन्तरों को ज्ञात करके, H_0 की परीक्षा निम्नांकित प्रतिदर्शज द्वारा करते हैं।

$$t=\frac{\overline{d}-\overline{D}}{s_d/\sqrt{n}} \qquad \dots(9.12)$$

यहाँ t की स्वतन्त्रता कोटि (n − 1) है।

सूत्र (9.12) में,

$$\overline{d} = \sum_i d_i/n$$

और $$S_d^2 = \frac{1}{n-1} \sum_i (d_i - \overline{d})^2$$

$$= \frac{1}{n-1} \left\{ \sum_i d_i^2 - \frac{\left(\sum_i d_i\right)^2}{n} \right\}$$

S_d^2 का वर्गमूल लेकर d का मानक विचलन S_d ज्ञात हो जाता है।

$\overline{D}$ का मान H_0 के अनुसार रखा जाता है। अधिकतर H_0 $\overline{D}=0$ की ही परीक्षा करते हैं।

(9.12) द्वारा परिकलित t, की α सा० स्त० व (n − 1) स्व० को० के लिए सारणीबद्ध t के मान से तुलना करके H_0 के विषय में पहले की भांति निर्णय कर लिया जाता है।

परिकलित $t < t_\alpha$ होने पर H_0 को स्वीकार कर लिया जाता है इसका अभिप्राय है कि समग्र में अन्तरों का माध्य शून्य के समान है। $t > t_\alpha$ होने की स्थिति में H_0 को अस्वीकार कर दिया जाता है जिसका अभिप्राय है कि वास्तव में इन युगल प्रेक्षणों में अन्तर है न कि युगल प्रेक्षणों में अन्तर को संयोग के कारण अन्तर समझकर छोड़ा जा सकता है।

$\overline{D}$ का विश्वास्यता अन्तराल

$\overline{D}$ का विश्वास्यता अन्तराल (9.9) के अनुरूप सूत्र

$$\overline{d} \pm \frac{S_d}{\sqrt{n}} t_\alpha \qquad ....(9.13)$$

द्वारा ज्ञात किया जाता है। इस सूत्र में सभी संकेतन (9.12) में दिये प्रतिदर्शज के अनुसार हैं। t_α α सा० स्त० (जो कि इच्छित हो) और (n − 1) स्व० को० पर t का सारणीबद्ध मान है। सभी संकेतों के मान प्रतिदर्श के अनुसार सूत्र में रखकर, एक बार (+) चिह्न और एक बार (−) चिह्न को लेकर विश्वास्यता सीमाएँ ज्ञात हो जाती हैं। उपरि सीमा में से निम्न सीमा घटाकर विश्वास्यता अन्तराल ज्ञात हो जाता है।

उदाहरण 9.6. 12 ग्राम जैव सामग्री को अलग-अलग प्लेटिनम व सिलिका की प्यालियों में भस्मित किया गया और प्रत्येक प्रकार की 9 प्यालियों में कुल भस्म की निम्नांकित मात्रा पायी गयी :—

प्याली संख्या	प्लैटिनम की प्याली में भस्म की मात्रा (X)	सिलिका की प्याली म भस्म की मात्रा (Y)
1	16 99	16 71
2	17 84	17 94
3	16 44	16 76
4	12 45	13 37
5	13 84	14 13
6	12 03	11 49
7.	18 45	17 81
8	14 79	13 62
9	11 27	12 26

परिकल्पना, कि दो प्रकार की प्यालिया द्वारा प्राप्त भस्म की माध्य मात्राम्रा म मन्तर शून्य के समान है म्रर्थात्

H_0 $\overline{D} = 0$ की H_1 $\overline{D} \neq 0$ के विरुद्ध परीक्षा प्रतिदर्शज (9 12) द्वारा कर सकते हैं।

मन्तर $(X-Y)=d$ 28, − 10, − 32, − 92, − 29, 54, 64, 1 17, − 99

$$\sum_{1} d_i = 0\ 01, \quad \sum_{1} d_i^2 = 4\ 1715$$

$$\therefore \quad \overline{d} = 0\ 001$$

म्रोर $$s_d^2 = \frac{1}{8}\left\{4\ 1715 - \frac{(0\ 01)^2}{9}\right\}$$

$$= 0\ 5214$$

$$\therefore \quad s_d = 0\ 722$$

$$s_{\overline{d}} = \frac{s_d}{\sqrt{n}} = \frac{\cdot 722}{3} = 2406$$

$$\therefore \quad t = \frac{0\ 001}{0\ 2406}$$

$$= 0\ 0044$$

सारणी (परि० घ–3) द्वारा $t_{05,8} = 2\ 306$

यहाँ $t < t_{.05;\ 8}$ है।

अत. परिकल्पना H_0 को स्वीकार कर लिया जाता है जिसका अर्थ है कि दोनों प्रकार की ख्यातियों द्वारा भस्म की समान मात्रा प्राप्त होती है।

किन्हीं दो वास्तविक बारम्बारता, प्रतिशत या अनुपात में अन्तर की सार्थकता परीक्षा

व्यवहार में प्रेक्षणों को बारम्बारता बंटन के रूप में दिया जाता है। यह बंटन या तो पूर्ण संख्या, प्रतिशत या अनुपात के रूप में दिये जाते हैं। किन्हीं दो वर्गों की बारम्बारता या प्रतिशत में अन्तर की सार्थकता परीक्षा की प्राय आवश्यकता होती है। इस परिकल्पना की परीक्षा प्रतिदर्शज t द्वारा की जाती है।

माना कि वर्गीकृत बारम्बारता बंटन निम्न प्रकार है —

वर्ग (i)	समग्र में यूनिटों की संख्या (ii)	प्रतिदर्श में यूनिटों की संख्या (iii)	प्रतिदर्श में प्रतिशत (iv)
G_1	N_1	f_1	p_1
G_2	N_2	f_2	p_2
G_3	N_3	f_3	p_3
⋮	⋮	⋮	⋮
G_k	N_k	f_k	p_k
	$N = \sum_{i=1}^{k} N_i$	$\sum_{i=1}^{k} f_i = n$	

N_i और N_j के अन्तर $(i, j = 1, 2, 3, \ldots, k,\ i \neq j)$

की सार्थकता परीक्षा करने के लिए प्रतिदर्शज

$$t = \frac{(f_i - f_j)}{s_{Df}} \sim t_{n-1} \qquad \ldots (9.14)$$

को निरूप माना जाता है

जहाँ

$$s_{Df} = \sqrt{\frac{2}{n-1}\ (nf - f^2)} \qquad \ldots (9.15)$$

यहाँ

$$f = \frac{f_i + f_j}{2}$$

(9.14) में सभी संकेतनों का मान रखकर, परिकलित t ज्ञात हो जाता है इस t की (n − 1) स्व० को० व α सा० स्त० पर सारणीबद्ध t के मान से तुलना करके समग्र के लिए इन बारम्बारताओं में अन्तर के प्रति परिकल्पना की सार्थकता के विषय में निर्णय कर लिया जाता है।

यदि वर्गों के तदनुसार प्रतिशत दिये गये हों, (जो ऊपर सारणी के चौथे स्तम्भ में दिये गये हैं) तो समग्र में दो प्रतिशता p_i व p_j $(i \neq j)$ की समानता के प्रति परिकल्पना की परीक्षा, प्रतिदर्शज

$$t_{n-1} = \frac{p_i - p_j}{s_{Dp}} \qquad ....(9\ 16)$$

जबकि

$$s_{Dp} = \sqrt{\frac{2\, p_0\, q_0}{n-1}} \qquad ...(9\ 17)$$

यहाँ
$$p_0 = \frac{p_i + p_j}{2}\ ,\ q_0 = (100 - p_0)$$

द्वारा की जाती है।

पहले की भाँति प्रतिशतों में अन्तर की सार्थकता के प्रति निर्णय कर सकते हैं।

यदि दो भिन्न समग्रों में अनुपातों के समान होने की परिकल्पना की परीक्षा करनी हो तो इस स्थिति में (9 17) में s_{Dp} का मान निम्न सूत्र से ज्ञात करते हैं —

$$s_{Dp} = \sqrt{p_0\, q_0 \left(\frac{1}{n_1 - 1} + \frac{1}{n_2 - 1}\right)} \qquad ....(9\ 18)$$

उदाहरण 9.7 एक जनांकिकीय (Demographic) चर सम्बन्धी अध्ययन द्वारा प्राप्त आँकड़े ग्रामीण तथा नगरीय जनसंख्या के लिये आयु के अनुसार निम्न सारणी में दिये गये हैं।

वर्तमान आयु (वर्षों में)	बारं०	नगरीय संख्या	नगरीय प्रतिशत	ग्रामीण संख्या	ग्रामीण प्रतिशत
15—19	f_1	2	0 3	52	9 7
20—24	f_2	56	9 4	136	25 4
25—29	f_3	137	22 9	121	22 5
30—34	f_4	152	25 3	101	18 8
35—39	f_5	149	24 8	57	10 7
40—44	f_6	83	13 8	41	7 6
45 या अधिक	f_7	21	3 5	28	5 3
योग		600		536	

(i) परिकल्पना H_0 कि नगरीय जनसख्या के लिए (25—29) और (30—34) आयु वर्गों की बारम्बारताओं मे कोई सार्थक अन्तर नही है, की परीक्षा (9 14) मे दिये गये प्रतिदर्शज t द्वारा करते हैं।

यहाँ $f_3=137$, $f_4=152$

$$\text{जबकि } f = \frac{137+152}{2}$$

$$= 144\ 5$$

$$s_{Dp} = \sqrt{\frac{2}{600-1}\ (600 \times 144\ 5 - 144\ 5^2)}$$

$$= \sqrt{219\ 76}$$

$$= 14\ 82$$

सूत्र (9.14) के अनुसार,

$$t = \frac{137-152}{14\ 8} = 1\ 01$$

$t_{05;599}$ $=1\ 96 > t$ अत: H_0 को स्वीकार कर लिया जाता है।

(ii) H_0 : नगर और ग्राम दोनों मे आयु वर्ग (35—39) का प्रतिशत बराबर है अर्थात्

$H_0 : p_1 = p_2$ की $H_1 : p_1 \neq p_2$ के विरुद्ध परीक्षा निम्न प्रकार कर सकते हैं :—

$$p_0 = \frac{24\ 8+10\ 7}{2} = \frac{35\ 5}{2} = 17{\cdot}75$$

$$\therefore \quad q_0 = 100 - 17\ 75 = 82\ 25$$

$$s_{Dp} = \sqrt{17\ 75 \times 82\ 25\left(\frac{1}{599}+\frac{1}{535}\right)}$$

$$= \sqrt{1459\ 94\ (\ 0036)} = \sqrt{5\ 2558} = 2\ 29$$

$$\therefore \quad t = \frac{24\ 8 - 10\ 77}{2\ 29}$$

$$= 6\ 16$$

$\alpha = 05$ और 1135 स्व० को० पर t का सारणीबद्ध मान 1 96 है जो कि t से कम है। अत परिकल्पना H_0 को अस्वीकार कर दिया जाता है जिसका अर्थ है कि नगरीय तथा ग्रामीण व्यक्तियों के प्रतिशत, आयु वर्ग (35—39) मे समान नही हैं।

K समग्रो के माध्यों की समानता की परीक्षा जबकि K > 2

माना कि k समग्रो के माध्य क्रमश $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots, \mu_k$ हैं। तो परिकल्पना

$$H_0 : \mu_1=\mu_2=\mu_3=....=\mu_k$$

की, H_1 : (कि कम से कम कोई दो माध्य समान नहीं हैं) के विरुद्ध परीक्षा करनी है।

माना कि H_0 की परीक्षा के लिए k समग्रों में k स्वतन्त्र प्रतिदर्शों का चयन किया गया है जिनके परिमाण क्रमशः

$$n_1, n_2, n_3 \;....\; n_k$$

हैं। i वें प्रतिदर्श के j वें प्रेक्षण को X_{ij} द्वारा निरूपित किया गया है जबकि

$$i=1, 2, 3, ... k \quad \text{और} \quad j=1, 2, 3, ... n_i$$

है। यह कल्पना करते हैं कि

$$\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma_3^2= ... =\sigma_k^2$$

या यह कहें कि समग्र प्रसरण समान हैं तो परिकल्पना H_0 की परीक्षा स्नैडेकर (Snedecor) F-परीक्षा द्वारा की जाती है और प्रतिदर्शज,

$$F=\frac{\sum\limits_{i=1}^{k} n_i(\overline{X}_i-\overline{X})^2/(k-1)}{\sum\limits_{i=1}^{k}\sum\limits_{j=1}^{n_i}(X_{ij}-\overline{X}_i)^2/\sum\limits_{1}(n_i-1)} \sim F_{k-1;\, n-k} \quad ...(9\ 19)$$

$$=\frac{\sum\limits_{1} n_i(\overline{X}_i-\overline{X})^2}{\sum\limits_{1}(n_i-1)\,s_i^2}\cdot\frac{n-k}{k-1} \quad ....(9\ 19\ 1)$$

जहाँ $\Sigma\, n_i=n$

$$=\frac{\sum\limits_{i=1}^{k}\frac{X_i^2}{n_i}-\frac{G^2}{n}}{\sum\limits_{i=1}^{k}\sum\limits_{j=1}^{n_i}X_{ij}^2-\sum\limits_{i=1}^{k}\frac{X_i^2}{n_i}}\cdot\frac{n-k}{k-1} \quad ....(9\ 19.2)$$

(जहाँ G कुल प्रेक्षणों का योग है और n कुल प्रेक्षणों की संख्या है। X_i i वें प्रतिदर्श में प्रेक्षणों का योग है।)

यदि परिकलित F का मान α सा० स्त० और $\{(k-1),\ \Sigma\,(n_i-1)\}$ स्वतन्त्रता कोटि पर सारणीबद्ध F से अधिक हो तो H_0 को अस्वीकार कर दिया जाता है। प्रायः k माध्यों की समानता की परीक्षा प्रसरण विश्लेषण-सारणी द्वारा करते हैं जिसका विवरण अध्याय (19) में दिया गया है।

उदाहरण 9.8 : मटर की कृषिजोपजाति (Pea cultivars) के माध्य शुष्क भार पर तीन तापक्रमों का प्रभाव देखा गया। इस प्रयोग द्वारा प्राप्त प्रेक्षण निम्न सारणी में दिये गये हैं। प्रेक्षणों की सहायता से परिकल्पना H_0 (तीनों तापक्रमों का, माध्य शुष्क भार पर समान प्रभाव है) की परीक्षा F–परीक्षा द्वारा निम्न प्रकार कर सकते हैं —

मटर	माध्य शुष्क भार (ग्राम) तापक्रम		
	12°C	17°C	25°C
शुष्कभार :	X_1	X_2	X_3
1	9·0	13·0	6·6
2	7·3	9·3	7·9
3	7·7	8·9	7·5
4	9·7	7·6	4·7
5	4·4	8·6	6·6
6	3·0	9·1	4·2
7	4·8	5·7	4·9
8	4·3	5·6	
9	2·9		
10	2·7		
योग	55·8	67·8	42·4

यहाँ $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ की H_1 : (कि कम से कम कोई दो तापक्रमों का माध्य प्रभाव समान नहीं है) के विरुद्ध परीक्षा की गयी है।

और $k = 3$

कुल योग $G = 166·0$, $\therefore$ $\bar{X} = 166·0/25 = 6·64$

$$\sum_j X_{1j}^2 = 373·26$$

$$\sum_j X_{2j}^2 = 613·08$$

$$\sum_j X_{3j}^2 = 269.52$$

$$\sum_{i=1}^{3} \sum_j X_{ij}^2 = 1255·86, \quad \frac{G^2}{n} = \frac{(166)^2}{25} = 1102·24$$

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{X_i^2}{n_i} = \frac{(55 8)^2}{10} + \frac{(67 8)^2}{8} + \frac{(42 4)^2}{7}$$

$$= 1142{\cdot}792$$

सूत्र (9 19.2) द्वारा

$$F = \frac{1142 79 - 1102 24}{1255{\cdot}86 - 1142 79} \times \frac{22}{2} = \frac{40 55}{113 07} \times 11$$

$$= 3 94$$

$\alpha = 05$ और (2, 22) स्वतन्त्रता कोटि पर सारणी (परि ध –5 2) से $F = 3 44$ जो कि परिकलित F से कम है। अत H_0 को अस्वीकार कर दिया जाता है जिसका अभिप्राय है कि तीनो तापक्रमों का, माध्य शुष्क भार पर, समान प्रभाव नही है।

प्रसामान्य विचर परीक्षा

यदि एक समग्र से, जिसका माध्य μ व मानक विचलन σ है, परिमाण n के यथा सम्भव प्रतिदर्शों का चयन किया जाय तो इन प्रतिदर्श माध्यों $\overline{X}$ के बटन का माध्य μ व मानक विचलन $\sigma/\sqrt{n}$ होता है जैसा कि अध्याय 8 मे बृहत् सख्या के दुर्बल नियम मे दिया जा चुका है।

माना कि एक चर $X \sim N(\mu, \sigma)$ है और σ ज्ञात है। तो इस स्थिति मे एक परिमाण n के प्रतिदर्श के आधार पर परिकल्पना,

$H_0 : \mu = \mu_0$ की $H_1 \quad \mu \neq \mu_0$ के विरुद्ध परीक्षा प्रसामान्य विचर द्वारा करते है जिसके लिए निम्न सूत्र है —

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \qquad \ldots(9 20)$$

यदि पूर्व निर्धारित सा० स्त० $\alpha = 05$ पर परीक्षा करनी है तो, परिकलित Z की 1 96 से तुलना करते हैं। यदि $Z > 1 96$ हो तो H_0 को अस्वीकार कर दिया जाता है अर्थात् H_1 स्वीकृत होता है। इसका अर्थ है कि $\overline{X}$ व μ के मान म सार्थक अन्तर है। इसी प्रकार $\alpha = 01$ होने पर Z की तुलना 2 58 से करते हैं। अन्य किसी भी सार्थकता स्तर के लिए प्रसामान्य बटन सारणी से Z का मान ज्ञात करके और परिकलित Z से तुलना करके H_0 के विषय मे नियमानुसार निर्णय कर लिया जाता है।

किन्तु व्यवहार मे अधिकतर σ ज्ञात नही होता है। किन्तु यह विदित है कि n बृहद् होने की स्थिति मे t_{n-1} बटन प्राय मानक प्रसामान्य बटन के समान होता है और इस कारण t_{n-1} की सारणी के स्थान पर N (0, 1) की सारणी से ही काम चलाया जा सकता है। सूत्र (9 20) मे σ के स्थान पर बृहत् प्रतिदर्श के मानक विचलन s को रखना

होता है। यहाँ भी परिकलित Z के मान की सारणीबद्ध Z के मान से तुलना करके H_0 के विषय में नियमानुसार निर्णय ले लिया जाता है।

इसी प्रकार वृहत् प्रतिदर्शों की स्थिति में $H_0 \; \mu_1=\mu_2$ की परीक्षा t के स्थान पर *प्रसामान्य विचर परीक्षा द्वारा कर सकते है।*

द्विपद चर के लिए परिकल्पना-परीक्षा

एक सिक्के को उछाल कर बरनूली परीक्षण किया। किसी भी एक परीक्षण में सिक्का या तो शीर्ष की ओर से गिरेगा या सन् की ओर से। माना कि एक परीक्षण में सिक्के के शीर्ष की ओर से गिरने की प्रायिकता P है और सन् की ओर से गिरने की प्रायिकता Q है जबकि $P+Q=1$ है।

सिक्के को n बार उछाला गया है और माना कि इन परीक्षणों में सिक्का r बार शीर्ष की ओर से गिरता है। इस परीक्षण के आधार पर एक परीक्षण में शीर्ष के ऊपर की ओर होने की प्रायिकता $\frac{r}{n}$ है। यदि इस परिकल्पना की, कि किसी भी परीक्षण में शीर्ष ऊपर होने की प्रायिकता $\frac{1}{2}$ है अर्थात् $P=\frac{1}{2}$ है, परीक्षा करनी है, तो n वृहत् होने की स्थिति में परिकल्पना की परीक्षा निम्न प्रकार कर सकते हैं। व्यापक रूप में परिकल्पना,

$H_0 : p=p_0$ की $H_1 : p \neq p_0$ के विरुद्ध परीक्षा के लिए मानक प्रसामान्य विचर निम्नांकित है :—

जहाँ p_0 एक अचर मान है।

मानाकि घटनाएँ n हैं और इन n घटनाओं में से r वह हैं जो प्रायिकता p से संघटित हैं। परिकल्पना की परीक्षा के हेतु मानक प्रसामान्य विचर Z का मान निम्न सूत्रों से ज्ञात कर लिया जाता है।

$$\text{स्थिति 1 :} \quad Z=\frac{(r+0.5)-np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}} \text{ जब } r<np_0 \qquad \dots(9.21)$$

$$\text{स्थिति 2 .} \quad Z=\frac{(r-0.5)-np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}} \text{ जब } r>np_0 \qquad \dots(9.22)$$

यदि Z का परिकलित मान प्रसामान्य बटन सारणी द्वारा देखे गये मान $Z_{\alpha/2}$ से कम या समान हो, या $Z_{1-\alpha/2}$ से अधिक या समान हो तो H_0 को अस्वीकार कर दिया जाता है। (अर्थात् यदि $Z<Z_{\alpha/2}$ या $Z>Z_{1-\alpha/2}$ तो H_0 को अस्वीकार कर *दिया जाता है)।*

उदाहरण 9.9 : *एक रोग से पीड़ित 186 रोगियों में से 80 स्त्रियाँ थी। इस परि-* कल्पना, की कि इस रोग से पीड़ित स्त्री व पुरुषों की समान प्रायिकता है परीक्षा इस प्रकार

करते हैं :—

यहाँ $H_0 : p=\frac{1}{2}$ की $H_1 \; p\neq\frac{1}{2}$ के विरुद्ध परीक्षा करनी है।

$$r=80 \text{ और } np_0=186\times\frac{1}{2}=93$$

यहाँ $r<np_0$ है इसलिए सूत्र (9 21) का प्रयोग करना होगा।

$$Z=\frac{(80+05)-93}{\sqrt{186\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}}$$

$$=\frac{-12\,5}{\sqrt{46\,5}}=\frac{-12\,5}{6\,82}-1\,83$$

सारणी (परि० घ–2) द्वारा सा० स्त० $\alpha=05$ के लिए $Z=1\,96$ है जो कि Z के परिकलित मान से अधिक है, अत परिकल्पना H_0 कि $p=\frac{1}{2}$ स्वीकृत है।

इससे निष्कर्ष निकलता है कि 5 प्रतिशत सा० स्त० पर रोगियों में पुरुषों व स्त्रियों की संख्या समान है।

इसी प्रकार पुरुषों की संख्या 106 लेकर सूत्र (9 22) का प्रयोग करके निष्कर्ष निकाला जा सकता है।

काई-वर्ग द्वारा सार्थकता परीक्षा

χ^2 एक सामंजस्य-सुष्ठुता (goodness of fit) की परीक्षा है। χ^2 द्वारा कारकों (factors) की स्वतन्त्रता या विषमांगता (heterogeneity) की परीक्षा की जाती है।

यदि परिकल्पित बंटन के अनुसार n प्रेक्षणों की विभिन्न वर्गों में प्रत्याशित बारम्बारताएँ क्रमश $E_1, E_2, E_3, \ldots, E_k$ और वास्तविक बारम्बारताएँ $O_1, O_2, O_3, \ldots, O_k$ हों तो,

$$\chi^2=\frac{(O_1-E_1)^2}{E_1}+\frac{(O_2-E_2)^2}{E_2}+\frac{(O_3-E_3)^2}{E_3}+\ldots+\frac{(O_k-E_k)^2}{E_k}$$

$$=\sum_{i=1}^{k}(O_i-E_i)^2/E_i \qquad \ldots(9\,23)$$

$$=\sum_{i=1}^{k}O_i^2/E_i-n \qquad \ldots(9\,23\,1)$$

यदि n इतना वृहत् हो कि कोई भी प्रत्याशित बारम्बारता 5 से कम न हो तो सिद्ध किया जा सकता है कि χ^2 का बंटन लगभग χ^2_{k-1} के समान होगा। अनुलग्न (suffix) $(k-1)$, χ^2 की स्वतन्त्रता कोटि को सूचित करता है।

यदि χ^2 का परिकलित मान χ^2_{k-1} के α बिन्दु से अधिक होता है तो परिकल्पना को ■ सार्थकता स्तर पर अस्वीकार कर दिया जाता है।

टिप्पणी : प्रत्येक स्थिति में प्रेक्षित बारम्बारताओं का योग और प्रत्याशित (या सैद्धान्तिक) बारम्बारताओं का योग समान होता है अर्थात्

$$\sum_{i} O_i = \sum_{i} E_i$$

आसंग सारणी

यह एक द्विक सारणी है जिसमें किन्हीं दो अभिलक्षणों या कारकों A व B के विभिन्न वर्गों में घटित बारम्बारता लिखने की विधि है। माना कारक A में p वर्ग और B में q वर्ग हैं। यदि कारक A को पंक्ति की ओर और B को स्तम्भ की ओर लिया गया है तो p पंक्ति और q स्तम्भों वाली सारणी को (p×q) क्रम की आसंग सारणी कहते हैं। प्रत्येक कोष्ठिका में इन अभिलक्षणों के अनुसार प्रेक्षित बारम्बारता O_{ij} के रूप में लिख देते हैं। इससे स्पष्ट ज्ञात हो जाता है कि iवीं पंक्ति और jवें स्तम्भ के कटान बिन्दु पर कोष्ठिका की बारम्बारता O_{ij} है। यह उन यूनिटों की संख्या है जिनमें कारक A_i व B_j के लक्षण विद्यमान हैं। किसी भी पंक्ति या स्तम्भ के योग को उपान्त योग कहते हैं।

(p×q) क्रम की आसंग सारणी

A/B	B_1	B_2	$B_3 \ldots$	B_j	$\ldots B_q$	योग
A_1	O_{11}	O_{12}	O_{13}	O_{1j}	O_{1q}	O_1
A_2	O_{21}	O_{22}	O_{23}	O_{2j}	O_{2q}	O_2
A_3	O_{31}	O_{32}	O_{33}	O_{3j}	O_{3q}	O_3
⋮						⋮
A_i	O_{i1}	O_{i2}	O_{i3}	O_{ij}	O_{iq}	O_i
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
A_p	O_{p1}	O_{p2}	O_{p3}	O_{pj}	O_{pq}	O_p
योग	O1	O2	O3	O_j	O_q	O = n

उपर्युक्त सारणी में O_i और O_j क्रमशः iवीं पंक्ति व jवें स्तम्भ के उपान्त योग हैं जहाँ $i=1, 2, 3, \ldots, p$ और $j=1, 2, 3, \ldots, q$ के हैं। बारम्बारताओं का कुल योग $O = n$ है जो कि प्रतिदर्श परिमाण के समान है। साथ ही,

$$\sum_{i=1}^{p} O_i = \sum_{j=1}^{q} = O_j = n$$

यदि परिकल्पना यह है कि कारक A और B स्वतन्त्र हैं तो (i, j)वीं कोष्ठिका (cell) में बारम्बारता O_{ij} का प्रत्याशित मान E_{ij} निम्न सूत्र से प्राप्त होगा :—

$$E_{ij}=\frac{O_{i.}\times O_{.j}}{n} \qquad \ldots (9\ 24)$$

$$=\frac{(i\text{वी पंक्ति का योग})\times(j\text{वें स्तम्भ का योग})}{\text{कुल प्रेक्षण-संख्या}}$$

सूत्र (9 24) द्वारा प्रत्येक कोष्ठिका की प्रेक्षित बारम्बारता के संगत प्रत्याशित बारम्बारता ज्ञात करली जाती है।

O_{ij} व E_{ij} के मानो को निम्न प्रतिदर्शज $-\chi^2$ मे रखकर परिकल्पना H_0 (कि कारक A और B स्वतन्त्र हैं) की परीक्षा करने की विधि इस प्रकार है —

$$\chi^2=\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}\frac{(O_{ij}-E_{ij})^2}{E_{ij}} \qquad \ldots.(9\ 25)$$

$(p\times q)$ क्रम की आसंग सारणी की स्थिति म χ^2 की स्वतन्त्रता कोटि $(p-1)(q-1)$ होती है।

यदि α सार्थकता स्तर व $(p-1)\ (q-1)$ स्व० को० के लिए χ^2 बटन सारणी (परि० घ–4) द्वारा प्राप्त मान χ^2_{α} परिकलित χ^2 के मान से कम हो, तो H_0 को अस्वीकार कर दिया जाता है और इसके विपरीत स्थिति मे H_0 को स्वीकार कर लिया जाता है।

उदाहरण 9.10 *व्यक्तियों की सख्या उनके स्थान एव पेस्टीसाइड उद्योग के बारे में अभिवृत्ति के अनुसार निम्न सारणी मे दी गयी है —*

पेस्टीसाइड उद्योग के प्रति अभिवृति	रहने का स्थान		
	नगर	गाँव	योग
अनुकूल	74	55	129
	(86)	(43)	
प्रतिकूल	43	15	58
	(38)	(20)	
उदासीन	82	31	113
	(75)	(38)	
योग	199	101	300

परिकल्पना H_0 (कि रहने के स्थान और पेस्टीसाईड उद्योग के प्रति अभिवृत्ति स्वतन्त्र है) की परीक्षा, χ^2-परीक्षा द्वारा निम्न प्रकार कर सकते हैं :—

यह एक (3×2) क्रम की आसंग सारणी है। प्रत्येक कोष्ठ बारम्बारता की तदनुसार सैद्धान्तिक बारम्बारता सूत्र (9.24) द्वारा ज्ञात कर सकते हैं।

$$E_{11} = \frac{129 \times 199}{300} = 85.57 = 86$$

इसी प्रकार अन्य सैद्धान्तिक बारम्बारताएँ परिकलित की गयी हैं और पूर्णांकन करके इन्हें उपर्युक्त सारणी में कोष्ठकों में दिया गया है।

सूत्र (9.25) द्वारा,

$$\chi^2 = \frac{(74-86)^2}{86} + \frac{(55-43)^2}{43} + \frac{(43-38)^2}{38} + \frac{(15-20)^2}{20}$$

$$+ \frac{(82-75)^2}{75} + \frac{(31-38)^2}{38} = 8.855$$

5 प्रतिशत सार्थकता स्तर व दस χ^2 की 2 स्व० को० के लिए सारणी (परि० घ-4) द्वारा प्राप्त मान $\chi^2_{(.05)} = 5.991$ है।

परिकलित χ^2 का मान $\chi^2_{(.05)}$ से अधिक है। अतः परिकल्पना H_0 अस्वीकृत है। इसका अभिप्राय है कि पब्लोसाइड उद्योग के विषय में अभिवृत्ति पर रहने के स्थान का प्रभाव पड़ता है।

दो समान्तर प्रतिदर्शों की सजातीयता की परीक्षा

माना कि दो समग्रों से दो प्रतिदर्शों का चयन किया गया है जिनमें k वर्ग हैं। ये वर्ग या तो पृथक्-पृथक् होते हैं या मान पर की स्थिति में अन्तराल होते हैं। माना कि इन प्रतिदर्शों के k वर्गों में प्रेक्षित,

बारम्बारता $O_{11}, O_{12}, O_{13} \ldots\ldots O_{1k}$

और $O_{21}, O_{22}, O_{23} \ldots\ldots O_{2k}$ है।

यदि $r_1 : r_2 : r_3 \ldots\ldots : r_k$ और $r_1' : r_2' : r_3' : \ldots . r'_k$

समग्रों के अनुसार क्रमशः वर्ग बारम्बारताओं के सैद्धान्तिक अनुपात हैं तो परिकल्पना H_0 (कि दोनों प्रतिदर्शों का चयन अभिनत के अनुसार स्वतन्त्र समग्रों से किया गया है) की परीक्षा करनी है जबकि वास्तविक बटन के विषय में कुछ ज्ञात नहीं है अर्थात्

$H_0 : r_i = r'_i$ को $H_1 \neq r'_i$ के विरुद्ध परीक्षा करनी है,

जबकि $i = 1, 2, 3 \ldots \ldots k$

परिकल्पना H_0 की परीक्षा, χ^2-परीक्षा द्वारा करते हैं।

प्रतिदर्शज χ^2 का मान निम्न प्रकार ज्ञात कर सकते हैं —

प्रतिदर्श	वर्ग 1	2	3............	K	योग
1	O_{11}	O_{12}	O_{13}	O_{1k}	n_1
2	O_{21}	O_{22}	O_{23}	O_{2k}	n_2
योग	$(O_{11}+O_{21})$	$(O_{12}+O_{22})$	$(O_{13}+O_{23})$	$(O_{1k}+O_{2k})$	$n_1+n_2=n$

यदि r_i और r_i' ज्ञात हो तो परीक्षा के हेतु

$$\chi^2=\sum_{i=1}^{k}\frac{(O_{1i}-n_1 r_i)^2}{n_1 r_i}+\sum_{i=1}^{k}\frac{(O_{2i}-n_2 r_i')^2}{n_2 r_i'} \quad ....(9.26)$$

यहाँ χ^2 की स्व० को० $2(k-1)$ है।

यदि $r_i=r_i'$ हो तो एकत्रित अनुपात,

$$r_i=r_i'=\frac{(O_{1i}+O_{2i})}{n_1+n_2} \quad ....(9.27)$$

(9 26) में r_i व r_i' का (9 27) द्वारा मान रखने पर

$$\chi^2_{(k-1)}=\frac{1}{n_1 n_2}\sum_{i=1}^{k}\frac{(O_{1i}n_2-O_{2i}n_1)^2}{(O_{1i}+O_{2i})} \quad ....(9.28)$$

व्यवहार में r_i (या r_i') का आगणन निम्न प्रकार से कर लिया जाता है :—

$$P_1=\frac{O_{11}}{O_{11}+O_{21}},\ P_2=\frac{O_{12}}{O_{12}+O_{22}},\ P_3=\frac{O_{13}}{O_{13}+O_{23}},$$

$$......,P_k=\frac{O_{1k}}{O_{1k}+O_{2k}}$$

और एकत्रित आगणित अनुपात,

$$P=\frac{n_1}{n_1+n_2}$$

इन अनुपातों को प्रयोग करके χ^2 का परिकलन निम्न सूत्र द्वारा कर सकते हैं :—

$$\chi^2_{k-1}=\frac{1}{P}\sum_{i=1}^{k}(O_{1i}+O_{2i})P_i^2-n_1 \quad ....(9.29)$$

$$\chi^2_{k-1}=\frac{1}{P}\sum_{i=1}^{k}O_{1i}P_i-n_1 \quad ....(9.30)$$

परिकलित χ^2 को, $(k-1)$ स्व० को० व α सा० स्त० पर सारणीबद्ध χ^2 से तुलना करके परिकल्पना H_0 के विषय में नियमानुसार निर्णय कर लिया जाता है।

उदाहरण 9.11 : *आयु के अनुसार उन स्त्रियों व पुरुषों का बटन नीचे दिया है जो कृमि (worms) के लिए धनात्मक थे।*

	रोगियों के दो प्रतिदर्शों में आयु-वर्ग (वर्षों में)						योग
	(<4)	(5–9)	(10–14)	(15–19)	(20–24)	(>25)	
पुरुष	6	19	26	13	11	21	96
स्त्री	9	26	18	9	12	16	90
योग	15	45	44	22	23	37	186

परिकल्पना H_0 (कि ये दोनों प्रतिदर्श कृमि की दृष्टि से एक ही समग्र के लिये गये हैं) की परीक्षा करना है, तो सूत्र (9.30) को प्रयोग करना उचित है।

यहाँ

$$P_1=\frac{6}{15}=\cdot40,\ P_2=\frac{19}{45}=\cdot42,\ P_3=\frac{26}{44}=\cdot59,$$

$$P_4=\frac{13}{22}=\cdot59,\ P_5=\frac{11}{23}=\cdot48,\ P_6=\frac{21}{37}=\cdot57$$

और $$P=\frac{96}{186}=\cdot516$$

सूत्र (9.30) के अनुसार,

$$\chi^2=\frac{1}{\cdot516}(6\times\cdot40+19\times\cdot42+26\times\cdot59+13\times\cdot59+11\times\cdot48+21\times\cdot57)-96$$

$$=\frac{1}{\cdot516}(50\cdot64)-96$$

$$=98\cdot14-96$$

$$=2\cdot14.$$

माना कि 5 प्रतिशत सार्थकता स्तर पर परीक्षा करनी है, तो सारणी (परि०-य-4) द्वारा $\alpha=\cdot05$ और 4 स्व० को० के लिए $\chi^2_{(\cdot05)}=11\cdot1$ है जो कि परिकलित χ^2 से कम है। अतः H_0 को स्वीकार कर लिया जाता है। इससे यह निष्कर्ष निकलता है कि

कृमि की दृष्टि से स्त्रियों व पुरुषों के प्रतिदर्श एक ही समुदाय से लिए गये माने जा सकते हैं।

(2×2) क्रम की आसंग सारणी

माना कि अभिलक्षण A और B के केवल दो ही वर्ग हैं और इनकी स्वतन्त्रता की परीक्षा करना है। इन वर्गों और तदनुसार कोष्ठिका बारम्बारताओं को निम्न (2×2) आसंग सारणी में प्रदर्शित किया गया है।

A/B	B_1	B_2	योग
A_1	a	b	(a+b)
A_2	c	d	(c+d)
योग	(a+c)	(b+d)	a+b+c+d=n

A और B की स्वतन्त्रता की χ^2–परीक्षा करने की एक विधि तो यह है कि कोष्ठिकाओं की सैद्धान्तिक बारम्बारता ज्ञात करके ऊपर दिये उदाहरण के अनुसार χ^2 के मान का परिकलन किया जा सकता है। किन्तु इस विधि का प्रयोग करके सैद्धान्तिक बारम्बारताओं a, b, c, और d के पदों में रखकर χ^2 के लिए एक सुगम सूत्र प्राप्त हो जाता है। इस सूत्र में a, b, c, और d आदि के मान प्रतिस्थापित करके प्रतिदर्शज χ^2 का मान ज्ञात हो जाता है। यहाँ χ^2 की स्व० को० सदैव एक होती है।

$$\chi^2=\frac{n\ (ad-bc)^2}{(a+b)\ (c+d)\ (a+c)\ (b+d)} \quad ....(9.31)$$

जब कि (a+b) (c+d) (a+c) (b+d) उपांत योगों का गुणनफल है।

परिकलित χ^2 को α सा० स्त० व 1 स्व० को० के लिए सारणीबद्ध χ^2–मान से तुलना करके परिकल्पना H_0 के विषय में नियमानुसार निर्णय कर लिया जाता है।

उदाहरण 9.12 : सीलोन (Ceylon) के एक गाँव में फुफ्फुस क्षत (Pulmonary lesion) सम्बन्धी सर्वेक्षण के अन्तर्गत स्त्रियों व पुरुषों में निम्न सारणी के अनुसार घटनाएँ मिलीं। सर्वेक्षण में 344 श्रमिकों का अध्ययन किया गया।

फुफ्फुस क्षत की घटनाएँ

श्रमिक	स्त्री	पुरुष	योग
क्षत सहित	9	69	78
क्षत रहित	27	239	266
योग	36	308	n=344

परिकल्पना H_0 (कि श्रमिकों में क्षत की घटना लिंग (sex) से स्वतन्त्र है) की परीक्षा इस प्रकार कर सकते हैं --

उपर्युक्त सारणी (2×2) क्रम की है अतः χ^2 का मान सूत्र (9.26) से परिकलित कर सकते हैं।

[न्यास का स्रोत British journal of industrial medicine]

$$\chi^2 = \frac{344\ (239 \times 9 - 69 \times 27)^2}{78 \times 266 \times 36 \times 308}$$

$$= \frac{344 \times 288 \times 288}{78 \times 266 \times 36 \times 308}$$

$$= 124$$

सारणी (परि० ख–4) द्वारा $\alpha = \cdot 05$ और 1 स्व० को० के लिए $\chi_1^2 = 3{\cdot}841$ है। χ^2 का सारणीबद्ध मान परिकलित χ^2 के मान से अधिक है अतः परिकल्पना H_0 स्वीकृत है।

लघु प्रतिदर्श की स्थिति में स्वतन्त्रता-परीक्षा

किसी परिकल्पना की χ^2–परीक्षा का प्रयुक्त करने में यह अनुभव किया गया है कि प्राचल के यथार्थ मान का बृहत् प्रतिदर्श बटन की स्थिति में प्रतिदर्शज पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता है। परन्तु लघु प्रतिदर्श की स्थिति में χ^2–बटन की कल्पना समाप्त हो जाती है। ऐसी दशा में सार्थकता-परीक्षा का यथार्थ होना सम्भव नहीं है क्योंकि प्रायिकता बटन में कुछ प्रसात प्राचल विद्यमान रहते हैं जिनको अपद्रव्य (nuisance) प्राचल कहते हैं।

यदि (2×2) आसंग सारणी में कोष्ठिका बारम्बारता लघु हो अर्थात् पाँच से कम हो तो χ^2–बंटन वक्र का सातत्य नहीं रहता है। अतः सूत्र (9.31) द्वारा परिकलित χ^2 का मान वास्तविक मान से अधिक होता है और प्रसामान्य विचर Z जिसका माध्य 0 और प्रसरण 1 हो χ से बड़ा हो जाता है। अतः लघु प्रतिदर्श होने पर χ^2–परीक्षा में असंगति (discrepency) उत्पन्न हो जाती है। यह असंगति निम्न विधियों द्वारा दूर की जा सकती है।

येट्स-शुद्धि

इस त्रुटि को कम करने के हेतु येट्स ने सुझाव दिया कि (2×2) आसंग सारणी की लघु बारम्बारता में 0.5 जोड़ दें और बृहत् बारम्बारता में 0.5 इस प्रकार घटा दें कि उपांत योग वही रहे अर्थात् इस पर कोई प्रभाव न पड़े तो सूत्र (9.31) द्वारा χ^2 का परिकलन करने पर यथार्थ प्रायिकता मान प्राप्त हो जाता है।

येट्स शुद्धि का प्रयोग सातत्य के हेतु किया जाता है। येट्स शुद्धि के लिए 0.5 बिना जोड़े व घटाये हुए निम्न सूत्र द्वारा, χ^2 का मान सीधे ज्ञात कर सकते हैं और इस सूत्र द्वारा χ^2 का वही मान प्राप्त होता है जो 0.5 जोड़ कर व घटाकर प्राप्त होता है। इसका

कारण यह है कि शुद्धि के पश्चात् जो मान आते हैं उनको विचाराधीन रख कर ही सूत्रीकरण कर दिया गया है।

$$\chi_1^2 = \frac{n\left(|ad - bc| - n/2\right)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(c+d)} \quad ....(9.32)$$

$$= \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} \frac{\left(|O_{ij} - E_{ij}| - \frac{n}{2}\right)^2}{E_{ij}} \quad ....(9.32.1)$$

यह ध्यान अवश्य रखना चाहिये कि उपर्युक्त शुद्धि केवल (2×2) आसग सारणी के लिए ही की जाती है। सूत्र (9.32) में भी सकेतन सूत्र (9.31) के अनुरूप है।

उदाहरण 9.13 : हैजे द्वारा महामारी के समय लिये गये एक गाँव के आँकड़ो को निम्न सारणी मे प्रदर्शित किया गया है।

	हैजे से पीड़ित	हैजे से पीड़ित नही	योग
टीका लगा था	3	47	50
टीका नही लगा था	18	132	150
योग	21	179	200

यदि परिकल्पना H_0 (कि हैजे के रोग को रोकने मे टीका प्रभावी नही है) की परीक्षा करनी है तो χ^2–परीक्षा का प्रयोग करना उचित है, किन्तु यहाँ एक कोष्ठिका की बारम्बारता केवल 3 है अत. येट्स शुद्धि का प्रयोग करना या वैकल्पिक सूत्र (9 32) का प्रयोग करना आवश्यक है। यहाँ दोनो का प्रयोग करके परीक्षा करने की विधि दिखायी गयी है। इसके द्वारा पाठको को यह भी ज्ञात हो जायेगा कि ये दोनो विधियाँ एक ही सूत्र के दो रूप हैं।

येट्स शुद्धि द्वारा, सारणी मे 0·5 को 3 मे जोडकर व 18 से घटाकर और 47 मे 0·5 जोड़कर व 132 मे से 0 5 घटाने पर सारणी का रूप निम्नांकित होता जाता है।

	हैजे से पीड़ित	हैजे से पीड़ित नही	योग
टीका लगा था	3·5	46·5	50
टीका नही लगा था	17·5	132·5	150
योग	21	179	200

सूत्र (9 26) द्वारा,

$$\chi^2 = \frac{200(132.5 \times 3{\cdot}5 - 46.5 \times 17.5)^2}{50 \times 150 \times 21 \times 179}$$

$$= \frac{200 \times 350 \times 350}{28192500}$$

$$= 869$$

वैकल्पिक सूत्र (9 32) द्वारा,

$$= \frac{200\left(|13 \times 132 - 18 \times 47| - \frac{200}{2}\right)^2}{50 \times 150 \times 21 \times 179}$$

$$= \frac{200\ (|-450| - 100)^2}{50 \times 150 \times 21 \times 179}$$

$$= \frac{200 \times 350 \times 350}{50 \times 150 \times 21 \times 179}$$

$$= \frac{24500000}{28192500}$$

$$= 869$$

उपर्युक्त परिकलना से स्पष्ट है कि दोनों विधियों द्वारा प्राप्त χ^2 के मान समान हैं। सारणी (परि० प-4) द्वारा $\alpha = 5$ और 1 स्व० को० के लिए $\chi_1^2 = 3\ 84$ है क्योंकि $\chi^2 < \chi_1^2$ है, H_0 को स्वीकार कर लिया जाता है। इससे यह निष्कर्ष निकलता है कि हैजे से पीड़ित होने का टीका लगने से कोई सम्बन्ध नहीं है।

डांडेकर-शुद्धि

इस शुद्धि को वी० एम० डांडेकर (V M Dandekar) ने सुझाया। इसके अन्तर्गत तीन विभिन्न χ^2 के मान χ_0^2, χ_{-1}^2, और χ_1^2 दी हुई (2×2) आसंग सारणी द्वारा ज्ञात करने होते हैं। χ_0^2 का मान दी हुई सारणी से, χ^2_{-1} का मान आसंग सारणी की न्यूनतम बारम्बारता में से एक न्यूनतम बारम्बारता में एक जोड़ कर और χ_1^2 का मान न्यूनतम बारम्बारता में घटाकर सूत्र (9 26) द्वारा परिकलित कर लिया जाता है। न्यूनतम बारम्बारता में परिवर्तन और अन्य कोष्ठिका बारम्बारताओं में समायोजन (adjustment) इस प्रकार करते हैं कि उपांत योगों में कोई अन्तर न पड़े। इन χ_0^2, χ_{-1}^2, χ_1^2 के मान निम्न सूत्र में रखकर, काई-वर्ग के शुद्ध मान χ_c^2 को ज्ञात कर लिया जाता है।

$$\chi_c^2 = \chi_0^2 - \frac{\chi_0^2 - \chi_{-1}^2}{\chi_1^2 - \chi_{-1}^2}\ (\chi_1^2 - \chi_0^2) \qquad \text{.. (9 33)}$$

साधारणतया डाडेकर शुद्धि, येट्स शुद्धि की अपेक्षा अच्छी है। किन्तु, इसको परिकलित करना कठिन है क्योंकि इसमें तीन विभिन्न χ^2–मानों को परिकलित करना होता है। यही कारण है कि यह अधिक चलन में नहीं है।

उदाहरण 9.14 : उदाहरण (9 12) के लिए ही डाडेकर शुद्धि द्वारा χ^2 का शुद्ध मान χ_c^2 ज्ञात करके परिकल्पना की परीक्षा की गयी है।

$$\chi_0^2 = \frac{200\ (132\times3-18\times47)^2}{50\times150\times21\times179}$$

$$= \frac{200\times(396-846)^2}{50\times150\times21\times179}$$

$$= \frac{200\times450\times450}{50\times150\times21\times179}$$

$$= 1\ 4366$$

χ_{-1}^2 ज्ञात करने के लिए बारम्बारता 3 में 1 जोड़ कर तथा सारणी में समायोजन करके निम्न रूप में लिखना होता है —

	पीड़ित	पीड़ित नहीं	योग
टीका लगा	4	46	50
टीका नहीं लगा	17	133	150
योग	21	179	200

$$\chi_{-1}^2 = \frac{200\ (133\times4-17\times46)^2}{50\times150\times21\times179}$$

$$= \frac{12500000}{28192500}$$

$$= \cdot4434$$

इसी प्रकार χ_1^2 के लिए बार० 3 में से 1 घटाकर तथा सारणी में समायोजन करके निम्न रूप में लिखना होता है —

	पीड़ित	पीड़ित नहीं	योग
टीका लगा	2	48	50
टीका नहीं लगा	19	131	150
योग	21	179	200

$$\chi_1^2 = \frac{200\,(131 \times 2 - 19 \times 48)^2}{50 \times 150 \times 21 \times 179}$$

$$= \frac{200 \times 650 \times 650}{50 \times 150 \times 21 \times 179}$$

$$= \frac{84500000}{28192500}$$

$$= 2{\cdot}9973$$

सूत्र (9.33) द्वारा,

$$\chi_c^2 = 1{\cdot}4366 - \frac{1{\cdot}4366 - {\cdot}4434}{2{\cdot}9973 - {\cdot}4434}\,(2{\cdot}9973 - 1{\cdot}4366)$$

$$= 1{\cdot}4366 - \frac{{\cdot}9932}{2{\cdot}5539} \times 1{\cdot}5607$$

$$= 1{\cdot}4366 - {\cdot}6070$$

$$= {\cdot}8296$$

यहाँ भी वही निष्कर्ष निकलता है जो उदाहरण (9.12) में दिया गया है।

K-वर्गों की स्थिति में χ^2-परीक्षा

यह आवश्यक नहीं है कि बारम्बारता सदैव एक आसंग सारणी में दी जाय। यदि किसी अभिलक्षण या कारक के k वर्ग हैं और उनमें किसी प्रयोग या परीक्षण द्वारा प्राप्त बारम्बारताएँ क्रमशः $O_1, O_2, O_3, \ldots, O_k$ हैं, एवम्

यदि सरल परिकल्पना H_0, (कि किसी पूर्व जानकारी या सिद्धान्त के अनुसार ये बारम्बारताएँ k वर्गों में $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_k$ अनुपात में घटित होती हैं,) की χ^2-परीक्षा करनी होती है और मानलें कि प्रेक्षित बारम्बारताओं का योग, n है,

$$\text{जहाँ} \quad O_1 + O_2 + O_3 + \ldots + O_k = n$$

तो प्रतिदर्श परिणाम n को दिये हुए अनुपात में विभाजित कर लिया जाता है। इस प्रकार प्राप्त तदनुसार बारम्बारताएँ ही सैद्धान्तिक बारम्बारताएँ होतीं हैं जो कि क्रमशः $E_1, E_2, E_3, \ldots, E_k$ हैं।

माना कि $r_1 + r_2 + r_3 + \ldots r_k = r$

$$\text{तो } E_i = \frac{n}{r} \times r_i \qquad \ldots(9.34)$$

$$\text{जबकि} \quad i = 1, 2, 3, \ldots, k$$

हम जानते हैं कि प्रत्येक $(O_i - E_i)^2/E_i$ से χ_i^2 का मान प्राप्त होता है जिसकी स्व॰

को० 1 है। इस प्रकार k वर्गों की स्थिति मे हम χ^2 का परिकलन कर लेते हैं जबकि

$$\chi^2 = \chi_1^2 + \chi_2^2 + \chi_3^2 + \ldots + \chi_k^2$$

यहाँ χ^2 मे केवल $(k-1)$ स्वतन्त्र प्राचल हैं अत χ^2 की स्व० को० $(k-1)$ है। इस स्थिति मे χ^2 के लिए सूत्र (9 23) दिया जा चुका है। अत

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$$

परिकलित χ^2 की पूर्व निर्धारित α सा० स्त० व $(k-1)$ स्व० कोटि के लिए सारणी-बद्ध χ^2 से तुलना करके नियमानुसार H_0 के विषय म निर्णय कर लिया जाता है।

उदाहरण 9.15 क्रोमेटिड मे द्विग्रामकरण (double cross) के अन्तर्गत दो वलयक (strand), तीन वलयक व चार वलयक म अनुपात 1 2 1 होने का अनुमान किया जाता है। एक नये सकरण प्रयोग द्वारा द्विधा-विनिमयी सख्या (number of double exchanges) दो, तीन व चार वलयक के लिए क्रमश 25, 32 और 14 पायी गयी।

परिकल्पना H_0 (कि ये सख्याएँ अनुमानित अनुपात का अनुमोदन करती हैं) की परीक्षा प्रतिदर्शज χ^2 द्वारा इस प्रकार कर सकते हैं —

यहाँ $n = 25 + 32 + 14 = 71$ और $r = 4$

प्रेक्षित सख्या 25, 32, 14

सैद्धान्तिक सख्या 17 75, 35 50, 17 75

$\because$ $E_1 = \frac{1}{4} \times 71 = 17\ 75$, $E_2 = \frac{2}{4} \times 71 = 35\ 5$, $E_3 = \frac{1}{4} \times 71 = 17\ 75$

सूत्र (9 23) की सहायता से,

$$\chi^2 = \frac{(25 - 17\ 75)^2}{17\ 75} + \frac{(32 - 35\ 5)^2}{35\ 5} + \frac{(14 - 17\ 75)^2}{17\ 75}$$

$$= \frac{52\ 56}{17\ 75} + \frac{12\ 25}{35\ 5} + \frac{14\ 06}{17\ 75}$$

$$= 2\ 961 + 345 + 792$$

$$= 4\ 098$$

सारणी (परि० घ–4) द्वारा $\alpha = 05$ और स्व० को० 2 के लिए $\chi_2^2 = 5\ 991$ जो कि 4 098 से अधिक है। अत H_0 स्वीकृत है। इसका अभिप्राय यह है कि प्रेक्षित सख्याएँ अनुमानित अनुपात का अनुमोदन करती हैं।

दो वर्गों की स्थिति मे χ^2–परीक्षा

उपर्युक्त विधि का प्रयोग इस स्थिति में भी किया जा सकता है। किन्तु इस विशेष स्थिति मे χ^2 का परिकलन बिना सैद्धान्तिक बारम्बारता ज्ञात किये निम्न सूत्र द्वारा सुगमता से किया जा सकता है। इस स्थिति मे χ^2 की स्व० को० 1 होती है।

यदि दो वर्गों में प्रेक्षित बारम्बारताएँ a और b हैं और उनमें परिकल्पनात्मक अनुपात r : 1 हो तो,

$$\chi^2 = \frac{(a - rb)^2}{r\,(a+b)} \qquad ....(9\ 35)$$

यहाँ χ^2 की स्व० को० 1 है।

यह आवश्यक नहीं है कि सदैव कल्पनात्मक अनुपात r 1 के रूप में ही दिया जाय, वह $r_1 : r_2$ के रूप में भी बहुधा दिया जाता है। इस स्थिति में r_2 से भाग करके अनुपात को $\frac{r_1}{r_2} : 1$ के रूप में सदा परिवर्तित किया जा सकता है। यहाँ $r = \frac{r_1}{r_2}$ के है।

परिकलित χ^2 को, 1 स्व० को० व α सा० स्त० पर सारणीकृत χ^2 से तुलना करके H_0 के विषय में नियमानुसार निर्णय कर लिया जाता है।

उदाहरण 9 16 : मूँगफली (Peanut) पौधों द्वारा नियोजन के अन्तर्गत सामान्य वृद्धि प्रकृति (normal growth habits) और वन्ध्य लघु प्रकृति (sterile brachytic habits) में अनुपात 15 : 1 होने का अनुमान लगाया जाता है। प्रयोग करने पर सामान्य और लघु प्रकृति के लिए क्रमश संख्याएँ 5,388 और 295 प्राप्त हुई तो परिकल्पना H_0 (कि प्रेक्षित संख्याएँ 15 : 1 अनुपात का समर्थन करती हैं) की परीक्षा χ^2 द्वारा इस प्रकार कर सकते हैं।

सूत्र (9 35) द्वारा,

$$\chi^2 = \frac{(5388 - 15\times 295)^2}{15(5388+295)}$$

$$= \frac{(963)^2}{15\times 5683}$$

$$= 10\ 87$$

सारणी (परि० प-4) द्वारा α = 01 और 1 स्व० को० के लिए $\chi_1^2 = 6\ 63$

$\chi^2 > \chi^2_{01,1}$, अत नये आँकड़े 15 . 1 अनुपात का समर्थन नहीं करते हैं।

आसंग-गुणांक

यदि किसी (p×q) आसंग सारणी में कारकों की स्वतन्त्रता की परीक्षा करने पर, स्वतन्त्रता के प्रति परिकल्पना H_0 को अस्वीकार कर दिया जाता है तो इससे यह निष्कर्ष निकाला जाता है कि कारक या अभिलक्षण एक दूसरे पर आश्रित हैं। किन्तु इससे उनकी पराश्रयता की मात्रा का पता नहीं चलता। इस पराश्रयता की मात्रा का माप करने के लिए आसंग गुणांक C का परिकलन करना होता है जबकि

$$C = \sqrt{\frac{\chi^2}{n+\chi^2}} \qquad ....(9\ 36)$$

यहाँ χ^2 किसी भी आसग सारणी के लिए परिकलित मान है और n प्रेक्षित बारम्बारताओ का योग अर्थात् प्रतिदर्श परिमाण है ।

C का न्यूनतम मान शून्य होता है जबकि $\chi^2=0$ हो और अधिकतम मान 1 के सन्निकट हो सकता है जो कि 1 से सदैव कम है यदि C का मान 5 से अधिक हो तो कारको या अभिलक्षणो में पराश्रयता अधिक समझी जाती है और C का मान 0 5 से कम हो तो पराश्रयता अल्प समझी जाती है ।

इस पराश्रयता माप का लाभ यह है कि उसम चर के बटन के प्रति कल्पना नही करनी पडती । चाहे बटन सतत हो या असतत, आसग-गुणाक स्वीकार करने योग है ।

सूत्र (9 36) से स्पष्ट है कि C का मान n पर निर्भर है । अत दो आसग गुणाको की तुलना करने के लिए यह आवश्यक है कि प्रतिदर्श परिमाण समान हो ।

आसग गुणाक C का परिकलन तभी करना चाहिये जबकि χ^2–परीक्षा द्वारा कारको की पराश्रयता के प्रति परिकल्पना को स्वीकार किया गया हो अन्यथा C का मान ज्ञात करने की कोई आवश्यकता नही है ।

उदाहरण 9.17 उदाहरण (9 10) मे H_0 को अस्वीकार किया गया है ।

यहाँ $\chi^2=8\ 855$, $n=300$ है ।

अत पराश्रयता का परिमाण जानने के लिए आसग-गुणाक ज्ञात करना आवश्यक है । सूत्र (9 36) द्वारा,

$$C=\sqrt{\frac{8\ 855}{300+8\ 55}}$$

$$=\sqrt{\frac{8\ 855}{308\ 55}}$$

$$=\sqrt{0287}$$

$$=0\ 17$$

C का मान अल्प है । इससे यह निष्कर्ष निकलता है कि रहने के स्थान व पेस्टीमाइड उद्योग के प्रति *अभिवृत्ति मे अल्प सम्बन्ध है ।*

समंजन-सुष्ठुता की परीक्षा

एक विचाराधीन चर का कोई विशेष बटन होने की कल्पना बहुधा की जाती है । जैसे प्राय यह मान लिया जाता है कि प्रतिदर्श का चयन प्रसामान्य समष्ट से किया गया है । किन्तु इस अभिधारणा की वैधता सदेहपूर्ण है । अत इसकी पुष्टि χ^2–परीक्षा द्वारा की जाती है जिसकी विधि निम्न प्रकार है —

परीक्षा के हेतु प्रेक्षित मानो O और उनके तदनुसार प्रत्याशित मानो E को ज्ञात करना होता है । प्रत्याशित मान कल्पित बटन को प्रयोग करके ज्ञात किये जाते हैं । इन मानो O व E को सूत्र (9 23) मे रखकर χ^2 के मान का परिकलन कर लिया जाता

है। यहाँ χ^2 की स्व० को० (k–m–1) होती है, जहाँ k वर्गों की संख्या है और m उन प्राचलों की संख्या है जिनका प्रतिदर्श द्वारा आगणन किया गया है। जैसे प्रसामान्य बंटन की अभिधारणा की वैधता की परीक्षा करने में यदि μ व σ का आगणन $\overline{X}$ और s^2 से होगा और इस स्थिति में χ^2 की स्व० को० (k–3) होगी। यदि प्वासों बंटन की वैधता की परीक्षा करनी है तो χ^2 की स्व० को० (k–2) होगी क्योंकि इस बंटन में एक ही प्राचल का आगणन करना होता है। इसी प्रकार किसी भी अन्य कल्पित बंटन के लिए χ^2 की स्व० को० ज्ञात कर सकते हैं।

परिकलित χ^2 का α सार्थकता स्तर व (k–m–1) स्व० को० के लिए सारणीबद्ध χ^2 से तुलना करके निर्णय कर लिया जाता है कि प्रेक्षण कल्पित बंटन वाले समग्र से है या नहीं। इस विधि के प्रयोग को निम्नांकित उदाहरण द्वारा दिखाया गया है —

उदाहरण 9.18 एक 200 पृष्ठ की पुस्तक में अशुद्धियों की संख्या और तदनुसार पृष्ठों की संख्या इस प्रकार थी —

अशुद्धियाँ (x)	पृष्ठों की संख्या (f)	(fx)
0	65	00
1	45	45
2	47	94
3	28	84
4	10	40
5	5	25
योग	200	288

यह देखने के लिए कि यह बंटन प्वासों-बंटन का पालन करता है, समंजन-सुष्ठुता की परीक्षा करनी है जो इस प्रकार है —

$$\text{इस बंटन का माध्य } m=\frac{288}{200}=1.44$$

हम जानते हैं कि प्वासों बंटन के लिए r सफलताओं की प्रायिकता,

$$P(r)=\frac{e^{-m}\,m^r}{r\,!}$$

और (r+1) सफलताओं की प्रायिकता,

$$P(r+1)=\frac{e^{-m}\,m^{r+1}}{(r+1)\,!}$$

$$\therefore \quad \frac{P\,(r+1)}{P\,(r)} = \frac{m^{r+1}}{(r+1)!} \times \frac{r\,!}{m^r}$$

या $P\,(r+1) = \frac{m}{r+1}\,P\,(r)$

सफलताओं की प्रायिकता को प्रनिदर्श परिमाण n से गुणा करने पर प्रत्याशित बारम्बारता ज्ञात हो जाती है।

यहाँ $P\,(O) = e^{-m}$

$P\,(1) = m \times P\,(0)$

$P\,(2) = \frac{m}{2} \times P(1)$

$P\,(3) = \frac{m}{3} \times P(2)$

उपर्युक्त सूत्रों एवं सम्बन्धों की सहायता से प्रत्याशित बारम्बारता ज्ञात की गयी है :-

$$P(0) = e^{-m} = e^{-1 \cdot 44}$$

माना कि $y = e^{-1 \cdot 44}$

$\log_e y = -1{\cdot}44$

$\log_{10} y = \frac{-1 \cdot 44}{2 \cdot 3026} \quad (\because \log_e 10 = 2{\cdot}3026)$

$\therefore \quad \log_{10} y = -0{\cdot}62538$

$= \overline{1}{\cdot}37462$

$y = 0\,237$ या $P\,(O) = 0\,237$

$E_1 = P\,(O).n = 0\,237 \times 200 = 47{\cdot}4$

$E_2 = P(1).\,n = m.n\,P\,(O) = m\ E_1 = 68\,3$

$E_3 = P(2).\,n = \frac{m}{2}.\ P\,(1).\,n = \frac{m}{2}.\ E_2 = 49\,2$

$E_4 = P(3).\,n - \frac{m}{3}.\ P\,(2).\,n = \frac{m}{3}.\ E_3 = 23\,6$

$$E_4 = P(4), \ n = \frac{m}{4} \quad P(3) \ n = \frac{m}{4} \ E_4 = 8 \ 5$$

$$E_5 = P(5) \ n = \frac{m}{5} \quad P(4) \ n = \frac{m}{5} \ E_5 = 2 \ 4$$

प्रेक्षित तथा प्रत्याशित बारम्बारताएँ ज्ञात होने के पश्चात् प्वासो बटन के समजन की χ^2-परीक्षा कर सकते हैं।

O_i	E_i	$(O_i - E_i)$	$(O_i - E_i)^2/E_i$
65	47 4	17 6	6 53
45	68 3	23 3	7 94
47	49 2	2 2	0 09
28	23 6	4 4	0 82
10 }=15	8 5 }=10 9		
5	2 4	4 1	1 56
		योग	16 94

उपर्युक्त सारणी में अंतिम पंक्ति की बारम्बारताओं को पाँचवी पंक्ति में इस कारण जोड़ दिया गया है कि अंतिम प्रत्याशित बारम्बारता 5 से कम है। इस प्रकार यहाँ K=5 है और χ^2 की स्व० को० 3 है।

5 प्रतिशत सार्थकता स्तर व 3 स्व० को० के लिए χ^2 का सारणी (परि० प-4) द्वारा प्राप्त मान 7 815 है जो कि χ^2 के परिकलित मान 16 94 से कम है। अतः परिकल्पना, कि दिया हुआ बटन प्वासो-बटन है अस्वीकृत है।

टिप्पणी (1) ऊपर सारणी में प्रत्याशित बारम्बारताओं का योग 200 से कुछ कम है। यह प्रकार प्रत्याशित बारम्बारताओं के निकटन के कारण है। किन्तु यह परीक्षा की दृष्टि से उपेक्षणीय है।

(2) यदि किसी वर्ग की प्रत्याशित बारम्बारता 5 से कम हो तो χ^2-बटन के सातत्य को बनाये रखने के लिए इस वर्ग को किसी अन्य वर्ग में मिला देते हैं जिसमें कि ऐसा करना उचित हो और साथ ही प्रत्याशित बारम्बारता 5 या 5 से अधिक हो जाती हो।

प्रसामान्य समग्र के लिए H_0 $\sigma^2 = \sigma_0^2$ की परीक्षा

माना कि एक प्रसामान्य समग्र से n परिमाण के प्रतिमाण के प्रतिदर्श का चयन किया गया है और इन चयनकृत एककों पर प्रतिदर्श प्रेक्षण $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$ है। इन प्रेक्षणों

के आधार पर परिकल्पना $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ को $H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$ के विरुद्ध परीक्षा प्रतिदर्शज χ^2 द्वारा की जाती है, जहाँ σ_0^2 एक ज्ञात अचर मान होता है।

α सार्थकता स्तर पर परिकल्पना H_0 को स्वीकार कर लिया जाता है यदि असमिका

$$\chi^2_{(\alpha/2)\ (n-1)} < \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}{\sigma_0^2} > \chi^2_{(1-\alpha/2)(n-1)} \quad ....(9.37)$$

सत्य हो और जहाँ χ^2 की स्व० को० $(n-1)$ हो।

अन्यथा H_0 को अस्वीकार कर दिया जाता है।

प्रसामान्य समग्र के लिए $H_0 \ \ \sigma^2 \leq \sigma_0^2$ को $H_1 \ \ \sigma^2 > \sigma_0^2$ के विरुद्ध परीक्षा के लिए परीक्षा निकष निम्नांकित होता है — यहाँ सभी संकेतन ऊपर दिये वर्णन के अनुरूप हैं।

H_0 को अस्वीकार कर दिया जाता है यदि असमिका

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}{\sigma_0^2} > \chi^2_{(1-\alpha)\ (n-1)} \quad ....(9.38)$$

सत्य हो। अन्यथा H_0 को स्वीकार कर लिया जाता है।

इसी प्रकार $H_0 \ \ \sigma^2 \geq \sigma_0^2$ को $H_1 \ \ \sigma^2 < \sigma_0^2$ के विरुद्ध परीक्षा के लिए निकष निम्न प्रकार है :—

H_0 को अस्वीकार कर दिया जाता है कि यदि असमिका

$$\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2/\sigma_0^2 \leq \chi^2_{(\alpha)\ (n-1)} \quad ....(9.39)$$

सत्य हो।

अन्यथा H_0 को स्वीकार कर लिया जाता है।

टिप्पणी : यह अध्याय 7 में दिया जा चुका है कि $\frac{(n-1)\,s^2}{\sigma_0^2}$ का χ^2–बंटन होता है। इसी तथ्य का ऊपर परिकल्पना परीक्षा में उपयोग किया गया है।

एक प्रसामान्य बंटन के प्रसरण σ^2 का विश्वास्यता अन्तराल

प्राय. समग्र में परिवर्तिता जानने के लिए प्रतिदर्श द्वारा σ^2 के आगणक s^2 का परिकलन करना होता है। समग्र माध्य की भाँति, समग्र-प्रसरण 'σ^2' के विश्वास्यता अन्तराल को भी ज्ञात करने की आवश्यकता होती है। प्रसामान्य समग्र की स्थिति में प्रतिदर्शज χ^2 की सहायता से इनका परिकलन किया जाता है।

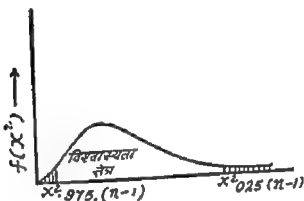
माना कि प्रतिदर्श में n प्रेक्षण $X_1, X_2, X_3 ... X_n$ हैं और इनके द्वारा परिकलित प्रसरण s^2 है जहाँ,

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_i (X_i - \bar{X})$$

यदि 95 प्रतिशत विश्वास्यता अन्तराल ज्ञात करना है तो सचयी काई-वर्ग बटन सारणी मे राशि $\chi^2{}_{\cdot 975}$ और $\chi^2{}_{025}$ ज्ञात कर लेते हैं क्योकि χ^2 के कोई मान को, जिसका याद्दच्छिक प्रतिदर्श से परिकलन किया गया हो, इन दो सीमाओ के अन्दर होने की प्रायिकता $= \cdot 975 - \cdot 025 = 95$ है।

अतः σ^2 का 95 प्रतिशत विश्वास्यता अन्तराल निम्न सूत्र द्वारा ज्ञात कर सकते हैं —

$$\chi^2{}_{975} < \frac{(n-1)\, s^2}{2} \leqslant \chi^2{}_{025}$$



चित्र 9 4 ·95 विश्वास्यता क्षेत्र को प्रदर्शित करता हुआ काई-वर्ग बटन वक्र।

यहाँ χ^2 की स्व० को० $(n-1)$ है और $\chi^2{}_{975}$ मे 975 और $\chi^2{}_{025}$ मे ·025, वक्र मे भुजा अक्ष पर बिन्दुओ की कोटि के दायी ओर का क्षेत्र है जैसा कि चित्र (9–4) मे दिखाया गया है।

$$\chi^2{}_{\cdot 975} < \frac{\frac{\Sigma X_i^2}{1}}{\sigma^2} \leqslant \chi^2{}_{025}$$

जबकि $(n-1)\, s^2 = \sum_i (X_i - \bar{X})^2 = \Sigma X_i^2$

$$\text{या} \quad \frac{\frac{\Sigma X_i^2}{1}}{\chi^2{}_{025}} < \sigma^2 < \frac{\frac{\Sigma X_i^2}{1}}{\chi^2{}_{975}} \qquad \text{....(9.40)}$$

यदि किसी अन्य प्रतिशत के लिए विश्वास्यता अन्तराल ज्ञात करना हो तो χ^2 के मान उसी के अनुसार सारणी द्वारा ज्ञात करके (9 40) के समरूप सूत्र लिखकर ज्ञात कर सकते हैं।

उदाहरण 9.20 . बारह वर्ष की आयु के बच्चो की ऊँचाई मे समग्र प्रसरण का 95 प्रतिशत विश्वास्यता अन्तराल ज्ञात करना है।

जबकि $\sum_i X_i = 7211\ 00$ सें० मी०, $\sum_i X_i^2 = 984148\ 50$

और n=53 ज्ञात हैं। (यहाँ चर X ऊँचाई को निरूपित करता है और प्रतिदर्श परिमाण n है)

$$\sum_i X_i^2 - \frac{(\sum_i X_i)^2}{n} = 894148\ 50 - \frac{(7211\ 0)^2}{53}$$

$$= 3044\ 3302$$

विश्वास्यता अन्तराल के लिए,

$$\frac{3044\ 3302}{73\ 8} < \sigma^2 < \frac{3044\ 3302}{34\ 0}$$

सारणी (परि० प–4) द्वारा,

$\chi^2_{(\ 025)\ (52)} = 73\ 8$ और $\chi^2_{(\ 975)\ (52)} = 34\ 0$

अत. $41\ 25 < \sigma^2 < 89\ 54$

ऊपर दी हुई असमिका से स्पष्ट है कि σ^2 की 95 प्रतिशत सा० स्त० ५. उपरि सीमा 89 54 और निम्न सीमा 41 15 है।

दो प्रसामान्य समग्रो के प्रसरणों की समानता की परीक्षा

माना कि दोनो प्रसामान्य समग्रो मे से स्वतत्र एव यादृच्छिक प्रतिदर्शों का चयन किया जाता है जिनके परिमाण क्रमश n_1 और n_2 है। इन प्रतिदर्शों के प्रेक्षण निम्नाकित है –

प्रतिदर्श 1	प्रतिदर्श 2
X_{11}	X_{21}
X_{12}	X_{22}
X_{13}	X_{23}
⋮	⋮
X_{1n_1}	X_{2n_2}

यहाँ प्रेक्षणो X_{ij} मे अनुलग्न i प्रतिदर्श सख्या और j प्रेक्षण सख्या को निरूपित करता है।

इन प्रतिदर्शों का अलग-अलग प्रसरण निम्न सूत्रो द्वारा परिकलित कर लिया जाता है। माना कि पहले प्रतिदर्श का प्रसरण s_1^2 और दूसरे का s_2^2, है, जबकि

$$s_1^2 = \frac{1}{n_1 - 1}\left\{\sum_{i=1}^{n_1} X^2_{1i} - \frac{(\Sigma X_{1i})^2}{n_1}\right\}$$

$$s_2^2 = \frac{1}{n_2 - 1}\left\{\sum_{j=1}^{n_2} X^2_{2j} - \frac{(\Sigma X_{2j}^2)}{n_2}\right\}$$

यह अध्याय 6 मे बताया जा चुका है कि दो प्रसरणो के अनुपात का बटन F होता है अत

$H_0 \quad \sigma^2_1 = \sigma_2^2$ की $H_1 \quad \sigma_1 \neq \sigma_2^2$ के विरुद्ध

परीक्षा, F–परीक्षा द्वारा करते है। जबकि

$$F_{(\nu_1 \ \nu_2)} = \frac{s_1^2}{s_2^2} \tag{9 41}$$

प्रतिदर्शज (9 41) मे बड़े प्रतिदर्श प्रसरण को s_1^2 लिया जाता है।

यदि परिकलित F–मान ■ सा० स्त० व $(\nu_1 \ \nu_2)$ स्व को {जबकि $\nu_1 = (n_1 - 1)$ और $\nu_2 = n_2 - 1)$} के लिए $F_{(\alpha/2) \ (\nu_1 \ \nu_2)}$ से बड़ा हो, तो H_0 को अस्वीकार कर दिया जाता है और यदि कम हो तो स्वीकार कर लिया जाता है। इसी प्रकार यदि परिकलित–F का मान सारणीबद्ध $F_{(1 - \alpha/2) \ (\nu_1 \ \nu_2)}$ से कम हो तो H_0 को अस्वीकार कर दिया जाता है।

यदि $H_0 \quad \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ को $H_1 \quad \sigma_1^2 > \sigma_2^2$ के विरुद्ध करनी हो तो प्रतिदर्शज F का ही प्रयोग करना होता है किन्तु इस स्थिति मे परीक्षा एक पुच्छ परीक्षा है।

यदि परिकलित $F < F_{(1 - \alpha) \ (\nu_1 \ \nu_2)}$ हो तो H_0 अस्वीकृत है।

इसी प्रकार $H_0 \quad \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ की $H_1 \quad \sigma_1^2 < \sigma_2^2$ के विरुद्ध परीक्षा के लिए एक पुच्छ F–परीक्षा करनी होती है।

यदि परिकलित $F > F_{(\alpha) \ (\nu_1 \ \nu_2)}$ हो तो H_0 को अस्वीकार कर दिया जाता है।

उदाहरण 9 20 सात वर्ष की आयु के 67 बच्चो के और आठ वर्ष की आयु के 100 बच्चो के सिरो की परिधि सेंटीमीटर मे नापी गयी और परिकलन करने पर ■ प्रतिदर्शों के प्रसरण क्रमश 3 12 और 3 02 प्राप्त हुए।

परिकल्पना कि सात वर्ष व आठ वर्ष की आयु मे बच्चो के सिर की परिधि के प्रसरण समान है।

यहाँ $H_0 \quad \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ की $H_1 \quad \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ के विरुद्ध परीक्षा निम्न प्रकार कर सकते है —

सूत्र (9 40) के अनुसार,

$$F = \frac{3\ 12}{3\ 02} = 1\ 033$$

यहां H_0 की दो-पुच्छ परीक्षा करनी होगी। माना कि 10 प्रतिशत सार्थकता स्तर पर परीक्षा करनी है यहां $\nu_1=66$ और $\nu_2=99$ है।

सारणी (परि० घ–5·2) द्वारा $F_{(.05)\ (66,\ 99)}=1.47$ है। यह मान परिकलित F के मान से अधिक है अतः H_0 स्वीकृत है।

यदि $H_0 : \sigma_1^2=\sigma_2^2$ को $H_1 : \sigma_1^2>\sigma_2^2$ के विरुद्ध परीक्षा करनी हो तो एक पुच्छ F–परीक्षा करनी होगी। इसके लिए $F_{(.90)\ (66,99)}=0.733$ है। यह मान परिकलित F के मान से कम है। अतः H_0 स्वीकृत है।

अनेकों प्रसामान्य समग्रों के प्रसरणों की सजातीयता की परीक्षा

माना कि k समग्र है और इनके प्रसरणों की समानता के हेतु परिकल्पना,

$$H_0 : \sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma_3^2=\ldots=\sigma_k^2$$

को, H_1 : (कि कम से कम कोई दो प्रसरण असमान हैं) के विरुद्ध परीक्षा करनी है जबकि

$$\sigma_1^2,\ \sigma_2^2,\ \sigma_3^2,\ \ldots,\ \sigma_k^2$$

समग्रों के क्रमशः प्रसरण हैं। यहाँ $k>2$ होना आवश्यक है क्योंकि यदि $k=2$ है तो H_0 की F–परीक्षा करना उचित है। H_0 की परीक्षा विभिन्न रीतियों द्वारा की जा सकती है किन्तु यहां केवल बार्टलेट (Bartlett) की विधि का ही वर्णन किया गया है।

बार्टलेट–परीक्षा

माना कि k समग्रों में से k स्वतन्त्र प्रतिदर्शों का चयन किया गया है जिनके परिमाण क्रमशः $n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k$ हैं और इन प्रतिदर्शों द्वारा परिकलित किसी चर X के प्रसरण क्रमशः $s_1^2, s_2^2, s_3^2, \ldots, s_k^2$ हैं।

H_0 की परीक्षा के हेतु प्रतिदर्शज χ^2 निम्नांकित होता है :—

$$\chi^2_{k-1} = \sum_{i=1}^{k} (n_i-1)\cdot \log_e \bar{s}^2 - \sum_{i=1}^{k} (n_i-1) \log s_i^2 \quad \ldots (9.42)$$

जबकि

$$\bar{s}^2=\frac{1}{\sum_i (n_i-1)} \left\{ \sum_{i=1}^{k} (n_i-1)\, s_i^2 \right\} \quad \ldots (9.43)$$

सूत्र (9.42) द्वारा प्राप्त χ^2 के परिकलन को सुगम बनाने के लिए लघुगणक (log) को आधार 10 के प्रति लेना चाहिये और इस प्रकार जो मान प्राप्त हो उसको $\log_e 10$ अर्थात् 2·3026 से गुणा कर देना चाहिये जिससे χ^2 का मान आधार e के प्रति प्राप्त हो जाता है। (आधार परिवर्तन के लिए परिशिष्ट (ख–6) को पढ़िए)।

सूत्र (9 42) द्वारा प्राप्त χ^2 का मान कुछ अभिनत होता है और कुछ ऊर्ध्व-मुखी होता है। अत χ^2 का शुद्ध मान ज्ञात करने के लिए χ^2 में संशोधन करना होता है। χ^2 को एक शोधन कारक (correction factor) C से भाग दे दिया जाता है।

जबकि

$$C = 1 + \frac{1}{3(k-1)} \left\{ \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{n_i - 1} - \frac{1}{\sum_i (n_i - 1)} \right\} \quad (9\ 44)$$

यदि $\frac{\chi^2}{C}$ का मान सारणीबद्ध $\chi^2_{\alpha, k-1}$ से बड़ा हो तो H_0 को अस्वीकार करना होता है। इसका अर्थ है कि k प्रसरणों से कम से कम कोई दो प्रसरण एक दूसरे से सार्थक रूप में भिन्न हैं। यदि $\chi_c^2 < \chi^2_{\alpha, k-1}$ हो तो H_0 को स्वीकार कर लिया जाता है। इसका अभिप्राय है कि k प्रसरण सजातीय हैं।

उदाहरण 9.21 एक लाक्षणिक सर्वेक्षण के अन्तर्गत विभिन्न आयु के बच्चों के भारों में प्रसरण और प्रतिदर्श परिमाण निम्नांकित थे —

आयु	प्रतिदर्श परिमाण	प्रतिदर्श प्रसरण	प्रसरण के लघुगणक
5 वर्ष	54	4 72	674
6 ,,	102	4 27	630
7 ,,	77	7 23	·859
8 ,,	100	7 67	·885
9 ,,	75	7 23	859
10 ,,	81	11 68	1·067

परिकल्पना H_0 कि 5 से 10 वर्ष तक की आयु के बच्चों के भारों में समान विचलन होता है अर्थात्

$$H_0 \quad \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = \sigma_4^2 = \sigma_5^2 = \sigma_6^2$$

को, H_1 (कम से कम कोई दो प्रसरण असमान हैं) के विरुद्ध परीक्षा, बार्टलेट-परीक्षा द्वारा कर सकते हैं।

सूत्र (9 43) द्वारा,

$$\bar{s}^2 = \frac{1}{483} (53 \times 4\ 72 + 101 \times 4\ 27 + \ldots + 80 \times 11\ 68)$$

$$\bar{s}^2 = \frac{1}{483}(3459\ 66)$$

$$= 7{\cdot}162$$

सूत्र (9 42) द्वारा,

$$\chi^2 = \{483 \log_{10} 7{\cdot}162 - (53 \times {\cdot}674 + 101 \times {\cdot}630 + 80 \times 1{\cdot}067) \times 2{\cdot}3026$$

$$= (483 \times 0{\cdot}855 - 401{\cdot}177) \times 2{\cdot}3026 = 11{\cdot}788$$

सूत्र (9 44) द्वारा,

$$C = 1 + \frac{1}{3 \times 5}(0\ 780 - {\cdot}00207) = 1 + \frac{{\cdot}07593}{15}$$

$$= 1{\cdot}00506$$

संशोधित $\chi^2 = \frac{11{\cdot}788}{1{\cdot}00506} = 11{\cdot}728$

सारणी (परि० घ–4) द्वारा $\alpha = {\cdot}05$ सा० स्त० तथा 5 स्व० को० पर χ^2 का मान 11 7 है। परिकलित χ^2, सारणीबद्ध χ^2 के मान से अधिक है। अत. परिकल्पना H_0 को अस्वीकार कर दिया जात, है। इससे निष्कर्ष निकलता है कि कम से कम कोई दो प्रसरण एक दूसरे के समान नही हैं अर्थात् H_1 स्वीकृत है।

प्रश्नावली

1. रेनाड–फिनामना (Raynaud's Phenomenon : RP) की व्यापकता धूम्रपान करने वालो और नही करने वालों मे निम्न सारणी ने दी गयी है :—

RP की व्यापकता

श्रमिक	धूम्रपान करने वाले	धूम्रपान न करने वाले
मशीन पर काम करने वाले	49	42
जंगलो मे मशीन पर काम करने वाले	19	5
घरेलू	9	9

तो इस परिकल्पना की परीक्षा कीजिये कि श्रमिकों के प्रकार और धूम्रपान करने वालों में (RP) की व्यापकता की दृष्टि से कोई सम्बन्ध नहीं है ?

2. एक अस्पताल में वर्ष के विभिन्न महीनों में बच्चों के जन्मने की संख्या इस प्रकार है :—

महीना :	जनवरी,	फरवरी,	मार्च,	अप्रेल,	मई	जून
जन्मने की संख्या :	132	119	123	101	107	90

जुलाई,	अगस्त,	सितम्बर,	अक्टूबर,	नवम्बर,	दिसम्बर,
115	113	139	136	137	146

परीक्षा कीजिये कि वर्ष के विभिन्न महीनों में जन्मने की संख्या समान रूप से वटित है ?

3. दो शोधनों का आलूचे पर प्रभाव देखने के लिए प्रयोग किया गया। इस प्रकार प्रति पेड़ द्वारा प्राप्त आलूचों को सुखाने पर निम्न मात्राएँ प्राप्त हुयी।

शोधन A (भार किलोग्राम में)	शोधन B (भार किलोग्राम में)
31·3	25·4
32·1	14·1
42·0	40·0
48·0	34·3
68·8	37·3
48·0	40·6
45·8	28·6
32·1	11·1

परीक्षा कीजिये कि दोनों शोधनों के माध्य प्रभाव में सार्थक अन्तर है या नहीं,

4. सिद्ध कीजिये कि एक $(2 \times n)$ क्रम की आसंग सारणी के लिए

$$\chi^2 = \sum_r N_1 N_2 \frac{\left(\frac{a_{1r}}{N_1} - \frac{a_{2r}}{N_2}\right)^2}{a_{1r} + a_{2r}}$$

जब कि a_{1r} और a_{2r} r वें स्तम्भ में बारम्बारताएँ हैं और N_1 व N_2 दोनों पंक्तियों की बारम्बारताओं का योग हैं.

(आगरा, 1953)

5. बम्बई की 98 कपड़ा मिलों के सन्निरीक्षण द्वारा प्राप्त एक वर्ष में दुर्घटनाओं की संख्या निम्न प्रकार थी :—

वर्ष मे दुर्घटनाओं की सख्या	0	1	2	3	4
मित्तो की सख्या	24	38	22	11	3

(1) इस न्यास मे प्वासों बटन का समजन कीजिये।

(बम्बई, 1966)

6 एक समूह के निम्नांकित आयु बटन की प्रसामान्य बटन मे, समजन सुष्ठुता की परीक्षा कीजिये —

आयु (वर्षो में)	व्यक्तियों की सख्या
10 — 20	3
20 — 30	8
30 — 40	14
40 — 50	21
50 — 60	7
60 — 70	6
70 — 80	2
80 — 90	1

7. एक महाविद्यालय के जलपान-गृह से प्रति दिन जाने वालो की सख्या 500 मे से 350 थी। किन्तु कुछ समय पश्चात् दरो में लगभग दुनी वृद्धि कर दी गयी। अब प्रति दिन जाने वालो की सख्या 250 रह गयी। परीक्षा कीजिये कि जल पान करने वालो के अनुपात मे सार्थक कमी है या नही।

8 एक विशेष प्रकार के धागे के 50 टुकडो के प्रतिदर्श की परीक्षा की गयी। इन धागों की माध्य टूटने की सामर्थ्य 14 5 पौंड थी। परीक्षा कीजिये कि यह धागो का प्रतिदर्श उस समग्र से है जिसकी माध्य टूटने की शक्ति 15 6 पौंड और मानक विचलन 2 2 पौंड है।

(कलकत्ता, 1963)

9 एक किसान एक सस्य को दो खेतो A व B मे उगाता है। खेत A मे दस रुपये प्रति एकड और खेत B मे बीस रुपये प्रति एकड खाद डालता है। दोनो खेतो का पिछले पाँच वर्षों का शुद्ध प्रतिफल इस प्रकार था —

वर्ष	1	2	3	4	5
खेत A (रुपये प्रति एकड)	34	28	42	37	38
खेत B (रुपये प्रति एकड)	36	33	48	38	50

यदि अन्य बातें समान हों, तो बताइये कि किसान को खाद पर अधिक व्यय करना लाभप्रद है या नहीं।

(पंजाब 1966)

(उत्तर $t=3.814$, है।)

10. छः चयनकृत मल्लाहों की ऊँचाई 66", 67", 68", 69", 71", 72" है। दस चयनकृत सिपाहियों की ऊँचाई 61", 62", 65", 66", 69", 70", 71", 72", 69" और 73" है। क्या इन ऊँचाइयों से निष्कर्ष निकलता है कि सिपाहियों की माध्य ऊँचाई, मल्लाहों की माध्य ऊँचाई, से कम है ?

11. छोटी सामान्य दुकानों के प्रतिदर्श से यह सूचना प्राप्त हुई —

	दुकानें शहरों में	दुकानें गाँवों में	योग
पुरुषों द्वारा चलित	17	18	35
स्त्रियों द्वारा चलित	3	12	15
योग	20	30	50

क्या यह कहा जा सकता है कि शहरों की अपेक्षा गाँवों में स्त्रियों द्वारा छोटी सामान्य दुकानें अधिक चालित हैं ?

(मेरठ, 1969)

[उत्तर $\chi^2=3.57$; हाँ]

12. एक पदार्थ के फुटकर भावों की चार शहरों A, B, C, D में तुलना करने के लिए चयनकृत दुकानों से एक पदार्थ की दरें पैसों में एकत्रित की गयीं जो कि इस प्रकार थीं —

A · 82, 79, 73, 69, 69, 63, 61

B 84, 82, 80, 79, 76, 68, 62

C , 88, 84, 80, 68, 68, 66, 66

D · 79, 77, 76, 74, 72, 68, 64

क्या इस न्यास से यह पता चलता है कि इन चार शहरों के भावों में अन्तर सार्थक है ?

(आई० सी० ए० आर०, 1957)

13. एक उद्दीपन (stimulus) को 12 मरीजों को देने पर उनके रक्त दाब में निम्न वृद्धियाँ हुई :—

5, 2, 8, –1, 3, 0, 6, –2, 1, 5, 0, 4

क्या यह निष्कर्ष निकाला जा सकता है कि इस उद्दीपन से सामान्यता सार्थक वृद्धि होती है ?

(उदयपुर, 1968)

14 पहले दिये गये प्रश्न न० 12 के न्यास को प्रयोग करके परीक्षा कीजिये कि स्त्रियों द्वारा चालित दुकानों का शहरों में व गाँवों में अनुपात वही है।

15. क्षय रोग से पशुओं के प्रति रक्षण हेतु एक प्रयोग किया गया और इसमें निम्नांकित परिणाम प्राप्त हुए —

	क्षय-रोग से	
	प्रभावित	अप्रभावित
टीका लगा	12	26
टीका नही लगा	16	6

बताइये कि टीका क्षय रोग की रोक थाम में प्रभावी है या नहीं।

(आई० ए० एस०, 1942)

16 आठ विभिन्न शोधनों के लिए चार समयों पर उपलब्ध नाइट्रोजन की मात्रा इस प्रकार थी :—

	समय			
शोधन	30 दिन	50 दिन	70 दिन	100 दिन
1.	32 0	20 0	18 0	16 0
2.	45 0	11 0	42 0	12 0
3.	23 0	23 0	23 0	7 0
4.	24 0	38 0	53 0	55 0
5	64 0	53 0	54 0	48 0
6	41·0	91 0	99 0	43 0
7.	60 0	35 0	51 0	55 0
8.	81·0	42 0	43 0	36 0

परीक्षा कीजिये कि उपलब्ध नाइट्रोजन में विभिन्न समयों पर विचलन समान है।

17. किसी संकरण (cross) के अन्तर्गत F_2 वियोजन (segregation) में गहरे भूरे और पीले भूरे, पौधों की संख्या क्रमश 193 और 63 थी। इन दो प्रकार के

पौधों की संख्या में सैद्धान्तिक अनुपात 3 : 1 समझा जाता था। तो परीक्षा कीजिये कि प्रेक्षित बारम्बारताओं की प्रत्याशित अनुपात से सहमति है।

18 किसी संकरण के अन्तर्गत F_2 वियोजन में पाँच विभिन्न रंगों के पेड़ों की संख्या में प्रत्याशित अनुपात 27 : 9 : 9 : 3 : 16 था। संकरण करने पर इन रंगों के पौधों की संख्या क्रमशः इस प्रकार थी —

रंग	पौधों की संख्या
गहरा भूरा	110
काला	40
पीला भूरा	38
लाल भूरा	17
हल्का पीला	18

क्या प्रेक्षित पौधों की संख्या प्रत्याशित अनुपात का समर्थन करती है?

19 एक सिक्के को 150 बार उछालने पर कितनी बार ऊपर की ओर शीर्ष आये कि सिक्के की अनभिनतता के प्रति परिकल्पना अस्वीकार हो जाय?

20 250 पासक-क्षेप में, निम्नांकित बिन्दु ऊपर की ओर आये —

1 या 2 बिन्दु	75
3 बिन्दु	40
4 या 5 बिन्दु	80
6 बिन्दु	55

परीक्षा कीजिये कि पासक अनभिनत है या नहीं।

21 सामान्य समष्टि, जिसके प्राचल $\mu=60$ और $\sigma^2=324$ है, से एक 100 यूनिटों के प्रतिदर्श का चयन किया गया तो बताइये कि कितने प्रतिशत यूनिट ऐसे हैं जिनका समष्टि माध्य से विचलन 4 या इससे अधिक है?

22 एक सौदागर ने दो भिन्न छापों वाले बल्बों में से प्रत्येक के 50 बल्ब खरीदे। इन बल्बों की परीक्षा करने पर पता चला कि छाप A के बल्बों का माध्य जीवन-काल 1282 घंटे और मानक विचलन 80 घंटे है। यदि छाप B के बल्बों का माध्य जीवन काल 1208 घंटे और मानक विचलन 94 घंटे है तो क्या इन दो प्रकार के बल्बों में भिन्नता है?

(पंजाब, 1968)

[उत्तर हाँ]

23. एक बड़े शहर से 600 व्यक्तियों के प्रतिदर्श का असम्भाविक रीति द्वारा चयन किया गया। इस प्रतिदर्श में 53 प्रतिशत पुरुष थे। क्या यह संदेह करना उचित है कि इस शहर में स्त्रियों व पुरुषों की संख्या बराबर है ?

(बम्बई, 1969)

[उत्तर : संख्या समान है।]

24. सिद्ध कीजिये कि एक $(p \times q)$ क्रम की आसंग सारणी द्वारा परिकलित χ^2 का मान कभी भी $n(p-1)$ या $n(q-1)$ से अधिक नहीं हो सकता; अर्थात् $\chi^2 \leq n(p-1)$ या $\chi^2 \leq n(q-1)$.

टिप्पणी : प्रश्नावली में विश्वविद्यालयों से लिए गये प्रश्न मूल रूप में अंग्रेजी भाषा में थे जिनका यहाँ हिन्दी अनुवाद दिया गया है।

□ □ □

10 अप्राचल विधियाँ

आधुनिक काल में सांख्यिकी की अनेकों क्रियाओं में से सांख्यिकीय अनुमान उपयोग की दृष्टि से अध्ययन का मुख्य विषय है। इसके अन्तर्गत हमें दो प्रकार की समस्याओं से सम्बन्ध रखना होता है। एक तो समग्र प्राचलों का आगणन और दूसरे समग्र प्राचल या प्राचलों के प्रति परिकल्पना की परीक्षा करनी होती है। अध्याय नौ में परिकल्पना परीक्षा के विषय में पर्याप्त विवरण दिया चुका है। इन विधियों को तब ही परिकल्पना परीक्षा के लिए प्रयोग में लाया जा सकता है जब कि चर का बटन ज्ञात हो। अधिकतर या तो इन सबका उपयोग इस कल्पना पर आधारित है कि प्रतिदर्श का चयन प्रसामान्य समग्र से किया गया है या समग्र का बटन ज्ञात है। किन्तु, प्राय चर का बटन ज्ञात नहीं होता है। ऐसी स्थिति में एक *विधि तो यह है कि चर का ऐसा रूपान्तरण कर दिया जाये कि रूपान्तरित* चर का बटन ज्ञात हो। किन्तु प्राय उचित रूपान्तरण करना कठिन है या कभी-कभी रूपान्तरण करना असम्भव हो जाता है। अत अज्ञात बटन वाले चर पर लिये गये प्रेक्षणों द्वारा प्राचलों के आगणन एवं परिकल्पना-परीक्षा के हेतु अप्राचल प्रविधियाँ अत्यन्त सहायक हैं। अप्राचल विधियों को *बटन मुक्त विधियाँ (Distribution free methods)* भी कहते हैं। प्राचल विधियों का प्रयोग तभी सम्भव है जब कि प्रेक्षण संख्यात्मक हो और इनका बटन ज्ञात हो। इसके विपरीत अप्राचल विधियों का प्रयोग उन प्रेक्षणों के लिए करते हैं जो संख्यात्मक न होकर कोटि (ranks) या क्रम (order) पर आधारित हो।

परिकल्पना, स्वतन्त्रता कोटि, सार्थकता स्तर, दो प्रकार की त्रुटि एवं एक पुच्छ व दो पुच्छ परीक्षा के विषय में विवरण अध्याय नौ में दिया जा चुका है। परीक्षा विधी किसी भी प्रकार की हो पर इन सबका अर्थ व प्रयोग वही रहता है। बटन मुक्त विधियाँ क्रमित प्रेक्षणों या क्रमित सांख्यिकी पर आधारित हैं। क्रमित प्रेक्षणों का अभिप्राय इस प्रकार समझा जा सकता है।

माना कि $X_1, X_2, X_3 ....X_n$ किसी समग्र से चयनकृत प्रतिदर्श में n प्रेक्षण हैं। यदि इन प्रतिदर्श प्रेक्षणों को आरोही या अवरोही क्रम में व्यवस्थित कर दें तो प्रेक्षण क्रमित हो जाते हैं। इस अध्याय में सदैव प्रेक्षणों को आरोही क्रम में ही व्यवस्थित माना गया है अर्थात् सबसे छोटा प्रेक्षण पहले, उसके बाद उससे बड़ा.........और अन्त में सबसे बड़ा प्रेक्षण रक्खा गया है। माना कि इस प्रकार प्राप्त प्रतिदर्श प्रेक्षण $Y_1, Y_2, Y_3 ....Y_n$ हैं। यहाँ Y_1 प्रतिदर्श का सबसे छोटा और Y_n सबसे बड़ा प्रेक्षण है और अन्य प्रेक्षण उसी क्रम में है। गणितीय भाषा में इस प्रकार लिख सकते हैं।

$$Y_1 < Y_2 < Y_3 <...... < Y_n$$

सतत चलन में किन्हीं दो क्रमित प्रेक्षणों के बीच के क्षेत्र का बटन सतत चलन के प्रकार से मुक्त होता है। यह प्रमाणित किया जा सकता है कि औसतन n क्रमित प्रेक्षण किसी भी सतत चलन $f(x)$ के नीचे के क्षेत्र को $(n+1)$ समान भागों में विभाजित कर देते

हैं जिनमे से प्रत्येक भाग का क्षेत्रफल $\frac{1}{n+1}$ होता है। यही तथ्य इस कथन का आधार है। पिछले अध्यायो मे जिन अप्राचल विधियो का वर्णन किया गया है वे हैं काई वर्ग परीक्षा, चतुर्थक, दशमक, शततमक एव कोटि सहसबद्ध आदि। अब इस अध्याय मे अन्य कुछ मुख्य अप्राचल विधियो को दिया गया हैं। इन विधियो का प्रयोग करने से पूर्व यह जानना आवश्यक है कि चर सतत है या असतत हैं।

एक प्रतिदर्श के लिए अप्राचल परीक्षाएँ

यहाँ उन अप्राचल विधियो का वर्णन किया गया है जो कि केवल एक प्रतिदर्श की स्थिति मे लागू होती है इन विधियो द्वारा परिकल्पना की परीक्षा करके यह निर्णय करते हैं कि प्रतिदर्श का चयन किसी विशेष समग्र से किया गया है या नहीं। अन्य शब्दो मे यह कहें कि प्रतिदर्श और समग्र के केन्द्रीय माप समान हैं या नही। इस प्रकार की परीक्षाएँ प्राय आसजन–सौष्ठव सम्बन्धी होती हैं।

कोलमोगोरोव–स्मिरनोव परीक्षा

यदि H_0 पूरे बटन को निदिष्ट करता है तो प्रतिदर्श प्रेक्षणो के आधार पर बटन फलन की इस परिकल्पित बटन फलन से तुलना की जा सकती है। यदि इन दोनो मे बहुत अन्तर हो तो परिकल्पना को अस्वीकार किया जा सकता है। इस सिद्धान्त पर आधारित परीक्षा को कोलमोगोरोव–स्मिरनोव परीक्षा कहते हैं। यह एक समजन सुष्ठुत परीक्षा है। इस परीक्षा के लिए निम्न कल्पनाएँ सत्य होनी चाहिये —

(1) प्रतिदर्श का चयन यादृच्छिक रीति द्वारा किया गया है।

(2) परिकल्पित बटन फलन $F(y)$ सतत है।

(3) प्रेक्षण कम से कम क्रमसूचक मापनी पर लिए गये होना चाहिये।
(obsevaation measured on at least ordinal scale)

इस परीक्षा के अन्तर्गत परिकल्पित एव प्रेक्षित बारम्बारताओ का पृथक 2 सचयी बारम्बारता बटन ज्ञात कर लिया जाता है और उस मान की ओर ध्यान दिया जाता है कि जिस पर विचलन अधिकतम हो। माना कि H_0 के अन्तर्गत परिकल्पित सचयी बटन $F_0(Y)$ है और प्रेक्षित सचयी बटन $F_n(Y)$ है तो अधिकतम विचलन,

$$D = \text{अधिकतम} \mid F_0(Y) - F_n(Y) \mid \qquad (10\,1)$$

सूत्र (10 1) से स्पष्ट है कि अन्तर निर्पेक्ष मान को ही लिया जाता है, इस D के मान और प्रतिदर्श परिमाण n के लिए प्रायिकता सारणी (परि घ–6) द्वारा ज्ञात कर ली जाती है। *यदि यह सम्भाविता पूर्व निर्धारित सार्थकता स्तर α के समान या α से कम* हो तो H_0 को अस्वीकार कर दिया जाता है और अधिक हो तो H_0 को स्वीकार कर लिया जाता है। इस परीक्षा के समय भी एक पुच्छ व दो पुच्छ परीक्षा का ध्यान रखना चाहिए।

उदाहरण 10 1 : एक मॉडल की चार कारो (Cars) को एक ही रग की चार गहराइयों या शेडा (shades) [गहरा, उससे कम गहरा, सामान्य, हल्का] मे रगा गया।

माना कि रंग के इन शेडो को अक्षरों क, ख, ग, घ द्वारा सूचित किया गया है। 12 खरीददारों से कार में रंग के विशेष शेड की पसन्द पूछी गयी। तो उत्पादक यह जानना चाहता है कि खरीददारों की अभिरुचि किसी किसी विशेष शेड में है या नहीं। प्राप्त प्रेक्षण निम्न सारणी में दिये गये हैं —

	कार का शेड			
	क	ख	ग	घ
खरीददारों की संख्या जिनकी एक विशेष शेड में अभिरुचि है	0	1	9	2

H_0 खरीददारों की रंग के शेडो के अनुसार अभिरुचि में कोई अन्तर नहीं है अर्थात् प्रत्येक शेड के लिए खरीददारों की संख्या समान है।

H_1 खरीददारों की रंग के शेडो में एक सी अभिरुचि नहीं है। यहाँ H_0 की परीक्षा के लिए कोलमोगोरोव-स्मिरनोव परीक्षा का प्रयोग करना उपयुक्त है क्योंकि प्रेक्षण क्रमसूचित मापनी पर लिये गये हैं।

परीक्षा के लिये निम्न सारणी के अनुसार संचयी बटन ज्ञात किये —

	कार के शेड			
	क	ख	ग	घ
खरीददारों की संख्या जिनकी एक विशेष शेड में अभिरुचि है।	0	1	9	2
H_0 के अन्तर्गत संचयी बटन, $F_0(Y)$	$\frac{3}{12}$	$\frac{6}{12}$	$\frac{9}{12}$	1
प्रेक्षित संचयी बटन, $F_n(Y)$	$\frac{0}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{10}{12}$	$\frac{12}{12}$
$\lvert F_0(Y)-F_n(Y) \rvert$	$\frac{3}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{12}$	0

$$\text{यहाँ } D = \frac{5}{12} = 0{\cdot}417$$

माना कि पूर्व निर्धारित सार्थकता स्तर $\alpha = {\cdot}05$ है। H_0 के अन्तर्गत $n=10$ व D के परिकलित मान 0·417 के अनुसार सारणी (परि ब-6) द्वारा प्राप्त प्रायिकता

सार्थकता स्तर .05 से कम है। अत परिकल्पना H_0 को अस्वीकार कर दिया जाता है जिसका अभिप्राय है कि खरीददारो की रग के शेडो मे एक सी अभिरुचि नही है।

परम्परा परीक्षा

अधिकाश साख्यिकीय विधियो के प्रयोग करने से पूर्व यह कल्पना की जाती है कि प्रेक्षण एक यादृच्छिक प्रतिदर्श का गठन करते हैं। किन्तु यदि प्रेक्षण समय के अनुसार जैसे प्रात और सायकाल या एक-एक घन्टे पश्चात् या एक के बाद एक, अनुक्रम मे लिये जाय तो यह कल्पना करना कठिन हो जाता है कि ये यादृच्छिक हैं या नही। अत यादृच्छिकता (randomness) के प्रति परीक्षा करना अत्यन्त आवश्यक हो जाता है। इस परीक्षा की विधि इस प्रकार है —पहले प्रतिदर्श प्रेक्षणो के अनुक्रम को किसी निश्चित निकष (criterion) के अनुसार दो वर्गों मे विभाजित कर लिया जाता है जैसे यदि एक प्रेक्षण एक निश्चत मान से कम हो या समान हो तो इसे a से और अधिक हो तो b से निरूपित कर दें तो इस प्रकार अक्षरो a और b मे एक अनुक्रम प्राप्त हो जाता है। जैसे एक सिक्के को अनेको बार लगातार उछालें तो शीर्ष 'H' और सन् 'T' मे एक अनुक्रम प्राप्त हो जाता है। एक सिक्के को 12 बार उछालने पर प्रेक्षण निम्न क्रम मे प्राप्त हुए —

H | TT | HHH | T | HH | T | H | T

उपर्युक्त अनुक्रम मे वे उप-अनुक्रम जिनमे एक ही प्रकार के प्रेक्षण, (अक्षर) हो और जिनसे पूर्व और जिनके पश्चात् या तो दूसरे प्रकार का अक्षर हो या कोई अक्षर न हो तो यह एक परम्परा कहलाता है। यदि चाहे तो इन्हे ऊर्ध्वाधर रेखाओ द्वारा प्रथक् कर सकते हैं जैसा कि ऊपर दिखाया गया है। उपर्युक्त अनुक्रम मे आठ परम्पराएँ हैं। कभी-कभी ऐसा भी देखा गया है कि अनुक्रम मे परम्पराओ की सख्या बहुत कम या बहुत अधिक होती है। यह स्थिति काल के अनुसार चक्रीय परिवर्तनो या उपर्युक्त उदाहरण मे सिक्के के अभिनत होने के कारण उत्पन्न हो सकती है।

जैसे H व T का अनुक्रम निम्न प्रकार है —

HHHHHH | *TTTTTT* या *H* | *T* | *H* | *T* | *H* | *T* | *H* | *T* | *H* | *T* | *H* | *T*

पहली स्थिति मे केवल 2 परम्पराएँ है और दूसरी स्थिति मे 12 परम्पराएँ हैं। इन दोनो ही स्थितियो मे सिक्के की अनभिनतता पर शका होती है। अत परम्परा परीक्षा द्वारा प्रतिदर्श की यादृच्छिकता की परीक्षा करते हैं।

यदि प्रेक्षण सख्यात्मक हो तो अनुक्रम निम्न रूप मे प्राप्त कर सकते हैं। माना कि प्रेक्षण एक निश्चित सख्या (माध्यिका या अन्य कोई सख्या) से कम या समान है तो इसे a से और अधिक होने पर b से निरूपित किया गया है तो जिस क्रम मे प्रेक्षण लिए गये हों उसी क्रम मे उनको a या b से नियमानुसार प्रतिस्थापित करने पर अनुक्रम प्राप्त हो जाता है। इस अनुक्रम मे परम्पराओ की सख्या स्पष्ट होती है। प्राय.

a व b के स्थान पर चिह्नो + व − का भी प्रयोग किया जाता है। किन्ही भी सकेतनो का प्रयोग करें अनुक्रम मे परम्पराओ की सख्या वही रहती है। उदाहरणार्थ

किसी कारखाने द्वारा उत्पादित वस्तु के विशेष लक्षण के हेतु प्रात और सायकाल लिए गये प्रेक्षण निम्न थे —

4 32, 4 18, 4 33, 4 44, 4 34, 4 21, 4 22, 4 24

4 36, 4 23, 4 22, 4 21, 4 37, 4 38, 4 10

इस प्रतिदर्श की माध्यिका 4 24 है। अत 4 24 को निश्चित मान मानने पर निम्न अनुक्रम प्राप्त होता है —

a | b | aaa | bb | aa | bbb | aa | b

इस अनुक्रम मे आठ परम्पराएँ हैं।

परिकल्पना H_0 a और b याद्दच्छिक क्रम मे हैं की, परिकल्पना H_1 : a और b याद्दच्छिक क्रम मे घटित नही होते हैं के विरुद्ध, परीक्षा, परम्परा परीक्षा द्वारा कर सकते है। माना कि प्रतिदर्श परिमाण n है और इसमे एक वर्ग के प्रेक्षणों (a) की संख्या n_1 है और अन्य वर्ग के प्रेक्षणो (b) की संख्या n_2 है जहाँ $n_1+n_2=n$। यदि n लघु है और कुल परम्पराओ की संख्या r है तो α सार्थकता स्तर पर परीक्षा सारणी की सहायता से सुगमता से कर सकते हैं। यदि n_1 व n_2 के मान 20 तक हो तो सारणी (परि घ–9) व (परि घ–9 1) द्वारा याद्दच्छिकता की परीक्षा कर सकते हैं। यह सारणी दो भागों मे विभाजित है। सार्थकता स्तर पर एक भाग तो न्यूनतम और दूसरा भाग अधिकतम सार्थक परम्पराओ की संख्या को बताता है। यदि प्रतिदर्श म परम्परा-संख्या, इन क्रांतिक मानो के बीच मे हो तो H_0 को स्वीकार कर लिया जाता है और यदि परम्परा-संख्या इन क्रान्तिक मानो के समान हो या इनसे बाहर हो तो H_0 को अस्वीकार कर दिया जाता है अर्थात H_1 को स्वीकार कर लिया जाता है।

उदाहरण 10 2 : यदि विवरण मे दिये हुए प्रेक्षणों की याद्दच्छिकता की परीक्षा करनी हो तो निम्न प्रकार कर सकते हैं —

प्रेक्षणो की संख्या $n=15$

अक्षर a की संख्या $=8$, अक्षर b की संख्या $=7$ अर्थात् $n_1=8$, $n_2=7$ और परम्पराओ की संख्या $r=8$, सा स्त $\alpha=05$ पर सारणी (परि घ–9) व (परि घ–9 1) द्वारा प्राप्त क्रांतिक परम्परा-संख्याएँ 4 और 13 हैं। प्रतिदर्श मे परम्पराओ की संख्या 8 है जो कि 4 और 13 के बीच ही मध्य है।

अत H_0 को स्वीकार कर लिया जाता है।

टिप्पणी : यदि H_1 पर आधारित प्रत्याशित परम्परा संख्या बहुत कम (या बहुत अधिक) हो तो एक पुच्छ परीक्षा की जाती है। ऐसी स्थिति में तुलना के हेतु आवश्यकतानुसार सारणी का एक ही मान देखना पर्याप्त होता है और सार्थकता स्तर $\alpha=05$ के स्थान पर $\alpha=025$ रह जाता है।

बृहत् प्रतिदर्श के लिए परम्परा परीक्षा

यदि प्रतिदर्श परिमाण बृहत् हो अर्थात् n_1 या n_2 म से कोई एक या दोनों 20 से बड़े हों तो ऐसी स्थिति मे r के क्रांतिक मान सारणी द्वारा नही प्राप्त किये जा सकते हैं। किन्तु

इस स्थिति मे r का बटन सन्निकट प्रसामान्य हो जाता है जिसका माध्य व प्रसरण क्रमश μ_r व σ_r^2 होता है। जबकि

$$\mu_r = \frac{2n_1n_2}{n_1+n_2}+1 \tag{10 2}$$

$$\text{और } \sigma_r^2 = \frac{2n_1n_2(2n_1n_2-n_1-n_2)}{(n_1+n_2)^2\ (n_1+n_2-1)} \tag{10 3}$$

अत: मानक प्रसामान्य विचर,

$$Z = \frac{r-\mu_r}{\sigma_r} \tag{10 4}$$

प्रतिदर्शज (10 4) मे μ_r व σ_r के मानो का प्रतिस्थापन (10 2) व (10 3) के अनुसार कर दिया जाता है।

यदि परिकालित Z के लिए सारणी (परि. ब–2) द्वारा प्राप्त 0 से Z तक का क्षेत्रफल $\frac{1}{2}$ $(1-\alpha)$ से अधिक हो तो H_0 को स्वीकार कर दिया जाता है अर्थात् प्रेक्षणो मे परम्पराएँ याहच्छिक क्रम मे नहीं घटित होती हैं। इससे विपरीत स्थिति मे H_0 को स्वीकार कर लिया जाता है यदि एक पुच्छ परीक्षा की स्थिति मे O से Z तक के क्षेत्रफल की तुलना $(\frac{1}{2}-\alpha)$ से करते हैं।

उदाहरण 10.3 : दिल्ली के एक बस स्टाप (bus stop) पर पंक्ति मे खड़े स्त्री व पुरुष निम्न प्रकार थे, यहाँ एक स्त्री को F से और पुरुष को M से निरूपित किया गया है .

FF |MMMM| F |MMM| FF |MMM| F |M| FFF |MM| F |MMMM
| F |M| FF | MMM

परिकल्पना H_0, कि स्त्री व पुरुष याहच्छिक क्रम मे खड़े हैं, की परीक्षा निम्न प्रकार कर सकते हैं :

उपर्युक्त उदाहरण मे $n=34,\ n_1=13,\ n_2=21,\ r=16$

n_2, 20 से अधिक है अत यहाँ सूत्र (10.4) का प्रयोग करके Z परीक्षा करना उचित है।

पहले μ_r व σ_r का परिकलन करेंगे।

$$\mu_r = \frac{2\times13\times21}{13+21}+1$$

$$= \frac{546}{34}+1$$

$$= 17{\cdot}058$$

$$\sigma_r^2 = \frac{2 \times 13 \times 21\ (2 \times 13 \times 21 - 13 - 21)}{(13+21)^2\ (13+21-1)}$$

$$= \frac{546(546-34)}{1156 \times 33}$$

$$= \frac{279552}{38148}$$

$$= 7.3281$$

$$\sigma_r = 2.707$$

सूत्र (10.4) के अनुसार

$$Z = \frac{16 - 17.058}{2.707}$$

$$= -\frac{1.058}{2.707}$$

$$= -0.391$$

सारणी द्वारा 0 से .391 तक का क्षेत्रफल 0.1517 है यह क्षेत्र 0.475 से कम है अतः H_0 को स्वीकार कर लिया जाता है । इससे निष्कर्ष निकलता है कि स्त्री और पुरुष बस के लिये पंक्ति में किसी नियम अनुसार न होकर याद्दच्छिक ढंग से खड़े थे ।

दो प्रतिदर्शों के लिये अप्राचल परीक्षाएँ

इस प्रकार की परीक्षाओं की आवश्यकता यह जानने हेतु उत्पन्न होती है कि दो बारम्बारता फलन समरूप है या नहीं । यहाँ परिकल्पना, कि दो भिन्न समयों पर लिये गये प्रतिदर्श एक ही या एक से समग्र में से हैं या नहीं, की परीक्षा करनी होती है ।

कोलमोगोरोव स्मरनोव परीक्षा

यह परीक्षा एक प्रतिदर्श के हेतु दी गयी परीक्षा के जैसी ही है । यदि दो प्रतिदर्श एक से समग्रों में से चयन किये गये हैं तो इनके संचयी बारम्बारता बंटन भी एक से ही होते हैं । यदि इन प्रतिदर्शों के संचयी बारम्बारता बंटन में किसी बिन्दु मान के लिए अन्तर अधिक हो तो समानता के प्रति किसी निराकरणीय परिकल्पना H_0 को अस्वीकार कर दिया जाता है ।

इस परीक्षा के लिये निम्न कल्पनाएँ सत्य होनी चाहिये :

(1) दोनों प्रतिदर्शों का याद्दच्छिक रीति द्वारा चयन किया गया है ;

(2) दोनो प्रतिदर्श परस्पर स्वतन्त्र हैं ?

(3) प्रेक्षण कम से कम क्रमसूचक मापनी पर लिये गये है ?

किसी समस्या के लिये यदि उपर्युक्त कल्पनाएं सत्य हो तो परीक्षा को निम्न प्रकार कर सकते हैं :

माना कि समान परिमाण 'n' के दो स्वतन्त्र प्रतिदर्शों का दो समग्रो से चयन किया गया है और इनके सचयी बटनो मे अधिकतम अन्तर D है जबकि

$$D = \text{अधिकतम } |F_1(y) - F_2(y)| \quad \ldots (10\ 5)$$

जहाँ $F_1(y)$ एक प्रतिदर्श का प्रेक्षित सचयी पग-फलन (cumulative step function) है और $F_2(y)$ दूसरे प्रतिदर्श का सचयी पग-फलन है। माना कि D का अश M_D है । कोलमोगोरोव-स्मिरनोव परीक्षा के लिये दी गयी सारणी (परि० घ–7) (जब $n \leq 40$) द्वारा α सार्थकता स्तर व प्रतिदर्श परिणाम n के तदनुसार M_D का क्रातिक मान ज्ञात कर लिया जाता है। क्रातिक मान देखते समय एक पुच्छ व दो पुच्छ परीक्षा का भी ध्यान रखा जाता है। एक पुच्छ परीक्षा का प्रयोग उस स्थिति मे करते है जब अनुसधानकर्त्ता को अधिकतम अन्तर की दिशा प्रयोग करने से पहले ही पता हो अन्यथा दो पुच्छ परीक्षा का ही प्रयोग करना होता है। यदि परिकलित M_D का मान क्रातिक मान से अधिक या समान हो तो H_0 को अस्वीकार कर दिया जाता है अन्यथा स्वीकार कर लिया जाता है।

यदि $n > 40$ हो तो सारणी (परि० घ–8) का प्रयोग करना होता है। यहाँ α सार्थकता स्तर पर D के क्रांतिक मान प्राप्त होते हैं। यदि परिकलित D का मान α सा० स्त० व $n_1 = n_2 = n$ के लिये सारणीबद्ध D के मान से अधिक या समान हो तो H_0 को अस्वीकार कर दिया जाता है अन्यथा H_0 को स्वीकार कर लिया जाता है।

टिप्पणी : यहाँ दोनो प्रतिदर्शों के परिमाण भिन्न होने की स्थिति की उपेक्षा कर दी गयी है।

उदाहरण 10.4 : 15 प्रशिक्षित और 15 अप्रशिक्षित किसानो के स्वतन्त्र प्रतिदर्शों मे कुछ आधुनिक कृषि प्रचलन पद्धतियो के प्रतिशत अपनाने के अनुसार किसानो की सख्या निम्न सारणी मे दी गयी है। यहाँ यह जानना है कि प्रशिक्षित व अप्रशिक्षित किसानो मे आधुनिक कृषि प्रचलन पद्धतियो को अपनाने का अनुपात समान है या नही ?

H_0 : प्रशिक्षित और अप्रशिक्षित किसानो के अपनाने सम्बन्धी अनुपात मे कोई अन्तर नही है।

H_1 : प्रशिक्षित और अप्रशिक्षित किसानो के अपनाने सम्बन्धी अनुपात मे अन्तर है।

यहाँ प्रेक्षित सचयी पग-बटनो को न्यास के साथ ही निम्न सारणी में दे दिया गया है :

	प्रतिशत अपनाने के वर्ग					
	10–25	25–40	40–55	55–70	70–85	85–100
प्रशिक्षित किसान (प्र०कि०)	0	1	3	3	7	1
अप्रशिक्षित किसान (अप्र०कि०)	3	8	2	1	1	[illegible]
प्र० कि० के लिये प्रेक्षित संचयी बटन $F_1(y)$	$\frac{0}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{14}{15}$	$\frac{15}{15}$
अप्र० कि० के लिये प्रेक्षित संचयी बटन $F_2(y)$	$\frac{3}{15}$	$\frac{11}{15}$	$\frac{13}{15}$	$\frac{14}{15}$	$\frac{15}{15}$	$\frac{15}{15}$
$\lvert F_1(y)-F_2(y) \rvert$	$\frac{3}{15}$	$\frac{10}{15}$	$\frac{9}{15}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{1}{15}$	0

यहाँ $D=\frac{10}{15}$ $M_D=10$ और $n<40$ है। माना कि पूर्व निर्धारित सार्थकता स्तर $\alpha=.05$ है। $\alpha=.05$ व $n=15$ के लिये दो पुच्छ परीक्षा की स्थिति मे सारणी (परि० प–7) द्वारा प्राप्त M_D का क्रांतिक मान 8 है जोकि M_D के परिकलित मान 10 से कम है। अत H_0 अस्वीकृत है जिसका अभिप्राय है कि प्रशिक्षित और अप्रशिक्षित किसानो म आधुनिक कृषि प्रावलन पद्धतियो को अपनाने सम्बन्धी अनुपात समान नहीं है।

चिह्न परीक्षा

माना कि एक द्विचर समग्र विचाराधीन है और इन दो चरो के बटन अज्ञात हैं तो सतत बटन फलनो की समानता के प्रति निराकरणीय परिकल्पना H_0 की चिह्न-परीक्षा कर सकते है अर्थात् इस विधि द्वारा

H_0 $f_1(X)=f_2(X)$ को H_1 $f_1(X)=f_2(X-c)$ के विरुद्ध परीक्षा करते हैं। चिह्न परीक्षा का प्रयोग उन परीक्षणो की स्थिति मे करते हैं जिनमे कि दो समग्रो से समान परिमाण के प्रतिदर्शों का चयन किया गया हो। माना कि प्रतिदर्श म युग्म प्रेक्षण $(X_1\ X_1')$ $(X_2\ X_2')$ $(X_3\ X_3')$ $(X_n\ X_n')$ हैं। यहाँ X_i किसी एक निकष के अन्तर्गत अंक है और X_i' किसी अन्य निकष के अन्तर्गत अंक है। यहाँ चर के विषय मे केवल एक कल्पना की जाती है कि इसका बटन सतत है। इसके अतिरिक्त विभिन्न युग्म प्रेक्षणो के विषय म कोई कल्पना नही करनी होती है।

युग्म प्रेक्षणो के आधार पर H_0 को निम्न प्रकार भी लिख सकते हैं

$$H_0\quad P\,(X_i>X_i')=P\,(X_i<X_i')=\tfrac{1}{2}$$
जबकि $i=1, 2, 3, \ldots n$

या H_0 को इस प्रकार भी कह सकते हैं।

H_0 अन्तरो की माध्यिका शून्य है।

इसका अभिप्राय यह है कि H_0 के अन्तर्गत यह आशा की जाती है कि इन युगल प्रेक्षणों की सख्या जिनमे X_i, X_i' से अधिक है, उन युगल प्रेक्षणो की सख्या के समान होती है जिनमे X_i, X_i' से कम है। यदि युगल प्रेक्षणो मे अन्तर के चिह्न का केवल विचार करें तो अन्तरो को निम्न प्रकार निरूपित कर सकते हैं :—

$$d_i = \begin{cases} 1 & \text{यदि } X_i - X_i' > 0 \\ 0 & \text{यदि } X_i - X_i' < 0 \end{cases}$$

यदि $X_i - X_i' = 0$ हो तो d_i का कोई चिह्न नही माना जाता है और इन युगल प्रेक्षणो को विश्लेषण के समय छोड दिया जाता है। अत जितने युगल प्रेक्षणो मे अन्तर शून्य होता है उतना ही प्रतिदर्श परिमाण कम हो जाता है।

यहाँ सब d_i स्वतन्त्र हैं और इनका योग $r = \sum_i d_i$ है जोकि इस परीक्षा के लिए उन चिह्नो की सख्या से कम हैं। r एक द्विपद चर होगा जिसके लिए n परीक्षण किये गये हैं और प्रत्येक d_i के घटित होने की प्रायिकता $p = \frac{1}{2}$ है। यदि $n < 25$ हो तो द्विपद बटन के लिए सूत्र $\binom{n}{r} p^r q^{n-r}$ का प्रयोग करके घटना $(x \leq r)$ की प्रायिकता ज्ञात करली जाती है, जहाँ x उन चिह्नो की सख्या है जो n से कम है। सुगमता के लिए घटना $(x \leq r)$ की प्रायिकता सारणी (परि० प–10) से सीधे देख सकते हैं। यदि परिकलित प्रायिकता पूर्व निर्धारित सार्थकता स्तर से कम हो तो H_0 को अस्वीकार कर दिया जाता है और इसके विपरीत स्थिति मे H_0 स्वीकृत है।

यदि n बृहद् हो अर्थात् $n > 25$ हो तो प्रसामान्य विचर Z का प्रयोग करके प्रसामान्य परीक्षा करते हैं। इसके लिए सूत्र (9 21) का प्रयोग करना होता है और वही दिये गये नियम के अनुसार H_0 के विषय मे निर्णय कर लिया जाता है।

यदि यह पहले से विदित हो कि किस प्रकार के चिह्नो की सख्या कम होगी तो एक पुच्छ परीक्षा का प्रयोग करना होता है अन्यथा दो पुच्छ परीक्षा करनी होती है। लघु प्रतिदर्श की स्थिति मे दो पुच्छ परीक्षा के लिए प्रायिकता $P(x \leq r)$ को दो से गुणा कर दिया जाता है और इस प्रायिकता का प्रयोग करके H_0 के विषय मे नियमानुसार निर्णय ले लिया जाता है। बृहद् प्रतिदर्श की स्थिति मे एक पुच्छ व दो पुच्छ परीक्षा को अध्याय 9 मे दिया जा चुका है।

उदाहरण 10.5 : कल पुर्जे बनाने की मशीन पर काम करने वाले 16 व्यक्तियो का छुट्टियो से पूर्व के सप्ताह व छुट्टियो के बाद के सप्ताह मे उत्पादित पुर्जो की सख्या निम्न प्रकार थी :—

व्यक्ति संख्या	छुट्टियों से पूर्व के सप्ताह का उत्पादन (पुर्जों की संख्या) X_A	छुट्टियों के बाद के सप्ताह का उत्पादन (पुर्जों की संख्या) X_B	$X_A - X_B$ चिह्न	अन्तर
1	99	107	—	8
2	104	108	—	4
3	102	94	+	8
4	90	88	+	2
5	109	103	+	6
6	106	98	+	8
7	105	100	+	5
8	104	92	+	12
9	94	86	+	8
10	82	78	+	4
11	95	88	+	7
12	103	93	+	10
13	89	80	+	9
14	85	80	+	5
15	91	94	—	3
16	97	96	+	1

परीक्षा करनी है कि छुट्टियों का उत्पादन पर अनुकूल प्रभाव पड़ता है या नहीं ?

H_0 : छुट्टियाँ देने का काम करने वालों की उत्पादन क्षमता पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता है।

H_1 . छुट्टियाँ देने का काम करने वालों की उत्पादन क्षमता पर प्रभाव पड़ता है।

यहाँ युगल प्रेक्षण दिये गये हैं तथा X_A व X_B के बंटन को सतत माना गया है।

अत H_0 को H_1 के विरुद्ध परीक्षा चिह्न परीक्षा द्वारा कर सकते हैं।

उपर्युक्त न्यास के अनुसार,

$$n=16 \text{ और } x=3 \quad (-\text{चिह्नों की संख्या जो कि कम है})$$

यहाँ कम चिह्नों की संख्या के विषय में पहले से कुछ नहीं दिया गया है अत दो पुच्छ परीक्षा करनी होगी। माना कि पूर्व निर्धारित सार्थकता स्तर $\alpha = 01$ है।

$n=16$ व $x=3$ के लिए सारणी (परि० घ–10) द्वारा प्राप्त प्रायिकता $P(x \leq 3)=\cdot 011$ है। दो पुच्छ परीक्षा की स्थिति मे यह प्रायिकता, $2 \times \cdot 011 = \cdot 022$ है जोकि ·01 से अधिक है। अत. H_0 स्वीकृत है जिसका अभिप्राय है कि छुट्टी देने का काम करने वालो की उत्पादन क्षमता पर कोई प्रभाव नही पडता है।

विल्कावसन की चिह्नित-कोटि परीक्षा

पिछले खण्ड मे दी गयी चिह्न-परीक्षा मे केवल युगल प्रेक्षणो मे अन्तर की दिशा का ही प्रयोग किया गया है। चिह्न-परीक्षा मे अन्तर के परिमाण की उपेक्षा कर दी गयी है किन्तु विल्कावसन ने अन्तर के चिह्न एव परिमाण दोनो को ही महत्त्व दिया। विल्कावसन-परीक्षा, चिह्न-परीक्षा की अपेक्षा अधिक शक्ततम है। इस परीक्षा को कार्यान्वित करने की विधि निम्न प्रकार है :—

माना कि किन्ही दो शोधनों या कारकों के आधार पर प्रतिदर्श मे n युगल प्रेक्षण $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), (X_3, Y_3)........., (X_n, Y_n)$ हैं और i युग्म प्रेक्षण मे अन्तर $X_i - Y_i = d_i$ है।

इन अन्तरों को d_i के निरपेक्ष मान के अनुसार आरोही या अवरोही क्रम मे रख दिया जाता है और क्रमित अन्तरो को कोटिकृत कर दिया जाता है। इन कोटियो को वही चिह्न प्रदान कर देते हैं जोकि किसी कोटि के तदनुसार अन्तर का था। जैसे माना कि अन्तर 2, 4, –3, 5 व 7 हैं। तो क्रमित अन्तर 2, 3, 4, 5, 7 हुए और इनकी कोटिय 1, 2, 3, 4, 5 होगी। चिह्न प्रदान करने पर कोटियाँ 1, –2, 3, 4 व 5 होगी। इस प्रकार यह ज्ञात हो जाता है कि कौनसी कोटियाँ धनात्मक अन्तरो द्वारा और कौनसी कोटियाँ ऋणात्मक अन्तरो द्वारा प्राप्त हुई हैं। यदि किसी युगल प्रेक्षण मे अन्तर शून्य हो तो इस युगल प्रेक्षण को विश्लेषण मे सम्मिलित नही किया जाता है और युगलो की संख्या उतनी ही कम मान ली जाती है जितने कि अन्तर शून्य हों।

इसके अतिरिक्त यदि दो या दो से अधिक अन्तरो का परिमाण समान हो तो इन अन्तरो को समान कोटि प्रदान कर दी जाती है और यह कोटि उन सब कोटियो के माध्य के समान होती है जो इन अन्तरो को क्रम मे मानकर प्रदान करनी थी। जैसे यदि अन्तर 4, 5, 6, 6, 8, 9 हो तो इनकी कोटियाँ 1, 2, 3·5, 3·5, 5, 6 होगी।

अन्तरा को कोटिकृत करके चिह्न प्रदान करने के पश्चात्, एक प्रकार के चिह्नों वाली कोटियो का योग अर्थात् + चिह्नों वाली व – चिह्नो वाली कोटियो का योग अलग-अलग ज्ञात कर लिया जाता है। माना कि इनमे से जो योग कम है उसे T द्वारा सूचित किया गया है। अब H_0 की H_1 के विरुद्ध परीक्षा निम्न प्रकार करते हैं। H_0 व H_1 को चिह्न-परीक्षा के साथ दिया जा चुका है।

स्थिति 1 : यदि प्रतिदर्श लघु हो अर्थात् $n \leq 25$ हो तो परिकलित T को, n व सार्थकता स्तर α के अनुसार, सारणी (परि० घ–11) में दिये T के क्रान्तिक मान से तुलना करके H_0 के विषय मे निर्णय कर लिया जाता है। यदि परिकलित T का मान

सारणीबद्ध T के मान से कम या समान हो तो H_0 को अस्वीकार कर दिया जाता है अर्थात् H_1 स्वीकृत है। इसके विपरीत स्थिति में H_0 स्वीकृत है।

यदि अनुसन्धानकर्त्ता को यह पहले से ज्ञात हो कि + चिह्न वाली या – चिह्न वाली कोटियों का योग 'T' कम होगा तो इस स्थिति में एक पुच्छ परीक्षा करनी होती है और एक पुच्छ परीक्षा के लिए दी गयी सारणी (परि० प–11) देखनी होती है।

स्थिति 2 : यदि प्रतिदर्श परिमाण 'n' बृहत् हो अर्थात् $n>25$ हो तो T का बटन सन्निकट प्रसामान्य होता है। अतः H_0 की Z–परीक्षा की जाती है। इस स्थिति में T का माध्य,

$$\mu_T=\frac{n(n+1)}{4} \qquad ....(10\ 6)$$

और प्रसरण,

$$\sigma_T^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{24} \qquad ....(10\ 7)$$

होता है।

प्रसामान्य विचर,

$$Z=\frac{T-\mu_T}{\sigma_T} \qquad ....(10\ 8)$$

N (0, 1) होता है।

परिकलित Z की व सा० स्त० के लिए प्रसामान्य बटन वाली सारणी (परि० प–2) द्वारा प्राप्त Z से तुलना करके H_0 के विषय में नियमानुसार निर्णय कर लिया जाता है।

यहाँ भी एक पुच्छ व दो पुच्छ परीक्षा का ध्यान रखना होता है।

उदाहरण 10 6 : चिह्न परीक्षा के लिए दिये गये उदाहरण (10 5) को ही विल्काक्सन चिह्नित कोटि परीक्षा के हेतु प्रयोग किया गया है।

यहाँ दी गयी सारणी के अन्तिम स्तम्भ में दिये चिह्न सहित

अन्तरों का यहाँ सीधे उपयोग कर लिया गया है।

क्रमित अन्तर : 1, 2, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 7, 8, 8, 8, 8, 9, 10, 12

चिह्नों सहित कोटि : 1, 2, –3, –4 5, 4 5, 6 5, 6 5, 8, 9, 11 5, 11 5, 11 5, –11 5, 14, 15, 16

– चिह्नों वाली कोटियों का योग = 19

+ चिह्नों वाली कोटियों का योग = 117

अतः यहाँ T = 19.

माना कि पूर्व निर्धारित सार्थकता स्तर α = 01 है।

यहाँ यह विदित नहीं था कि किस प्रकार के चिह्नों वाली कोटियों का योग कम होगा अतः दो पुच्छ परीक्षा करना उचित है। साथ ही यहाँ n लघु है।

$\alpha = 01$ व $n=16$ के लिए सारणी (परि० ५-11) द्वारा प्राप्त T का क्रातिक मान 20 है जो कि T के परिकलित मान 19 से अधिक है । अत H_0 अस्वीकृत है । इससे निष्कर्ष निकलता है कि छुट्टी देने का उत्पादन क्षमता पर अनुकूल प्रभाव पडता है ।

टिप्पणी :—यद्यपि चिह्न परीक्षा द्वारा H_0 को स्वीकार किया गया है किन्तु विल्काक्सन चिह्नित कोटि परीक्षा द्वारा H_0, उसी न्यास के लिए, को अस्वीकृत है । इससे विदित होता है कि जिन सूक्ष्म अन्तरो का चिह्न परीक्षा द्वारा अभिज्ञान (detection) नही हो सका उनका विल्काक्सन परीक्षा मे अभिज्ञान हो जाता है । यही कारण है कि विल्काक्सन परीक्षा, चिह्न परीक्षा से अधिक शक्ततम मानी जाती है ।

माध्यिका परीक्षा

चिह्न परीक्षा मे आवश्यक है कि प्रेक्षण युगल होने चाहिये । किन्तु बहुधा इस प्रतिबंध का पालन करना कठिन हो जाता है । अत प्रेक्षण युगल न होने तथा प्रतिदर्श परिमाणा के समान न होने की स्थिति मे परिकल्पना

$$H_0 \quad f_1(X) = f_2(Y) \text{ को } H_1 \quad f_1(X) = f_2(Y-C)$$

के विरुद्ध परीक्षा करने की आवश्यकता होती है । अर्थात् परीक्षा करनी है कि दो स्वतन्त्र समूहो के केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप (माध्यिका) एक दूसरे से भिन्न नही हैं । यह भी कह सकते हैं कि दो समूहो की माध्यिका समान होने की परीक्षा करनी है । इस स्थिति मे H_0 की परीक्षा के लिए माध्यिका परीक्षा उपयुक्त है । यहाँ यह कल्पना अवश्य की गयी है कि $f_1(X)$ और $f_2(X)$ के बारम्बारता फलन सतत हैं । माध्यिका परीक्षा की विधि इस प्रकार है —

माना कि पहले प्रतिदर्श मे प्रेक्षण $X_1, X_2, X_3 \ldots\ldots X_{n_1}$ हैं और दूसरे प्रतिदर्श मे प्रेक्षण $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots .\ Y_{n_2}$ हैं । इन दो प्रतिदर्श प्रेक्षणो को सम्मिलित करके आरोही या अवरोही क्रम मे रख दिया जाता है । माना कि इस प्रकार निम्न अनुक्रम प्राप्त होता है —

$$X_3, X_5, X_4, Y_1, X_1, Y_5 \ldots \ldots$$

इस अनुक्रम की माध्यिका ज्ञात करली जाती है । इसके पश्चात् माध्यिका के दायी ओर X प्राप्ताको (प्रेक्षणो) और Y प्राप्ताको की सख्या ज्ञात कर लेते हैं । माना कि ये सख्याएँ क्रमश r_1 व r_2 हैं । अत माध्यिका के बायी ओर X प्राप्ताको की सख्या (n_1-r_1) ओर Y प्राप्ताको की सख्या (n_2-r_2) होगी । यदि H_0 सत्य है तो माध्यिका के दायी ओर व बायी ओर घटित X व Y प्राप्ताको की सख्या का अनुपात लगभग समान होना चाहिये ।

माध्यिका के दायी ओर X व Y प्राप्ताक

$$\binom{n}{r_1}\binom{n}{r_2}$$

प्रकार से घटित हो सकते हैं । (n_1+n_2) अको मे से (r_1+r_2) अको के

$$\binom{n_1+n_2}{r_1+r_2}$$

संचय (combinations) सम्भव हैं। अतः माध्यिका के दायीं ओर r_1, X अंक और r_2, Y अंक होने की प्रायिकता,

$$P(r_1, r_2)=\frac{\binom{n_1}{r_1}\binom{n_2}{r_2}}{\binom{n_1+n_2}{r_1+r_2}}$$

है। H_0 के अन्तर्गत $r_1=\frac{n_1}{2}$, $r_2=\frac{n_2}{2}$ तथा r_1 और r_2 का प्रतिदर्शी बंटन, अतिगुणोत्तर बंटन होता है। उपर्युक्त अंकों की गणनाओं को निम्न सारणी द्वारा प्रदर्शित कर सकते हैं —

सारणी (10-1)

	प्रतिदर्श 1 (X-प्रेक्षण)	प्रतिदर्श 2 (Y-प्रेक्षण)	योग
माध्यिका के दायीं ओर अंकों की संख्या	r_1	r_2	(r_1+r_2)
माध्यिका के बायीं ओर अंकों की संख्या	(n_1-r_1)	(n_2-r_2)	$(n_1+n_2-r_1-r_2)$
योग	n_1	n_2	n_1+n_2

परिकल्पना H_0 की परीक्षा α सार्थकता स्तर पर फिशर-परीक्षा द्वारा या काई वर्ग परीक्षा द्वारा कर सकते हैं। यदि (n_1+n_2) का मान लघु हो अर्थात् 20 से कम हो तो फिशर Z परीक्षा का प्रयोग करना चाहिये। एक पुच्छ परीक्षा हो तो $P(r_1, r_2)$ का मान α के समान या कम होने की स्थिति में H_0 को अस्वीकार कर लिया जाता है अन्यथा H_0 को स्वीकार कर लिया जाता है। दो पुच्छ परीक्षा की स्थिति में $\alpha/2$ से तुलना करके नियमानुसार H_0 के विषय में निर्णय कर लिया जाता है।

यदि (n_1+n_2) का मान 20 से 40 तक हो और सारणी में किसी भी कोष्ठिका (cell) की बारम्बारता 5 से कम न हो तो (2×2) आसंग सारणी के लिए χ^2-परीक्षा का प्रयोग करते हैं। किसी भी कोष्ठिका की बारम्बारता 5 से कम हो तो सातत्य के लिए शुद्धि का प्रयोग करके χ^2-परीक्षा करते हैं।

यदि (n_1+n_2) का मान वृहत् हो अर्थात् 40 से अधिक हो तो प्रसामान्य परीक्षा का प्रयोग किया जाता है इस स्थिति में $\frac{r_1}{n_1}$ और $\frac{r_2}{n_2}$ को दो प्रतिदर्श अनुपातों के रूप में

माना जाता है जो कि द्विपद समंकों में से हैं। r_1 व r_2 में से जो कम हो उसमें 0.5 जोड़ देने और जो अधिक हो उसमें से 0.5 घटा देने पर इस परीक्षा द्वारा अधिक शुद्ध परिणाम प्राप्त होते हैं। इस परीक्षा के लिए प्रतिदर्शज है —

$$Z=\frac{\frac{r_1}{n_1}-\frac{r_2}{n_2}}{\sqrt{pq\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}} \qquad ....(10.10)$$

जबकि $p=\frac{r_1+r_2}{n_1+n_2}$, और $q=1-p$

Z का परिकलन करके सारणी (परि० प–2) द्वारा O से Z तक का क्षेत्रफल ज्ञात कर लिया जाता है और क्षेत्र को पूर्व निर्धारित α सार्थकता स्तर पर, संख्या $\frac{1}{2}(1-\alpha)$ से तुलना करके H_0 के विषय में नियमानुसार निर्णय कर लिया जाता है। एक पुच्छ परीक्षा की स्थिति में O से Z तक के क्षेत्र को तुलना, संख्या $(\frac{1}{2}-\alpha)$ से करके H_0 के विषय में निर्णय कर लिया जाता है।

उदाहरण 10.7 दो विभिन्न अवसरों पर समान आयु वाले भेंड़ के बच्चों के प्रतिदर्शों का चयन किया गया और एक निर्णयक द्वारा 15 में से निम्न अंक दिये गये :—

भेंड़ के बच्चों की संख्या	अवसर 1 प्राप्तांक (X)	अवसर 2 प्राप्तांक (Y)
1	12	12
2	9	14
3	12	14
4	13	15
5	7	14
6	13	12
7	13	14
8	14	15
9	15	7
10	15	

परिकल्पना H_0 कि दोनों अवसरों पर समूहों के केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप समान हैं अर्थात् $f(X)=f(Y)$ की परीक्षा, माध्यिका परीक्षा द्वारा निम्न प्रकार करते हैं।

दिये हुए अंकों को सम्मिलित करके क्रम में लिख दिया और पहचान के लिए अवसर 2 के अंकों के नीचे रेखा खींच दी गयी है।

$$7\ \underline{7}\ 9\ 12\ 12\ \underline{12}\ \underline{12}\ 13\ 13\ 13\ 14\ \underline{14}\ \underline{14}\ \underline{14}\ \underline{14}$$

$$\downarrow M_d$$

$$15\ 15\ \underline{15}\ \underline{15}$$

इस अनुक्रम में 19 पद हैं अतः दसवां पद, 13 माध्यिका है।

यहाँ $n_1 = 10,\ n_2 = 9$

$r_1 = 3,\ r_2 = 6,$

$\therefore \quad n_1 - r_1 = 7,\ n_2 - r_2 = 3$

$$\therefore \quad P(r_1, r_2) = \frac{\binom{10}{3}\binom{9}{6}}{\binom{19}{9}}$$

$$= \frac{2520}{46189}$$

$$= 0.054$$

$\alpha = .05$ सा० स्त० के प्रायिकता $P(r_1, r_2)$ अधिक है अतः H_0 को अस्वीकार करने का औचित्य नहीं है। इसका अभिप्राय है कि दोनों अवसरों पर समूहों के केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप समान नहीं हैं।

मान-ह्विटनी U परीक्षा

मान-ह्विटनी परीक्षा द्वारा परिकल्पना H_0, कि दो प्रतिदर्श एक ही समष्टि से चयन किये गये हैं, की परीक्षा करनी होती है। सांकेतिक भाषा में,

$H_0: f(X) = f(Y)$ की $H_1: f(X) = f(Y - C)$ के विरुद्ध परीक्षा मान-ह्विटनी U परीक्षा द्वारा कर सकते हैं।

माध्यिका परीक्षा की भाँति माना कि दो प्रतिदर्शों के परिमाण क्रमशः n_1 व n_2 हैं और प्रतिदर्श प्रेक्षण $X_1, X_2, X_3 \ldots X_{n_1}$ व $Y_1, Y_2, Y_3 \ldots\ldots Y_{n_2}$ हैं। दोनों प्रतिदर्शों के प्रेक्षणों को सम्मिलित करके कोटि के अनुसार अनुक्रम में रख दिया जाता है।

माना कि अनुक्रम,

$$X_2\ X_3\ X_1\ Y_2\ X_1\ Y_3 \ldots \ldots$$

है। इस अनुक्रम से X या Y में से किसी एक की कोटि ज्ञात कर लेते हैं। माना कि Y की कोटियाँ ज्ञात की हैं। और इनका योग S_2 है तो

$$U = n_1 n_2 + \frac{n_2(n_2+1)}{2} - S_2 \qquad \ldots(10.11)$$

X की कोटियाँ ज्ञात करने की स्थिति में,

$$U = n_1 n_2 + \frac{n_1 (n_1+1)}{2} - S_1 \qquad ....(10\ 12)$$

जबकि X की कोटियों का योग S_1 है।

यदि प्रतिदर्श परिमाण अति लघु हो अर्थात् n_1 और n_2 के मान 8 या 8 से कम हों तो परिकलित U के मानों के लिए दी गयी सारणी (परि० प–12) द्वारा प्रायिकता ज्ञात करके H_0 की स्वीकृति या अस्वीकृति के विषय में निर्णय कर लिया जाता है। n_2 के विभिन्न मानों के लिए, n_1 और U के मानों से सम्बद्ध प्रायिकता अलग अलग सारणियों में दी गयी है। यदि यह प्रायिकता, पूर्व निर्धारित सार्थकता स्तर α के समान या इससे अधिक हो तो H_0 को अस्वीकार कर दिया जाता है अन्यथा H_0 को स्वीकार कर लिया जाता है।

यदि U के इस मान के लिए सारणी में प्रायिकता न दी गयी हो तो अन्य वर्ग के लिए U' का परिकलन कर लेना चाहिये। U और U' में निम्न सम्बन्ध होता है

$$U' = n_1 n_2 - U$$

$$\text{और } P(U' > U) = P(U < n_1 n_2 - U)$$

अब U' के मान के लिए सारणी द्वारा प्रायिकता ज्ञात करके H_0 के विषय में पूर्व की भाँति निर्णय कर लिया जाता है।

जब n_2 का मान 9 से 20 तक हो और $n_1 < 20$ हो तो सारणी (परि० प–12 1) द्वारा n_1 व n_2 के निश्चित मान के लिए U के क्रांतिक मान ज्ञात कर लिये जाते हैं। ये सारणियाँ प्रत्येक सार्थकता स्तर α के लिए अलग अलग से एक पुच्छ परीक्षा की स्थिति में दी गयी हैं। यदि दो पुच्छ परीक्षा करनी हो तो इन्हीं सारणियों का α के स्थान पर 2α सा० स्त० लेकर प्रयोग कर सकते हैं अर्थात् 2α सा० स्त० पर U के क्रांतिक मान ज्ञात हो जाते हैं। यदि परिकलित U का मान सारणीबद्ध U के मान के समान हो या कम हो तो *α सा० स्त० पर H_0 को अस्वीकार कर दिया जाता है अन्यथा H_0 को स्वीकार कर लिया जाता है।*

यदि n_1 व n_2 के मान वृहत् हो अर्थात् ऊपर दिये हुए मानों से अधिक हों तो प्रसामान्य परीक्षा का प्रयोग करके H_0 की H_1 के विरुद्ध परीक्षा करते हैं। यदि n_1 व n_2 दोनों के मान 8 से अधिक हों तो उस स्थिति में भी प्रसामान्य परीक्षा का प्रयोग कर सकते हैं जब निराकरणीय परिकल्पना सत्य हो तो U का बटन प्रसामान्य होता है। जिसका माध्य व प्रसरण निम्न प्रकार है —

$$E(U) = \frac{n_1 n_2}{2} \qquad ....(10\ 13)$$

$$\sigma_u^2 = \frac{n_1 n_2 (n_1+n_2+1)}{12} \qquad ....(10\ 14)$$

प्रतिदर्शज,

$$Z=\frac{U-E(U)}{\sigma_u} \qquad \text{....(10.15)}$$

या

$$Z=\frac{U-\frac{n_1 n_2}{2}}{\sqrt{n_1 n_2 (n_1+n_2+1)/12}} \qquad \text{....(10.15.1)}$$

Z के इस मान के लिऐ सारणी (परि० ब–2) द्वारा O से Z तक का क्षेत्र ज्ञात कर लिया जाता है और माध्यिका परीक्षा की भाँति दिये हुए नियमानुसार H_0 के विषय में निर्णय कर लिया जाता है। इस परीक्षा में भी एक पुच्छ व दो पुच्छ परीक्षा का ध्यान रखना आवश्यक है।

उदाहरण 10.8 : माध्यिका परीक्षा के लिए दिये गये उदाहरण (10.7) के ध्यान के लिए परिकल्पना H_0 कि दोना अवसरों पर भेडों के बच्चो का चयन एक ही समग्र से किया गया है, की परीक्षा मानव्हिटनी परीक्षा द्वारा निम्न प्रकार कर सकते हैं —

क्रमित अंको और उनकी कोटियाँ निम्न प्रकार होंगी —

7	<u>7</u>	9	12	12	<u>12</u>	<u>12</u>	13	13	13	14	<u>14</u>
	(1.5)				(5.5)	(5.5)					(13)

<u>14</u>	<u>14</u>	<u>14</u>	15	15	<u>15</u>	<u>15</u>
(13)	(13)	(13)			(17.5)	(17.5)

उपर्युक्त अनुक्रम में समान मान वाले अंक ओं अवसर 1 के हैं पहले लिखे गये हैं और अवसर 2 के अंक बाद में दिये गये हैं। इस अनुक्रम में Y अंको की कोटियाँ इनके नीचे कोष्ठकों में दी गयी है। इन कोटियों को ज्ञात करने में समान मान वाले प्रेक्षणों की कोटियों के माध्य को उन अंको की कोटि के रूप में रखा जाता है।

Y की कोटियों का योग = 106

सूत्र (10.11) के अनुसार

$$U=10\times 9+\frac{9(9+1)}{2}-106$$

$$=29$$

यहाँ $n_2=9$ और $n_1=10$ है, मान-व्हिटनी परीक्षा के लिए दी गयी सारणी द्वारा $\alpha=.05$ सार्थकता स्तर पर U का क्रांतिक मान 24 है। यह एक दो पुच्छ परीक्षा है अत: $\alpha=.10$ सार्थकता स्तर के लिए U का क्रांतिक मान देखा गया है।

परिकलित U का मान सारणीबद्ध U के मान से अधिक है अत H_0 स्वीकृत है।

प्रश्नावली

1. अप्राचल विधियों के महत्व एवं लाभ बताइये।

2. *"काई वर्ग परीक्षा अप्राचल विधियों में से एक है" इस कथन की पुष्टि कीजिये।*

3. युवक क्लब के सदस्यों में से 170 सदस्यों के एक प्रतिदर्श का चयन किया गया। इन चयनकृत सदस्यों से पशुओं की उन्नति के हेतु टीका लगाने में अभिरुचि के विषय में पूछताछ की गई। इन सदस्यों में से केवल 136 ने अभिरुचि दिखायी। सामान्यतया ऐसा समझा जाता है कि आधे सदस्यों की पशुओं के टीका लगाने में अभिरुचि है। परीक्षा कीजिये कि यह प्रतिदर्श कहे हुए समग्र से लिया गया है ?

4. एक नाइजीरियन (Nigerian) स्कूल के 100 विद्यार्थियों की शिक्षा स्तर के अनुसार नियोजन स्थिति सम्बन्धी आँकड़े निम्न सारणी में दिये गये हैं :—

	नियोजन स्थिति	
शिक्षा स्तर	नियोजित	अनियोजित
प्राथमिक	36	14
माध्यमिक	24	26

परीक्षा कीजिये कि माध्यमिक स्तर में विद्यार्थियों में नियोजित व अनियोजित विद्यार्थियों की संख्या समान है ?

5 एक व्यवसायी यह जानना चाहता है कि वेतन वृद्धि करने से कर्मचारियों की उत्पादन क्षमता पर क्या प्रभाव पड़ता है ? इस हेतु एक फैक्ट्री के कर्मचारियों के वेतनों में समान वृद्धि की गयी। यदि वेतन वृद्धि से पूर्व एक कर्मचारी का प्रतिदिन उत्पादन X (किन्हीं इकाइयों में) है और वेतन वृद्धि के बाद प्रतिदिन उत्पादन Y है तो 18 कर्मचारियों के एक प्रतिदर्श द्वारा निम्न न्यास प्राप्त हुआ :—

X · 91, 75, 70, 64, 63, 86, 66, 72, 84, 92, 85, 88, 79, 68, 80, 84. 68, 73.

Y : 88, 77, 67, 69, 66, 81, 67, 74, 85, 94, 83, 90, 84, 72, 77, 86, 70, 78.

इस न्यास के आधार पर परिकल्पना,

H_0 : *वेतन वृद्धि से कर्मचारियों के प्रतिदिन उत्पादन पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता है,* की H_1 के विरुद्ध $\alpha = \cdot 05$ सा. स्त. पर (i) चिह्न परीक्षा (ii) विल्काक्सन चिह्नित कोटि परीक्षा कीजिये। जबकि,

(क) H_1 : कर्मचारियों का वेतन वृद्धि के बाद का प्रतिदिन उत्पादन, वेतन वृद्धि से पूर्व के प्रतिदिन उत्पादन से अधिक है।

(ख) H_2 : कर्मचारियों की वेतन वृद्धि से पूर्व एवं पश्चात् की उत्पादन दरें भिन्न हैं।

6 एक सिक्के को 15 बार उछालने पर शीर्ष 'H' व पट् 'T' की ओर सिक्का गिरने का अनुक्रम निम्न प्रकार था —

H H T T H H T T T T H T H H T

उपर्युक्त अनुक्रम के द्वारा सिक्के के अनभिनत होने की परम्परा परीक्षा कीजिये।

7 दो अनुसंधान कर्ताओं ने गन्ने के दो खेतों में पौधों का अलग अलग प्रतिदर्श लेकर प्रति पौधा कीटों की संख्या ज्ञात की जो निम्न प्रकार थी —

प्रति पौधे पर कीटों की संख्या

अनुसंधानकर्ता 1: 12, 5, 0, 7, 11, 9, 3, 4, 2, 8

अनुसंधानकर्ता 2 9, 1, 6, 4, 5, 7, 3, 2

परिकल्पना H_0 कि दोनों अनुसंधानकर्ताओं ने एक से समग्रों से प्रतिदर्शों का चयन किया है, की परीक्षा

(i) माध्यिका परीक्षा द्वारा (ii) मान ह्विटनी U परीक्षा द्वारा कीजिये।



11 आकलन सिद्धान्त और अधिकतम संभाविता अनुपात परीक्षा

अधिकांश परीक्षणों में प्राचलों का आकलन करने की आवश्यकता होती है जैसे यह ज्ञात करना कि प्रति व्यक्ति कितने खाद्य पदार्थ की आवश्यकता होती है। प्रति व्यक्ति आय का पता लगाना हो या किसी खाद का उपज पर प्रभाव आदि जानने के लिए प्राचलों का आकलन करना होता है। इन सभी अध्ययनों में कुछ व्यक्तियों या प्रयोगगत एककों द्वारा प्राप्त सूचना के आधार पर परिणाम निकाले जाते हैं। आकलन प्राय. किसी बिन्दु या अन्तराल का किया जाता है. बिन्दु आकलन को निम्न रूप में समझ सकते हैं।

माना कि $f(X, \theta_1, \theta_2, \theta_3 \dots \dots \theta_m)$ एक समग्र का घनत्व फलन है जिसमें X एक चर है और $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots \dots \theta_m$, m प्राचल हैं। इस समग्र में से एक n परिमाण के प्रतिदर्श का चयन किया गया है और प्रतिदर्श प्रेक्षण $X_1, X_2, X_3 \dots \dots X_n$ हैं। मांना कि इन प्रेक्षणों द्वारा प्राप्त $\theta_1, \theta_2, \dots \dots \theta_m$ के आकलन (estimates) क्रमश. $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2 \dots \hat{\theta}_m$ ज्ञात करने हैं जो कि प्रतिदर्श प्रेक्षणों के फलन हैं। इन फलनों को आकलक कहते हैं।

अत. इन्हें $\hat{\theta}_1(X_1, X_2, X_3 \dots \dots X_n)$, $\hat{\theta}_2(X_1, X_2, X_3 \dots \dots X_n)$, $\hat{\theta}_m(X_1, X_2, X_3 \dots \dots X_n)$ द्वारा निरूपित कर सकते हैं। जैसे समान्तर माध्य μ का आकलित मान,

$$\overline{X} = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \dots \dots + X_n) = \frac{1}{n} \sum_{1}^{n} X_i \qquad (11\ 1)$$

अत. बिन्दु आकलन में कुछ निर्धारित विधियों द्वारा एक संख्या $\hat{\theta}$ ज्ञात करनी है जो कि प्राचल θ के आकलित मान के रूप में स्वीकृत की जा सकती है।

किसी बटन के प्रत्येक आघूर्ण को प्राचल ही मानते हैं तथापि यह सब आघूर्ण बटन फलन में नहीं लिखे जाते हैं। प्राय बटन फलन में केवल पहला व दूसरा आघूर्ण, इस बटन के माध्य व प्रसरण के रूप में या कोई अन्य प्राचल ही विद्यमान होता है। माध्य के परित दूसरे आघूर्ण (प्रसरण σ^2) के आकलन s^2 के लिए सूत्र (4 7) अध्याय 4 में दिया जा चुका है। प्रतिदर्श प्रेक्षणों $X_1, X_2, X_3 \dots \dots, X_n$ द्वारा माध्य $(\overline{X})$ के परित k वां प्रतिदर्श आघूर्ण m_k निम्न सूत्र द्वारा ज्ञात कर सकते हैं :—

$$m_k = \frac{1}{n} \sum_{1}^{n} (X_i - \overline{X})^k \qquad (11\ 2)$$

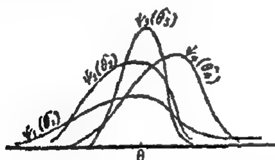
जहां $k = 1, 2, 3, \dots \dots$

समग्र $f(x, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \ldots \theta_m)$ से समान परिमाण के अनेकों सुस्पष्ट (distinct) यादृच्छिक प्रतिदर्शों का चयन करें तो प्रत्येक प्रतिदर्श द्वारा एक भिन्न आकलन प्राप्त होता है। प्रायिकता फलन $f(x, \underline{\theta})$ में $\underline{\theta}$, m प्राचलों के एक सदिश (vector), $(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \ldots, \theta_m)$ को निरूपित करता है। यह मान लिया गया है कि सदिश $\underline{\theta}$ के एक घटक θ_i (जहाँ $i = 1, 2, 3, \ldots, m$) के लिए एक अच्छा आकलक वह है जिससे कि अधिकांश प्रतिदर्शों द्वारा आकलित मान, प्राचल θ_i के निकट हो।

उत्तम आकलकों के गुण

माना कि समग्र $f(x,\theta)$ से n परिमाण के एक यादृच्छिक प्रतिदर्श का चयन किया गया है और इस प्रतिदर्श के प्रेक्षणों का प्रयोग करके किसी प्राचल θ का आकलन विभिन्न विधियों द्वारा किया गया है और माना कि किन्हीं चार विधियों द्वारा प्राप्त आकलक $\hat{\theta}_1$, $\hat{\theta}_2$, $\hat{\theta}_3$, व $\hat{\theta}_4$ हैं तो इनमें से वही आकलक अच्छा माना जायेगा जिसका कि बटन प्राचल θ पर अधिक संकेन्द्रित (concentrated) हो। यहाँ बटन के θ पर अधिक संकेन्द्रित होने से अभिप्राय है कि प्रायिकता वक्र का θ से त्रुटि वर्ग माध्य (mean square error) न्यूनतम हो।—

माना कि आकलकों $\hat{\theta}_1$, $\hat{\theta}_2$, $\hat{\theta}_3$, व $\hat{\theta}_4$ के घनत्व फलन क्रमशः $\psi_1(\hat{\theta}_1)$, $\psi_2(\hat{\theta}_2)$, $\psi_3(\hat{\theta}_3)$, और $\psi_4(\hat{\theta}_4)$ हैं जिनका ज्यामितीय रूप चित्र (11.1) के अनुसार है।



चित्र (11.1) आकलकों के बटन वक्रों की सहायता से गुणाकलन का दर्शन।

उपर्युक्त चित्र से स्पष्ट कि $\hat{\theta}_3$, आकलकों $\hat{\theta}_1$, $\hat{\theta}_2$, व $\hat{\theta}_4$ की अपेक्षा गुणात्मक है क्योंकि उसके बटन का θ पर सर्वाधिक संकेन्द्रीकरण है।

संगति

यदि n प्रेक्षणों पर आधारित आकलक को $\hat{\theta}_n$ से सूचित करें और $\hat{\theta}_n$ प्रायिकता की भावना में प्राचल θ की ओर अभिमुख हो तो $\hat{\theta}_n$ का θ का संगत आकलक (Consistent estimator) कहते हैं अर्थात्

यदि $\epsilon > 0$ कोई संख्या हो तो,

$$\lim_{n \to \infty} P \{ |\hat{\theta}_n - \theta| < \epsilon \} = 1 \qquad (11{\cdot}3)$$

सम्बन्ध (11·3) से स्पष्ट है कि जैसे-जैसे प्रतिदर्श परिमाण n अनन्त की ओर प्रवृत्त होता जाता है, $\hat{\theta}_n$ और θ मे अन्तर सूक्ष्मतम होता जाता है। इससे निष्कर्ष निकलता है कि जैसे-जैसे प्रतिदर्श परिमाण बृहद् होता जाता है, उतना ही आकलक अधिक यथार्थ होता जाता है।

अनभिनतता

एक आकलक $\hat{\theta}_n$, θ का अनभिनत आकलक है यदि $E(\hat{\theta}_n) = \theta$ हो जबकि अक्षर E गणितीय प्रत्याशा को निरूपित करता है। यदि θ के यथा सम्भव आकलक ज्ञात कर लिये जायें तो उनका माध्य प्राचल θ के समान होता है।

उदाहरणतया माना कि एक प्रसामान्य समग्र $N(\mu, \sigma^2)$ से n परिमाण के प्रतिदर्श का चयन किया गया है। तो हम जानते हैं कि σ^2 का अधिकतम सभाविता आकलक (आगामी खण्ड मे दिया गया है) $\sum_i (X_i - \bar{X})^2/n$ होता है जिसका कि प्रत्याशित मान $\frac{(n-1)\,\sigma^2}{n}$ है। किन्तु आकलक को $\sum_i (X_i - \bar{X})^2/_{n-1}$ लेने पर यह अभिनति समाप्त हो जाती है अर्थात् $\sum_i (X_i - \bar{X})^2/_{n-1}$ का प्रत्याशित मान σ^2 होता है। n बृहद् होने की स्थिति मे इस प्रकार की शुद्धि आवश्यक नहीं है।

टिप्पणी : एक संगत आकलक (सीमा मे) अनभिनत होता है किन्तु, एक अनभिनत आकलक का सगत होना आवश्यक नहीं है।

उदाहरण 11·1 : एक 5 एकको वाले समग्र से 3 एकको का बिना प्रतिस्थापन के सरल यादृच्छिक रीति द्वारा प्रतिचयन किया गया है। यदि इन 5 एककों पर मान, 1250, 1500, 1650, 2200, 2050 रुपये, कम्पनियो के लाभो को निरूपित करते हैं तो समस्त सम्भव प्रतिदर्शों की परिगणना करके निम्न प्रकार सिद्ध कर सकते हैं कि प्रतिदर्श माध्य, समग्र माध्य का अनभिनत आकलक है।

समग्र माध्य

$$= \frac{1}{5}(1250 + 1500 + 1650 + 2200 + 2050)$$

$$= \frac{1}{5}(8660)$$

$$= 1730$$

एककों के समस्त सम्भव प्रतिदर्श, तथा उनके माध्य निम्न प्रकार होंगे ।

सम्भव प्रतिदर्श			प्रतिदर्श माध्य
1250	1500	1650	4400/3
1250	1500	2200	1650
1250	1500	2050	1600
1500	1650	2200	5350/3
1500	1650	2050	5200/3
1650	2200	2050	5900/3
1250	1650	2200	1700
1250	1650	2050	1650
1250	2200	2050	5500/3
1500	2200	2050	5750/3

इन प्रतिदर्श माध्यों का माध्य $= \frac{17300}{10}$

$= 1730$ रु०

स्पष्ट है कि समस्त सम्भव प्रतिदर्शों के माध्यों का माध्य समग्र माध्य के समान है ।

पर्याप्त आकलक

एक आकलक पर्याप्त कहलाता है यदि आकलक प्रतिदर्श में विद्यमान प्राचल सम्बन्धी पूर्ण सूचना रखता हो । पर्याप्त आकलक को अधिक स्पष्ट रूप में इस प्रकार समझ सकते हैं । माना कि एक प्रतिदर्श में n प्रेक्षण $X_1, X_2, X_3 \ldots\ldots X_n$ हैं जिनका चयन समग्र $f(x, \theta)$ से किया गया है । $\hat{\theta}$, प्राचल θ का आकलन है जो कि प्रेक्षणों $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$ पर आधारित है । यदि $\hat{\theta}$ के दिये होने पर $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$ का प्रतिबंधी बंटन θ पर निर्भर हो तो $\hat{\theta}$ एक पर्याप्त आकलक कहलाता है ।

गणितीय भाषा में,

$$\prod_{i=1}^{n} f(X_i, \theta) = \phi(X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n \mid \hat{\theta})\ \psi(\hat{\theta}, \theta) \qquad (11 \cdot 4)$$

यहाँ यह बात ध्यान देने योग्य है कि फलन ϕ प्राचल θ से मुक्त है अर्थात् यह केवल $\hat{\theta}$, का ही फलन है । अतः $\hat{\theta}$, θ का पर्याप्त आकलक है । पर्याप्त आकलक का प्राप्त

करना सदैव रुचिकर है क्योंकि इस आकलक में, प्राचल θ के विषय में प्रतिदर्श में विद्यमान सम्पूर्ण सूचना का उपयोग हो जाता है। किन्तु एक प्रतिदर्शज को केवल पर्याप्तता (sufficiency) ही पूर्ण परिशुद्धि से परिभाषित नहीं करती, अपितु कुछ अन्य गुण भी आवश्यक हैं। साथ ही यह भी विदित है कि पर्याप्त आकलक का बहुत कम स्थितियों में अस्तित्व होता है।

दो आकलकों की आपेक्षिक दक्षता

माना कि $\hat{\theta}_1$ और $\hat{\theta}_2$ दो आकलक हैं जो कि समग्र $f(x, \theta)$ में से दो समान परिमाण n के चयनकृत प्रतिदर्शों द्वारा प्राप्त होते हैं तो $E(\hat{\theta}_1-\theta)^2$ और $E(\hat{\theta}_2-\theta)^2$ के अनुपात $\dfrac{E(\hat{\theta}_1-\theta)^2}{E(\hat{\theta}_2-\theta)^2}$ को $\hat{\theta}_1$ की अपेक्षा $\hat{\theta}_2$ की दक्षता कहते हैं। यहाँ E, प्रत्याशित मान को निरूपित करता है। प्राय यह दक्षता प्रतिशत में दी जाती है। यदि यह प्रतिशत 100 प्रतिशत से अधिक हो तो $\hat{\theta}_2$ को $\hat{\theta}_1$ से उत्तम आकलक कहते हैं।

यदि $E(\hat{\theta}_1)=\theta$ और $E(\hat{\theta}_2)=\theta$ हो तो $E(\hat{\theta}_1-\theta)^2$ और $E(\hat{\theta}_2-\theta)^2$ क्रमश $\hat{\theta}_1$ और $\hat{\theta}_2$ के प्रसरण निरूपित करते हैं। किसी आकलक $\hat{\theta}$ की दक्षता $1/V(\hat{\theta})$ के समान होती है।

आकलक $\hat{\theta}$ दक्ष कहलाता है यदि इसके लिए निम्न दो प्रतिबन्ध सत्य हो।

(1) यदि $\hat{\theta}$, n प्रतिदर्श प्रेक्षणो पर आधारित है तो $\sqrt{n}\,(\hat{\theta}-\theta)$ का बटन अनन्तस्पर्शत प्रसामान्य है जिसका माध्य 0 और प्रसरण σ^2 के समान है।

(2) $\hat{\theta}$ का प्रसरण किसी भी अन्य आकलक $\hat{\theta}'$ के प्रसरण से कम हो जबकि $\hat{\theta}'$ भी प्रतिबन्ध (1) को सन्तुष्ट करता है। गणितीय रूप में,

$$V(\hat{\theta}) < V(\hat{\theta}') \qquad ....(11\ 5)$$

या
$$E\{\hat{\theta}-E(\hat{\theta})\}^2 < E\{\hat{\theta}'-E(\hat{\theta}')\}^2 \qquad ....(11\ 5\ 1)$$

बिन्दु आकलन की अधिकतम सम्भाविता विधि

पिछले खण्ड में दिये हुए गुण जिस आकलक में विद्यमान हो उसे अनुकूलतम या सर्वोत्तम आकलक कहते हैं। यह आकलक अनेक विधियों द्वारा ज्ञात किया जा सकता है पर इनमे से मुख्य विधि *अधिकतम सम्भाविता विधि* है जिसका कि वर्णन यहाँ किया गया है। अधिकतम सम्भाविता प्रतिदर्शज सर्वोत्तम अनन्तस्पर्शत. प्रसामान्य वर्ग का एक उपवर्ग है। इस विधि को सर्व प्रथम आर० ए० फिशर ने सन् 1912 में संक्षिप्त रूप में दिया जिसको कुछ समय पश्चात् स्वयं उन्होंने ही उन्नत रूप में प्रस्तुत किया। *यह विधि इस प्रकार है :—*

माना कि एक सतत बटन वाले समग्र से चयन किये गये n परिमाण के प्रतिदर्श के सम्भाविता फलन, L, को निम्न रूप मे निरूपित किया गया है —

$$L(X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n, \theta) = f(X_1, \theta)\, f(X_2, \theta)\, f(X_3, \theta) \ldots f(X_n, \theta) \quad \ldots(11.6)$$

और यदि समग्र का बटन असतत हो, तो

$$L(X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n, \theta) = p_{i1}(\theta)\ \ p_{i2}(\theta) \ldots p_{in}(\theta) \quad \ldots(11.7)$$

इन प्रायिकता फलनो मे केवल एक ही प्राचल θ है। अब अधिकतम सम्भाविता विधि द्वारा प्राचल θ के एक ऐसे आकलक का परिकलन करना है जो फलन L को अधिकतम कर देता है। यह विदित है कि यदि L, θ के किसी मान के लिए वृहद् हो तो log L भी उतना ही बड़ा होता है। अत सम्भाविता फलन के लघुगणक, log L का θ के सम्बन्ध में (with respect to) आंशिक अवकलन करके शून्य के समान रख देते हैं और इस समीकरण को हल करके θ का सर्वोत्तम आकलक ज्ञात हो जाता है। गणितीय रूप मे,

$$\frac{\partial\ (\log L)}{\partial \theta} = 0 \quad \ldots(11.8)$$

इस समीकरण का कोई भी मूल, θ का अधिकतम सम्भाविता आकलक होता है, इस विधि की विशेषता निम्न दो साध्यो (propositions) से स्पष्ट हो जायेगी।

साध्य 1 : यदि θ के एक दक्ष आकलक $\hat{\theta}$ का अस्तित्व है तो सम्भाविता समीकरण (11.8) का कोई भी हल केवल $\hat{\theta}$ का फलन होगा।

साध्य 2 : यदि θ के एक पर्याप्त आकलक $\hat{\theta}$ का अस्तित्व है तो सम्भाविता समीकरण (11.8) का कोई भी हल केवल $\hat{\theta}$ का फलन होगा।

अत. फलन (11.6) के लिए,

$$\frac{\partial\ (\log L)}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta}\left\{\sum_{i=1}^{n} \log f(X_i, \theta)\right\} = K(\theta)\ \ \phi(\hat{\theta}-\theta) = 0 \quad \ldots(11.8.1)$$

जबकि K एक संख्या है जो कि प्रतिदर्श प्रेक्षणो से मुक्त है किन्तु यह θ पर निर्भर हो सकती है। समीकरण (11.8.1) का अद्वितीय हल $\theta = \phi(\hat{\theta})$ है।

उपर्युक्त परिभाषाओ एव साध्यो को एक से अधिक प्राचलो के लिए व्यापक बनाया जा सकता है। माना कि एक सतत बटन, जिसमे दो प्राचल θ_1 व θ_2 हैं, के लिए सम्भाविता फलन, L, निम्न है —

$$L(X_1, X_2, X_3, \ldots X_n, \theta_1, \theta_2) = f(X_1, \theta_1, \theta_2)\ f(X_2, \theta_1, \theta_2) \ldots, f(X_n, \theta_1, \theta_2) \quad \ldots(11.9)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} f(X_i, \theta_1, \theta_2)$$

पहले की भाँति θ_1 व θ_2 के अधिकतम प्रायिकता फलन L का θ_1 व θ_2 के सम्बन्ध मे आंशिक अवकलन करके शून्य के समान रख देने पर प्राप्त युगपत समीकरणो को हल करके, θ_1, θ_2 के आकलन प्राप्त हो जाते हैं। इस प्रकार दो समीकरण हैं :—

$$\frac{\partial (\log L)}{\partial \theta_1} = 0 \qquad \text{....(11.10)}$$

और

$$\frac{\partial (\log L)}{\partial \theta_2} = 0 \qquad \text{....(11.11)}$$

इसी प्रकार m प्राचलो के अधिकतम प्रायिकता फलन L का विभिन्न प्राचलो के सम्बन्ध मे आंशिक अवकलन करके शून्य के समान रखने पर प्राप्त m युगपत समीकरणो को हल करके, प्राचलो के आकलक ज्ञात किये जा सकते हैं।

उदाहरण 11 2 : एक प्रसामान्य बटन, जिसके अज्ञात प्राचल μ और σ^2 हैं, मे से एक n परिमाण के यादृच्छिक प्रतिदर्श का चयन किया गया है तो इन प्रतिदर्श प्रेक्षणों द्वारा प्राचलो μ और σ^2 के अधिकतम सभाविता आकलक निम्न प्रकार ज्ञात कर सकते हैं। फलन,

$$L(X_1, X_2, \ldots, X_n, \mu, \sigma^2) = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n \prod_{i=1}^{n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(X_i-\mu)^2}$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n/2}\left(\frac{1}{\sigma^2}\right)^{n/2} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_i (X_i-\mu)^2}$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n/2}\left(\frac{1}{\sigma^2}\right)^{n/2} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_i \{(X_i-\overline{X})+(\overline{X}-\mu)\}^2}$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n/2}\left(\frac{1}{\sigma^2}\right)^{n/2} e^{-\frac{n}{2\sigma^2}\{s^2+(\overline{X}-\mu)^2\}}$$

जबकि $s^2 = \frac{1}{n}\sum (X_i - \overline{X})^2$

फलन log L का μ व σ^2 के सम्बन्ध में आंशिक अवकलन करके शून्य के समान रख दिया, इस प्रकार प्राप्त समीकरणो को हल करके आकलक ज्ञात कर लिये जो कि इस प्रकार हैं —

(क) μ का आकलन, जबकि σ^2 ज्ञात है,

$$\log L = -\frac{n}{2}\log(2\pi) - \frac{n}{2}\log\sigma^2 - \frac{n}{2\sigma^2}\{(\overline{X}-\mu)^2+s^2\}$$

$$\frac{\partial(\log L)}{\partial\mu} = \frac{n}{2\sigma^2}\cdot 2(\overline{X}-\mu)=0$$

या $(\overline{X}-\mu)=0$ ..(i)

या $\hat{\mu}=\overline{X}$ ....(ii)

इसी प्रकार σ^2 के आकलन के लिए, जबकि μ ज्ञात है,

$$\frac{\partial(\log L)}{\partial\sigma^2} = \frac{-n}{2\sigma^2} + \frac{n}{2\sigma^4}\{s^2+(\overline{X}-\mu)^2\}=0 \quad ....(iii)$$

या $\sigma^2=\{s^2+(\overline{X}-\mu)^2\}$

या $\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_i (X_i-\mu)^2$ ....(iv)

(जहां $i=1, 2, 3, \dots n$)

μ व σ^2 का एक साथ आकलन करने के लिए (i) और (iv) की सहायता से,

$$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\Sigma(X_i-\overline{X})^2 \quad (\because \hat{\mu}=\overline{X})$$

अतः μ और σ^2 के अधिकतम सम्भाविता आकलक क्रमशः $\overline{X}$ और s^2 हैं। यह भी सिद्ध किया जा सकता है कि यह आकलक अनन्तस्पर्शतः प्रसामान्य और दक्ष है।

उदाहरण 11·3 माना कि n परिमाण के प्रतिदर्श का द्विपद बंटन वाले समग्र से चयन किया गया है जिसका प्रायिकता फलन

$$f(X, p)=p^X q^{(1-X)} \quad (\text{जहां } X=0, 1)$$

है। द्विपद बंटन के लिए फलन,

$$L(X_1, X_2 \dots X_n, p)=\prod_{i=1}^{n} p^{X_i}(1-p)^{1-X_i}$$

$(\because q=1-p)$

$$= p^{\sum_i X_i}(1-p)^{n-\sum_i X_i}$$

$$\therefore \log L=\sum_i X_i \log p+(n-\sum_i X_i)\log(1-p)$$

फलन log L का p के सम्बन्ध में आंशिक अवकलन करके शून्य के समान रख दिया। इसको हल करके p का आकलन ज्ञात कर लिया।

$$\frac{\partial (\log L)}{\partial p} = \frac{1}{p} \sum X_i - \frac{(n - \sum_i X_i)}{1-p} = 0$$

या $$\frac{(1-p) \sum_i X_i - p (n - \sum_i X_i)}{p(1-p)} = 0$$

$$\therefore \quad (1-p) \sum_i X_i - p (n - \sum_i X_i) = 0$$

$$\sum_i X_i - p\,n = 0$$

या $$\hat{p} = \frac{1}{n} \sum_i X_i$$

$$= \overline{X}$$

अत p का अधिकतम सम्भाविता आकलक $\overline{X}$ है। ऊपर दिये गये उदाहरणों की भाँति हम अन्य किसी भी बटन के प्राचलों के आकलक, अधिकतम सम्भाविता विधि द्वारा ज्ञात कर सकते हैं। इस विधि के अतिरिक्त प्राचलों के अच्छे आकलक ज्ञात करने की अन्य विधियाँ हैं —(1) आघूर्णों के द्वारा (method of moments), (2) न्यूनतम वर्ग विधि (Method of Least squares), (3) न्यूनतम प्रसरण-विधि (Method of minimum Variance), (4) न्यूनतम काई वर्ग विधि (Method of minimum Chi squares) आदि। इनमें से दूसरी विधि का वर्णन अध्याय 13 व 21 में दिया गया है। अन्य विधियाँ प्रचलन में कम हैं अत इन विधियों का विवरण नहीं दिया गया है।

अन्तराल आकलन

बिन्दु आकलन के द्वारा प्रतिदर्श प्रेक्षणों का एक वह फलन ज्ञात करते हैं जो प्राचल का एक सर्वोत्तम आकलक प्रदान करता है। बहुधा प्राचल का एक निश्चित मान जानना आवश्यक न होकर, वे सीमाएँ जानना ही पर्याप्त होता है जिनमें कि प्राचल का यह मान स्वीकृत होने की एक नियत प्रायिकता है। जैसे एक प्रकार के तार की तनाव क्षमता (tensile strength) या प्रत्यास्था-सीमाएँ (elastic limits) आदि ज्ञात करनी हों तो अन्तराल आकलन अधिमाननीय है। अन्तराल आकलन में उन दो बिन्दुओं l_1 और l_2 ($l_1 < l_2$), जो कि प्रतिदर्श प्रेक्षणों के फलन हैं, इस प्रकार ज्ञात करने होते हैं कि प्राचल θ के l_1 व l_2 के बीच में होने की प्रायिकता $(1-\alpha)$ है।

या $$p\,(l_1 < \theta < l_2) = 1 - \alpha \qquad \ldots(11\ 12)$$

जहाँ α इच्छित सार्थकता स्तर है, $(1-\alpha)$ को विश्वास्यता गुणांक कहते हैं तथा l_2 और l_1 के अन्तर को विश्वास्यता अन्तराल कहते हैं। जितना सार्थकता स्तर α कम होता है उतना ही विश्वास्यता अन्तराल अधिक होता है। अतः इससे हम आशय पर पहुँचते हैं कि छोटे से छोटा अन्तराल, जिसकी प्रायिकता $(1-\alpha)$ हो, सर्वोच्च होता है। किन्तु व्यवहार में एक ऐसे सर्वोच्च अन्तराल का, अज्ञात प्राचल θ के लिए अस्तित्व नहीं है।

अतः सीमाओं के अन्तर d, $(l_2 - l_1 = d)$ को न्यूनतम करना उचित है। माना कि विश्वास्यता अन्तराल फलन E (d) है जो कि औसत अन्तराल को प्रदर्शित करता है और θ के किसी भी मान के लिए न्यूनतम है। यदि n परिमाण के प्रतिदर्श

$$X_1, X_2, X_3 \dots X_n$$

द्वारा समग्र माध्य μ का 95 प्रतिशत विश्वास्यता अन्तराल ज्ञात करना है जबकि प्रतिदर्श का चयन प्रसामान्य समग्र से किया गया है जिसके प्राचल (μ, σ^2) हैं तो दो संख्याएँ a और b $(a<b)$ ज्ञात करनी होती हैं जो कि निम्न समाकल को सन्तुष्ट करती हैं।

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^2} dx = 95 \qquad \dots (11.13)$$

निम्न प्रतिस्थापन करने पर,

$$(X-\mu)/\sigma = Y \qquad \text{या} \quad dX = \sigma dY$$

$$\text{जब} \quad X = a \quad Y = (a-\mu)/\sigma$$

$$\text{और} \quad X = b, \quad Y = (b-\mu)/\sigma$$

(11·13) में प्रतिस्थापन करने पर समाकल निम्न हो जाता है —

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{a-\mu}{\sigma}}^{\frac{b-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{Y^2}{2}} dY = 95 \qquad \dots (11\ 13\ 1)$$

इसी सिद्धान्त के आधार पर विश्वास्यता सीमाएँ ज्ञात कर सकते हैं। व्यवहार में अधिकतर σ ज्ञात नहीं होता है अतः इसके स्थान पर इसके आकलित मान s का प्रयोग किया जाता है, यदि

$$Y = \frac{\overline{X} - \mu}{s/\sqrt{n}}$$

है, तो μ की 95 प्रतिशत विश्वास्यता सीमाओं के लिए,

$$\int_{-t_{.95}}^{t_{.95}} f(Y)\, dY = 95$$

$$p\,(-t_{05} < Y < t_{05}) = 95$$

$$p\left(-t_{05} < \frac{\overline{X}-\mu}{s/\sqrt{n}} < t_{05}\right) = 95$$

अत μ की विश्वास्यता सीमाऐं हैं .

$$\overline{X} \pm t_{05}\frac{s}{\sqrt{n}}$$

माध्य व प्रसरण के लिए विश्वास्यता अन्तराल अध्याय 9 में दिये जा चुके हैं। यहाँ केवल अन्तराल आकलन के सिद्धान्त को संक्षिप्त में दिया गया है।

एकसमान शक्ततम परीक्षा

परिकल्पना $H_0 \quad \theta=\theta_0$ की $H_1 \quad \theta=\theta_1$ के विरुद्ध परीक्षा में परीक्षा की सामर्थ्य वैकल्पिक परिकल्पना H_1 पर निर्भर करती है। गणितीय रूप में इसे $\{1-\beta(\theta_1)\}=P(\theta_1)$ द्वारा सूचित करते हैं। प्राचल θ के फलन $P(\theta)$ को क्षमता फलन (Power function) कहते हैं। फलन $P(\theta)$ का $\theta=\theta_0$ पर मान $P(\theta_0)=\alpha$ होता है और $\theta=\theta_1$ पर मान $P(\theta_1)=\{1-\beta(\theta_1)\}$ होता है।

बिन्दु $\theta=\theta_1$ पर वह परीक्षा जो अन्य परीक्षाओं की अपेक्षा अधिक शक्तिशाली हो अर्थात् निर्दिष्ट α *(प्रथम प्रकार की त्रुटि की प्रायिकता)* के लिए जिसमें द्वितीय प्रकार की त्रुटि की प्रायिकता 'β' न्यूनतम हो, वह परीक्षा शक्ततम होगी।

यदि कोई शक्ततम परीक्षा θ_1 के समस्त सम्भव मानों के लिए शक्ततम रहती है, तो इसे एकसमान शक्ततम परीक्षा कहते हैं। गणितीय रूप में एकसमान शक्ततम परीक्षा को निम्न रूप में दिया जा सकता है —

माना कि R एक क्रांतिक क्षेत्र को निरूपित करता है और R′ कोई अन्य क्रांतिक क्षेत्र है और x प्रतिदर्श समष्टि में कोई एक बिन्दु है तो R के एकसमान शक्ततम परीक्षा होने के लिए निम्न प्रतिबन्ध सत्य होने चाहिये —

(i) $\quad P\{x \in R \mid \theta_0\} = P\{x \in R' \mid \theta_0\} = \alpha \qquad$ ....(11.14)

(ii) $\quad P\{x \in R \mid \theta_1\} > P\{x \in R' \mid \theta_1\} \qquad$ ...(11 14 1)

और $\quad \theta_1 \in \Omega - \theta_0$

जहाँ θ के समस्त सम्भव मानों की समष्टि Ω है। इस Ω को प्राचल समष्टि कहते हैं।

यदि H_0 इस प्रकार हो कि $\theta \in \omega$, जहाँ ω प्राचल समष्टि Ω की उप-समष्टि है, तो प्रतिबन्ध (ii) में $\theta \in \Omega - \omega$ सत्य होना चाहिये।

यह बात ध्यान देने योग्य है कि इस प्रकार की परीक्षा का कम ही स्थितियों में अस्तित्व है।

सम्भाविता अनुपात परीक्षा

माना कि समग्र, $f_X(x \mid \theta_1, \theta_2)$, में से n परिमाण के एक यादृच्छिक प्रतिदर्श का चयन किया गया है और प्रतिदर्श प्रेक्षण $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$ हैं। यहाँ प्राचलों θ_1, θ_2 के द्विविमितीय (two dimensional) प्राचल समष्टि को विचार करना होता है। इस समष्टि में θ_1 व θ_2 के यथा सम्भव मानों का समावेश है।

माना कि प्रेक्षणों के एक फलन $L(X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n)$ को परीक्षा फलन के रूप में लिया गया है। तो अब यह देखना है कि प्राचल मान, समष्टि ω में है या $(\Omega - \omega)$ में है। वास्तव में एकसमान शक्ततम परीक्षा फलन ज्ञात करना चाहेंगे किन्तु व्यवहार में इसे प्राप्त करना कठिन है। अतः यहाँ एक ऐसी परीक्षा का गठन किया गया है जो कुछ अनुकूलतम गुण सम्पन्न है। यह परीक्षा विधि सम्भाविता अनुपात के सिद्धान्त पर निर्भर है। माना कि प्रतिदर्श प्रेक्षणों का प्रायिकता फलन

$$f(X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n/\theta_1, \theta_2), f(x/\theta)$$

द्वारा निरूपित है जहाँ $x = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ और $\theta = (\theta_1, \theta_2)$

$H_0 : \theta, \omega$ में है, को $H_1 : \theta, (\Omega - \omega)$ में है, के विरुद्ध परीक्षा करनी है।

परीक्षा के लिए अनुपात $L(x)$ ज्ञात करते हैं, जबकि

$$L(x) = \frac{\max\limits_{\theta \in \omega} f(x \mid \theta)}{\max\limits_{\theta \in (\Omega - \omega)} f(x \mid \theta)} = \frac{\psi(\hat{\omega})}{\psi(\hat{\Omega})} \qquad \ldots(11.15)$$

उपर्युक्त सूत्र में $\psi(\hat{\Omega})$ प्राचल समष्टि θ के अधिकतम सम्भाविता आकलनों के लिए प्रायिकता फलन का मान है और θ के ω में जो मान प्रायिकता फलन को अधिकतम करते हैं, उन मानों के लिए प्रायिकता फलन का अधिकतम मान $\psi(\hat{\Omega})$ द्वारा निरूपित है।

(11.15) द्वारा परिकलित $L(x)$ का मान कदापि ऋणात्मक तथा एक से अधिक नहीं हो सकता है। क्योंकि $L(x)$ दो प्रायिकता फलनों का अनुपात है। साथ ही $\psi(\hat{\omega})$ या तो $\psi(\hat{\Omega})$ से कम या समान हो सकता है। इसका कारण यह है कि $f(x/\theta)$ को ω में अधिकतम करने की $f(x/\theta)$ के Ω में अधिकतम करने की अपेक्षा कम स्वतन्त्रता है। अतः $L(x)$ का परास शून्य से एक है

अर्थात् $$0 \leq L(x) \leq 1$$

यदि $L(x)$ का परिकलित मान 1 के समान या एक से कुछ कम हो तो इसका

अभिप्राय है कि $\psi(\hat{\omega})$ और $\psi(\hat{\Omega})$ समान या एक दूसरे के लगभग समान है। इस स्थिति मे H_0 को अस्वीकार करने का औचित्य नही है अर्थात् H_0 स्वीकार्य है। इसके विपरीत यदि $\psi(\hat{\omega})$ और $\psi(\hat{\Omega})$ निकट न हो अर्थात् यदि $L(x)$ का मान शून्य के निकट हो तो H_0 को मिथ्या समझा जाता है अर्थात् H_1 स्वीकार्य है। अतः हमे एक सख्या 'K' ज्ञात करनी है जो कि 1 से कम हो और जो इच्छित प्रथम प्रकार की त्रुटि (α) को नियन्त्रित कर सके।

यदि $L(x) < K$ हो तो H_0 को अस्वीकार कर लिया जाता है अन्यथा H_0 को स्वीकार कर लिया जाता है। इस प्रकार $L(x)$ के लिए सशय अन्तराल सदैव $0 < L < K$ की भाँति होता है। परीक्षा के हेतु K का मान, $L(x)$ के बटन और प्रथम प्रकार की त्रुटि (α) की सहायता से निम्न सम्बन्ध द्वारा ज्ञात कर लिया जाता है। माना कि $L(x)$ का सतत बारम्बारता बटन $g(L, H_0)$ है जबकि H_0 सत्य है।

$$\int_0^K g(L, H_0)\, dL = \alpha \quad \text{....(11.16)}$$

$L(x)$ का सशय अन्तराल ज्ञात करने के लिए यह आवश्यक है कि H_0 के सत्य होने की स्थिति मे $L(x)$ का बारम्बारता बटन ज्ञात हो।

यदि H_0 सरल परिकल्पना हो तो $L(x)$ का अद्वितीय बटन होता है। अत K का अद्वितीय मान ज्ञात हो जाता है।

किन्तु यदि H_0 सयुक्त परिकल्पना हो तो $L(x)$ का अद्वितीय बटन का होना आवश्यक नहीं है। इस स्थिति मे K का एक मान ज्ञात होना आवश्यक नही है। अतः ऐसी दशा मे समस्या और जटिल हो जाती है और इसके निवारण के लिए परीक्षा मे कुछ अन्य बातो को जोड़ना होता है किन्तु इनका वर्णन यहाँ नहीं दिया गया है। इस समस्या को इस पुस्तक के क्षेत्र के बाहर ही रखा गया है।

अनेकों स्थितियो मे सम्भाविता अनुपात परीक्षा के निम्न गुण पाये जाते हैं :—

(1) यदि एकसमान शक्ततम परीक्षा का अस्तित्व है तो अधिकतम अनुपात परीक्षा द्वारा यह प्राप्त हो जाती है।

(2) यदि प्रतिदर्श परिमाण बृहत् हो तो $-2 \log L(x)$, लगभग काई-वर्ग (χ^2) बटित होता है जिसकी स्वतन्त्रता-कोटि, प्राचलो की सख्या के समान है।

उदाहरण 11.4 एक प्रसामान्य समग्र, जिसके माध्य व प्रसरण क्रमश μ व σ^2 हैं, से एक n परिमाण के प्रतिदर्श का चयन किया गया है। माना कि प्रतिदर्श प्रेक्षण

$$X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$$

हैं। तो परिकल्पना $H_0 : \mu = C$ की $H_1 : \mu \neq C$ के विरुद्ध परीक्षा, अधिकतम सम्भाविता अनुपात परीक्षा द्वारा निम्न प्रकार कर सकते हैं :—यहाँ C एक ज्ञात सख्या है। प्रतिदर्श प्रायिकता घनत्व फलन,

$$f(x) = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{1}{2}\sum\limits_i \frac{(X_i-\mu)^2}{\sigma^2}} \quad ....(1)$$

उदाहरण (11.2) में यह ज्ञात किया जा चुका है कि μ व σ^2 के अधिकतम सम्भाविता आकलक क्रमश: निम्न हैं —

$$\hat{\mu} = \overline{X} \quad ....(2)$$

और

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_i (X_i - \overline{X})^2 \quad ....(3)$$

इन आकलकों के मान (1) में प्रतिस्थापित करने पर, $\psi(\hat{\Omega})$ निम्न है :—

$$\psi(\hat{\Omega}) = \left(\frac{1}{\hat{\sigma}^2(2\pi)}\right)^{n/2} e^{-\frac{1}{2}\frac{\sum (X_i - \overline{X})^2}{\hat{\sigma}^2}}$$

$$= \frac{e^{-n/2}}{(2\pi\hat{\sigma}^2)^{n/2}}$$

$$= \left\{\frac{1}{\left(\frac{2\pi}{n}\right)\sum\limits_i (X_i - \overline{X})^2}\right\}^{n/2} \cdot e^{-n/2} \quad ....(4)$$

$f(x)$ को ω में अधिकतम करने हेतु, $\mu = C$ रख दिया। क्रमश: σ^2, H_0 के अन्तर्गत निम्न अधिकतम आकलक ज्ञात किया जा सकता है।

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_i (X_i - C)^2$$

$$\psi(\hat{\omega}) = \left\{\frac{1}{\left(\frac{2\pi}{n}\right)\sum\limits_i (X_i - C)^2}\right\}^{n/2} e^{-\frac{1}{2}\sum (X_i - C)^2 / \frac{1}{n}\sum\limits_i (X_i - C)^2}$$

$$= \left\{\frac{1}{\left(\frac{2\pi}{n}\right)\sum\limits_i (X_i - C)^2}\right\}^{n/2} e^{-n/2} \quad ....(5)$$

अत: (5) और (4) द्वारा अधिकतम सम्भाविता अनुपात,

$$L=\frac{\left\{\dfrac{1}{\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)\sum\limits_{i}(X_i-C)^2}\right\}^{n/2} e^{-n/2}}{\left\{\dfrac{1}{\dfrac{2\pi}{n}\sum\limits_{i}(X_i-\overline{X})^2}\right\}^{n/2} e^{-n/2}}$$

अत: $$L=\left\{\frac{\sum\limits_{i}(X_i-\overline{X})^2}{\sum\limits_{i}(X_i-C)^2}\right\}^{n/2} \quad ....(6)$$

अब हमे H_0 के अन्तर्गत, L का घनत्व फलन ज्ञात करना है।

$$\sum_{i}(X_i-C)^2=\sum_{i}(X_i-\overline{X})^2+n(\overline{X}-C)^2$$

(6) के द्वारा,

$$L=\left\{\frac{1}{1+\dfrac{n(\overline{X}-C)^2}{\sum\limits_{i}(X_i-\overline{X})^2}}\right\} \quad ....(7)$$

सूत्र (9.1) की सहायता से,

$$t^2=\frac{n(n-1)(\overline{X}-C)^2}{\sum\limits_{i}(X_i-\overline{X})^2}$$

या $$\frac{n(\overline{X}-C)^2}{\sum\limits_{i}(X_i-\overline{X})^2}=\frac{t^2}{(n-1)}$$

अत: समीकरण (7) निम्न हो जाता है :—

$$L=\left\{\frac{1}{1+t^2/(n-1)}\right\}^{n/2} \quad ....(8)$$

जबकि t की स्व० को० (n − 1) है। t के घनत्व फलन मे, (8) द्वारा प्रतिस्थापन करने पर, L का घनत्व फलन ज्ञात हो जाता है जो कि निम्न प्रकार है :—

हम जानते है कि t का घनत्व फलन निम्न है :—

$$f(t)=\frac{1}{(n-1)^{1/2}\,\beta\left(\frac{1}{2},\frac{n-1}{2}\right)\left(1+\frac{t^2}{n-1}\right)^{\frac{n+1}{2}}}$$

$$\therefore \quad g(L,H_0)=\frac{1}{(n-1)^{\frac{1}{2}}\,\beta\left(\frac{1}{2},\frac{n-1}{2}\right)} \quad ....(9)$$

$$\text{या} \quad L \frac{n(n+1)}{n-1}$$

(1) का प्रयोग करके (11 16) द्वारा K का मान ज्ञात कर सकते हैं। वास्तव में यहाँ L का बटन ज्ञात करने की आवश्यकता नहीं है क्योंकि L, t^2 का एक एकदिष्ट ह्रासमान फलन (*monotonic decreasing function*) है। अतः हम t^2 से वही परीक्षा कर सकते हैं जो कि L से की जा सकती है।

सम्बन्ध (8) से स्पष्ट है कि

यदि $t^2=0$ हो तो $L=1$ है और $t^2=\infty$, हो तो $L\to 0$

इस प्रकार समय अन्तराल $0<L<K$, अन्तराल $t^2>A$ के तुल्य है जबकि A का मान, सम्बन्ध (8) में K के द्वारा ज्ञात किया जा सकता है।

माना कि यहाँ दो पुच्छ परीक्षा है। इसके लिए सार्थक क्षेत्र α के समान लिया जाने की स्थिति में, H_0 के विषय में निर्णय निम्न नियमानुसार कर सकते हैं।

यदि $t>t_{\alpha/2,\ (n-1)}$ हो तो H_0 को अस्वीकार कर दिया जाता है और इसके विपरीत स्थिति में H_0 को स्वीकार कर लिया जाता है जबकि,

$$t=\frac{\sqrt{n(n-1)}\,|\bar{X}-C|}{\sqrt{\sum_i (X_i-\bar{X})^2}}$$

टिप्पणी : इसी प्रकार के उदाहरण अन्य परिकल्पनाओं की परीक्षा के हेतु भी दिये जा सकते हैं जैसे n बरनूली परीक्षणों के लिए जबकि सफलता की प्रायिकता P है। $H_0: P=\frac{1}{2}$ की $H_1: P\neq\frac{1}{2}$ के विरुद्ध अधिकतम समाविता अनुपात परीक्षा करनी हो तो दी हुई विधि का प्रयोग कर सकते हैं। पाठक इस परीक्षा को स्वयं करके देखें।

प्रश्नावली

1 एक प्रसामान्य समग्र से चयनकृत n प्रतिदर्श प्रेक्षणों के आधार पर परिकल्पना $H_0: \sigma^2=\sigma_0^2$ की अधिकतम समाविता अनुपात परीक्षा कीजिये।

2 एक समग्र का समाविता घनत्व फलन, $f(x)=\frac{1}{a}$ है जबकि $0<x<a$ इस समग्र से एक n परिमाण के प्रतिदर्श का चयन किया गया है तो प्राचल a का अधिकतम समाविता आकलक ज्ञात कीजिये।

3 द्विपद बटन फलन,

$$f(r)=\binom{n}{r}\frac{p^r q^{n-r}}{1-q^n} \qquad \text{जहाँ} \quad r=1, 2, 3, \ldots, n$$

में p का अधिकतम समाविता आकलक ज्ञात कीजिये जबकि
$n=2$

4 क्या प्रतिदर्श माध्य सदैव एक समग्र माध्य का दक्ष आकलक है ? अपने उत्तर की तथ्यों के आधार पर पुष्टि कीजिये।

5. प्वासो बंटन $\frac{e^{-m} m^r}{r!}$ के लिए m का अधिकतम सम्भाविता आकलक ज्ञात कीजिये।

6. एक आयतीय समग्र (rectangular population)

$$f(x, \beta) = \frac{1}{\beta}, \; 0 < x < \beta, \; 0 < \beta < \infty$$
$$= 0, \qquad \text{अन्यथा}$$

से चयनकृत n प्रतिदर्श प्रेक्षणों के आधार पर β का अधिकतम सम्भाविता आकलक ज्ञात कीजिये।

7. एक चरघातांकी समग्र (exponential population)

$$f(x; \alpha, \beta) = y_0 \, e^{-\beta (x-\alpha)}, \; \alpha < x < \infty$$
$$= 0 \qquad \text{अन्यथा}$$

(जहाँ y_0 एक स्थिरांक है) से चयनकृत n प्रतिदर्श प्रेक्षणों के आधार पर α और β के अधिकतम सम्भाविता आकलन ज्ञात कीजिये। *(दिल्ली, 1959)*

□ □ □

12

प्रतिचयन सिद्धान्त

प्रतिचयन से अभिप्राय किसी समग्र में से नियमानुसार कुछ एककों का चयन करना है। अतः एककों के चयन करने के लिए नियमों के निर्धारण को प्रतिचयन विधियाँ कहते हैं।

प्रतिचयन सांख्यिकी विज्ञान का एक मुख्य अंग है क्योंकि अधिकांश अध्ययन प्रतिदर्श पर ही आधारित होते हैं। प्रतिदर्श अध्ययन के अतिरिक्त कुछ अध्ययन पूर्ण परिगणन (Complete enumeration) पर भी आधारित होते हैं। इन अध्ययनों में प्रत्येक एकक पर प्रेक्षण लिये जाते हैं जैसे किसी शहर में कर (Tax) देने वालों की संख्या या किसी वस्तु का फैक्ट्रियों द्वारा कुल उत्पादन आदि के विषय में जानना है। परन्तु अन्य कुछ स्थितियों में समग्र का किसी लक्षण के प्रति पूर्ण परिगणन करना एक कठिन समस्या है। जैसे दिल्ली में परिवारों की औसत आय तथा व्यय का पता लगाना या दिल्ली की जनता के रक्त वर्ग के बटन का पता लगाना आदि जानकारी के लिए पूर्ण परिगणन एक कठिन समस्या है क्योंकि इसके लिए अधिक समय धन एवं प्रशिक्षित व्यक्तियों की आवश्यकता होती है जिनका कि अधिकतर उपलब्ध होना कठिन है।

आजकल देश या विदेश में चल रही विभिन्न योजनाओं का जनता पर प्रभाव और आगे बनायी जाने वाली योजनाओं के लिए जानकारी या नये नियमों के कारण जनता पर सामाजिक एवं आर्थिक दृष्टि से प्रभाव जानना लगभग आवश्यक हो गया है। इन जानकारियों के हेतु अत्यधिक समय या धन लगाना उचित नहीं समझा जाता है। अतः पूर्ण परिगणन की अपेक्षा प्रतिदर्श अध्ययन एक उचित मार्ग है।

कुछ अध्ययनों में जिनमें कि प्रेक्षण लेते समय वस्तु या जीव का विनाश हो जाता है इनकी पूर्ण परिगणना करना अनुचित है। पूर्ण विनाश पहले ही कर दिया तो अध्ययन का क्या लाभ होगा? जैसे एक फैक्ट्री द्वारा उत्पादित बिजली के बल्बों का माध्य जीवन काल ज्ञात करना हो उत्पादित तार की टूटने की शक्ति जानना हो किसी व्यक्ति के खून की जाँच करनी हो या पतीली में पके चावलों के पकने की जाँच करना, आदि परीक्षण करने में एककों के विनाश हो जाने के प्रत्यक्ष उदाहरण हैं।

कुछ व्यक्ति समझते हैं कि प्रतिदर्श द्वारा प्राप्त परिणाम त्रुटि युक्त होते हैं और पूर्ण परिगणन द्वारा प्राप्त परिणाम शुद्ध होते हैं। किन्तु उनका यह विचार सत्य नहीं है क्योंकि दोनों ही विधियाँ त्रुटिपूर्ण हैं। इनके साथ-साथ सदैव परिशुद्ध परिणामों की आवश्यकता भी नहीं होती है। किसी विषय में अनुमान लगाने के लिए न तो पूर्ण परिगणन किया जा सकता है और न इसकी आवश्यकता है जैसे आने वाली फसल में कुल उत्पादन या आने वाले कुछ वर्षों में किसी देश या शहर की जनसंख्या आदि का अनुमान लगाना है।

प्रतिदर्श अध्ययनों में दो प्रकार की त्रुटि होती है (क) प्रतिचयन त्रुटि (Sampling error) (ख) अप्रतिचयन त्रुटि (Non-Sampling error)

(क) वे त्रुटियाँ जो प्रतिदर्श के चयन अथवा प्रतिदर्श प्रेक्षणों के आधार पर समग्र के प्रति निर्णय लेने में उत्पन्न होती हैं प्रतिचयन त्रुटियाँ कहलाती हैं। जैसे जैसे प्रतिदर्श परिमाण बढता है प्रतिचयन त्रुटियाँ कम होती हैं। प्रारम्भ मे तो इस त्रुटि मे कमी अधिक होती है किन्तु एक अवस्था के बाद यह कमी नाम मात्र ही रह जाती है। अत प्रतिदर्श का अनुकूलतम परिमाण (optimum size) ज्ञात करके सर्वेक्षण के व्यय को पर्याप्त मात्रा मे घटाया जा सकता है। निर्णय लेने के लिए एक सीमा तक त्रुटि को स्वीकार कर लेते हैं। वह छोटे से छोटा प्रतिदर्श-परिमाण जिससे त्रुटि का उस सीमा म रहना लगभग निश्चित हो, अनुकूलतम परिमाण कहलाता है।

(ख) अप्रतिचयन त्रुटियाँ वे हैं जो आँकडे लेन व प्राप्त-न्यास (data) की प्रक्रिया (processing) करने के समय होती हैं। वे त्रुटियाँ पूर्ण परिगणन एव प्रतिदर्श सर्वेक्षण दोनो ही स्थितियो म होती हैं। पूर्ण परिगणन म प्रतिचयन त्रुटि का तो प्रश्न ही नही है किन्तु इससे प्रतिदर्श सर्वेक्षण की अपेक्षा अप्रतिचयन त्रुटि प्राय अधिक होती है। जैसे,

(i) न्यास के सग्रह अर्थात् प्रेक्षणो के लेने मे त्रुटि।

(ii) यदि एक सर्वेक्षण मे अनेको भेंटकर्त्ता (investigators) हैं तो उनके साक्षात-कार विधि मे अन्तर के कारण त्रुटि।

(iii) सारणीयन मे त्रुटि, आदि।

प्रतिचयन त्रुटि को कम करने का एक मात्र उपाय, उचित प्रतिचयन विधि व प्रतिदर्श परिमाण और अन्य उत्तम प्रविधियो का प्रयोग करना है जबकि अप्रतिचयन त्रुटि अच्छे प्रबन्ध तथा कुशल व्यक्तियो की सेवाओ को प्राप्त करके कम की जा सकती है।

यादृच्छिक या प्रायिकता प्रतिचयन

माना कि एक समग्र मे N एककों $U_1, U_2, U_3, \ldots, U_N$ हैं और इनमे से n एककों का चयन किसी विशिष्ट विधि द्वारा किया गया हो तो ये एकक एक प्रतिदर्श का गठन करते हैं। प्रतिचयन करने की विशिष्ट विधि यदि प्रायिकता के नियमो पर आधारित हो तो इसे यादृच्छिक या प्रायिकता प्रतिचयन कहते है। जैसे N समग्र एककों मे से प्रत्येक एकक का चयन समान प्रायिकता से प्रतिस्थापन या बिना प्रतिस्थापन सहित किया गया हो तो यह सरल यादृच्छिक प्रतिचयन कहलाता है। प्रतिस्थापन सहित प्रतिचयन मे प्रत्येक एकक चयन होने के पश्चात् पुन समग्र मे सम्मिलित कर दिया जाता है और बिना-प्रति-स्थापन के प्रतिचयन मे एक एकक को चयन करने के पश्चात् समग्र से अलग ही रखा जाता है अर्थात् प्रतिदर्श मे एक एकक एक ही बार सम्मिलित हो सकता है। व्यवहार मे अधिकतर बिना प्रतिस्थापन के प्रतिचयन का प्रयोग होता है। यादृच्छिक प्रतिचयन के सामान्य गुण निम्न हैं —

समग्र के प्रत्येक एकक के प्रतिदर्श मे सम्मिलित होने से सम्बद्ध प्रायिकता ज्ञात होनी चाहिये और शून्य से अधिक होनी चाहिए।

वह एकक जिनका प्रतिदर्श के लिए चयन किया जाता है उन्हें प्रतिदर्श एकक कहते हैं और इन एकको पर लिए गये माप प्रतिदर्श प्रेक्षण कहलाते हैं।

प्रतिदर्श परिमाण 'n' व समग्र परिमाण 'N' के अनुपात $\frac{n}{N}$ को प्रतिचयनानुपात (sampling fraction) कहते हैं और इसे प्राय f से सूचित करते हैं।

यदि समग्र से प्रतिदर्श एककों का चयन यादृच्छिक न हो तो इस प्रकार की प्रतिचयन विधि को अयादृच्छिक प्रतिचयन विधि कहते हैं तथा इस विधि द्वारा प्राप्त प्रतिदर्श को अयादृच्छिक प्रतिदर्श कहते हैं। इस प्रकार के प्रतिदर्श का चयन किसी सहायक सूचना के अनुसार व्यक्तिगत रूप से किया जाता है और यह आशा की जाती है कि यह प्रतिदर्श समग्र का एक अच्छा प्रतिनिधि है। ऐसे प्रतिदर्श को सोद्देश्य प्रतिदर्श (purposive sample) कहते हैं। किन्तु ऐसे प्रतिदर्श में सदैव व्यक्तिगत अभिनति (bias) होने की सम्भावना रहती है और साथ ही इस प्रकार के प्रतिचयन के लिए कोई प्रतिचयन सिद्धान्त भी नहीं दिया जा सकता है। अतः किन्हीं विशेष स्थितियों को छोड़कर सदैव प्रायिकता प्रतिचयन का प्रयोग किया जाता है। यादृच्छिक प्रतिचयन द्वारा चयनकृत प्रतिदर्श अधिक विश्वसनीय होता है। कुछ मुख्य-मुख्य प्रायिकता प्रतिचयन विधियों का वर्णन इस अध्याय में दिया गया है।

समग्र और प्रतिचयन यूनिट

सर्वेक्षण करने से पूर्व समग्र के विषय में तय करना होता है। यह एक निश्चित क्षेत्र में वह सम्पूर्ण समुदाय है जिसके विषय में जानकारी प्राप्त करना है जैसे किसी फैक्ट्री द्वारा उत्पादित वस्तुओं का समूह या अन्य कोई पदार्थ, राजस्थान में सभी खेत, एक बाग में लगे हुए सभी फल, एक खेत में विद्यमान कीट, एक शहर में सभी परिवार या किसी प्रान्त में बेकारों का समूह आदि समग्र के रूप में लिए जा सकते हैं। समग्र का रूप एवं आकार सर्वेक्षण या अनुसंधान के क्षेत्र एवं लक्ष्य पर पूर्णतया आधारित है।

प्रतिचयन में समग्र के कुछ एककों का चयन करना होता है जिन पर आँकड़े एकत्रित करने होते हैं। प्रत्येक एकक को प्रतिचयन एकक कहते हैं। समग्र के इन एककों को निर्धारित करते समय अत्यधिक सावधानी बरतनी चाहिये। ये एकक सर्वेक्षण द्वारा जानकारी के प्रकार और लागत पर आधारित हैं अर्थात् क्या जानकारी प्राप्त करनी है और वह किन एककों द्वारा प्राप्त हो सकती है इन तथ्यों पर ध्यान देना आवश्यक है। यदि कोई उपाय सम्भव हो तो इनमें से सर्वोत्तम एककों को ग्रहण करना होता है अर्थात् अनुकूलतम एककों (optimum units) का निर्धारण करना होता है। परिभाषा के अनुसार अनुकूलतम एकक वह है जिसके द्वारा न्यूनतम व्यय करने पर इच्छित परिशुद्ध आगणक प्राप्त हों या निश्चित व्यय करने पर अधिकतम परिशुद्ध आगणक ज्ञात हो। एकक का आकार न तो अधिक बड़ा होना चाहिये और न छोटा ही। इस स्थिति में व्यय एवं परिशुद्धि में एक प्रकार का सन्तुलन हो जाता है। जैसे एक औद्योगिक सर्वेक्षण में एक फैक्ट्री को एकक के रूप में लिया जाना उपयुक्त है, अनाज की उपज सम्बन्धी सर्वेक्षण में एक खेत को एकक के रूप में लेना चाहिये, रहन-सहन के स्तर को जानने हेतु सर्वेक्षण में एक परिवार को एकक लिया जाना उचित है इसी प्रकार के अनेकों अन्य उदाहरण दिये जा सकते हैं।

प्रतिचयन ढांचा

समग्र में से किसी यादृच्छिक प्रतिदर्श चुनने के लिए उसके एककों की एक सूची आवश्यक है। इस सूची को 'प्रतिचयन ढांचा' कहते हैं। सूची में इन एककों का विवरण रहता है प्रत्येक को एक क्रम संख्या से सूचित किया जाता है।

यादृच्छिक संख्या सारणी और इसका उपयोग

यादृच्छिक संख्या-सारणी की रचना सर्वप्रथम फिशर और येट्स (Fisher & Yates) ने की। इस सारणी में अनेकों स्तम्भ में यादृच्छिक रीति द्वारा प्राप्त 0 से 9 तक अंक दिये होते हैं। जैसा कि इस सारणी को देखने से स्पष्ट है। समग्र के N एककों को किसी क्रमानुसार 1 से N तक अंकित कर देते हैं। फिर यह देख लेते हैं कि संख्या N में कितने अंक हैं। जितने अंक होते हैं उतने ही, यादृच्छिक संख्या सारणी में से, संलग्न (adjacent) स्तम्भ ले लिये जाते हैं। इन स्तम्भों को साथ मानकर प्रारम्भ में संख्या पढ़ना प्रारम्भ करते हैं और यदि यह संख्या 1 से N तक में है तो वह एकक जिस पर वह संख्या अंकित है, प्रतिदर्श एकक के रूप में स्वीकार कर लिया जाता है और फिर अगली संख्या पढ़ते हैं और फिर इस संख्या को 1 से N तक होने की स्थिति में स्वीकार करके इस संख्या वाले एकक को प्रतिदर्श में सम्मिलित कर लेते हैं, अन्यथा संख्या को छोड़ दिया जाता है। यह क्रम तब तक चलता रहता है जब तक कि प्रतिदर्श के n एककों का चयन न हो जाय।

यह सिद्ध किया जा सकता है कि यह विधि सरल यादृच्छिक प्रतिचयन है। उदाहरणतया माना कि समग्र में 14 एकक है और 4 एककों का प्रतिदर्श के लिए चयन करना है।

समग्र में एकक $U_1, U_2, U_3 \ldots, U_{14}$ हैं। तो यादृच्छिक संख्या सारणी के प्रथम दो स्तम्भ देखकर 1 से 14 के बीच की संख्याएँ 11, 05, 12, 09 प्राप्त होती है अर्थात् प्रतिदर्श एकक U_{11} U_5, U_{12}, U_9 चयनकृत हैं। इन्हीं एककों पर किसी भी लक्षण के प्रति प्रेक्षण लेकर, प्राचलों के आगणक आदि प्राप्त कर सकते हैं।

यदि समग्र में एककों की संख्या 'N' 100 से 999 तक हो अर्थात् संख्या में तीन अंक हों तो यादृच्छिक संख्या-सारणी के तीन स्तम्भों को लेकर प्रारम्भ से संख्याएँ पढ़ते जाते हैं और ऊपर की भाँति यदि यह *संख्या 1 से N के बीच में हो तो स्वीकार कर ली जाती है* अन्यथा अस्वीकार कर दी जाती है।

यह ध्यान रहे कि सारणी में से कोई भी स्तम्भ लिये जा सकते हैं किन्तु इनको लेने से पूर्व यह नहीं देखना चाहिए कि इसमें कौन-कौनसी संख्याएँ हैं या नहीं हैं।

सरल यादृच्छिक प्रतिचयन

परिभाषा : N एककों के समग्र में से n परिमाण के प्रतिदर्श का चयन करने की विधि सरल यादृच्छिक प्रतिचयन कहलाती है यदि N एककों में से n एककों के सभी सम्भव संचयों के चयन किये जाने की प्रायिकता समान हो। उदाहरणतः माना कि समग्र में केवल चार एकक A, B, C, D हैं जोकि एक-दूसरे से किसी लक्षण के प्रति भिन्न हैं। इसमें से 2 एककों के प्रतिदर्श का यादृच्छिक विधि से चयन करना है। इस परिमाण के

कुल सम्भव प्रतिदर्श छ हो सकते हैं जोकि निम्न प्रकार हैं :—

AB, AC, AD, BC, BD, CD

जबकि इस ओर कोई ध्यान नहीं दिया गया है कि एकक किस क्रम मे चयन किये गये हैं। कोई भी ऐसी विधि जिसके अपनाने पर इनमें से प्रत्येक प्रतिदर्श के चुने जाने की प्रायिकता $\frac{1}{6}$ हो, एक सरल याहच्छिक प्रतिचयन विधि कहलाती है।

N परिमाण के परिमित समग्र में से, n परिमाण के बिना प्रतिस्थापन द्वारा चयन किये गये सम्भव प्रतिदर्शों की संख्या $\binom{N}{n}$ है और इनमे से प्रत्येक, एक उचित प्रतिदर्श है। सरल याहच्छिक प्रतिचयन मे इनमे से प्रत्येक के चयन होने की प्रायिकता $\frac{1}{\binom{N}{n}}$ है।

सरल याहच्छिक प्रतिचयन करने की विधि को याहच्छिक संख्या सारणी के उपयोग के अन्तर्गत दे दिया गया है। सरल याहच्छिक प्रतिदर्श द्वारा तभी अच्छे परिणाम प्राप्त होते हैं जबकि विचाराधीन चर के प्रति समग्र सजातीय हो या इससे पर्याप्त बृहत् प्रतिदर्श का चयन किया जाये। सर्वेक्षण का व्यय अधिक हो जाने के कारण अधिक बृहत् प्रतिदर्श का चयन करना प्राय असम्भव हो जाता है। अत यदि समग्र में विजातीयता हो तो अन्य किसी विधि का प्रयोग करना उपयुक्त है।

माध्य तथा प्रसरण के लिए सूत्र

माना कि समग्र में N एकक $U_1, U_2, U_3, ..., U_N$ हैं और इन पर किसी लक्षण के प्रति प्रेक्षण $X_1, X_2, X_3, ..., X_N$ हैं। इस समग्र से n प्रतिदर्श एककों का सरल याहच्छिक रीति द्वारा चयन किया गया है और उस लक्षण के प्रति प्रेक्षण $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ हैं। यदि समग्र माध्य व प्रसरण क्रमश μ और σ^2 हैं तथा प्रतिदर्श माध्य व प्रसरण $\overline{x}$ व s^2 है तो

$$\mu=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i \qquad ....(12\ 1)$$

$$\sigma^2=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} (X_i-\mu)^2 \qquad ...(12.2)$$

इसके अतिरिक्त एक संख्या S^2, जो कि σ^2 से कुछ भिन्न है, को विचार करना होता है, जहाँ,

$$S^2=\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N} (X_i-\mu)^2 \qquad ....(12\ 3)$$

हम μ का आकलन करना चाहते हैं।

$$\overline{x}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

μ का एक अनभिनत आकलक है। और

$$V(\overline{x})=\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{N}\right) S^2 \qquad ....(12\ 4)$$

$V(\overline{x})$ को भी प्रतिदर्श प्रेक्षणों द्वारा आकलित कर सकते हैं। इसका एक अनभिनत आकलक,

$$v(\overline{x})=\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{N}\right) s^2 \qquad ...(12\ 5)$$

$$=s^2_{\overline{x}}$$

है। जहाँ,
$$s^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2$$

यदि $\frac{1}{N}$ उपेक्षणीय हो तो

$$v(\overline{x})=s^2_{\overline{x}}=\frac{s^2}{n} \qquad ...(12\ 5\ 1)$$

$\overline{x}$ के मानक विचलन $\sqrt{V(\overline{x})}$ को $\overline{x}$ की मानक त्रुटि (standard error) कहते हैं।

टिप्पणी . किसी आकलन के मानक विचलन को उस आकलन की मानक त्रुटि कहते हैं।

यदि हम μ का नहीं वरन् समग्र योग $X=\sum_{i=1}^{N} X_i$ का आकलन चाहें तो आकलक $\hat{X}=N\overline{x}$ अनभिनत होता है। इसका प्रसरण,

$$V(\hat{X})=N^2 V(\overline{x}) \qquad ....(12\ 6)$$

$$=\frac{N(N-n)}{n} S^2 \qquad ....(12\ 7)$$

है। इस प्रसरण का एक अनभिनत आकलक,

$$\frac{N(N-n)}{n} s^2 \qquad ....(12\ 8)$$

है।

अनुपात की स्थिति में सूत्र

मान लीजिये कि समग्र के N एकक कुछ वर्गों में विभाजित हैं और हम एक विशेष वर्ग G में एककों की संख्या N' का अनुपात P जानना चाहते हैं। यदि सरल याहच्छिक प्रतिदर्श के *n* एककों में से *n'* इस वर्ग-विशेष में हैं तो इस अनुपात P का एक अनभिनत आकलक

$$p = \frac{n'}{n} \qquad \ldots(12.9)$$

है।

p का प्रसरण,

$$V(p) = \frac{N-n}{n} \cdot \frac{P(1-P)}{N-1} \qquad \ldots(12.10)$$

इस प्रसरण का एक अनभिनत आकलक,

$$v(p) = \frac{N-n}{N(n-1)} \, p\,(1-p) \qquad \ldots(12.11)$$

$$= \left(1 - \frac{n}{N}\right) \frac{pq}{n-1} \qquad \ldots(12.11.1)$$

$$= s_p^2$$

यदि प्रतिचयन अनुपात $\frac{n}{N}$ लघु हो अर्थात् 05 या इससे कम हो तो $\frac{n}{N}$ उपेक्षणीय मान लिया जाता है और इस स्थिति में,

$$s_p^2 = \frac{pq}{n-1} \qquad \ldots(12.11.2)$$

हो जाता है।

विश्वास्यता सीमाएँ

समग्र माध्य *a* की विश्वास्यता सीमाओं के लिए विवरण अध्याय 9 में दिया गया है। इनका परिकलन सूत्र (9 9) द्वारा कर सकते हैं। यहाँ P की विश्वास्यता सीमाओं का ही वर्णन एवं सूत्र दिया गया है।

वर्ग G_1 में प्रतिदर्श एकक का अनुपात P है और यह मान लिया कि प्रतिदर्श परिमाण n बृहद् है। अतः प्रसामान्य वक्र का प्रयोग किया जा सकता है। $(1-\alpha)$ प्रतिशत विश्वास्यता सीमाओं का अर्थ है कि $\alpha/2$ परिमाण का क्रान्तिक-क्षेत्र प्रसामान्य वक्र की दोनों पुच्छ की ओर होना चाहिये।

माना कि $\alpha/2$ संशय अन्तराल के लिए प्रसामान्य विचर Z_α या $-Z_\alpha$ है जैसा कि चित्र (12–1) मे दिखाया गया है। बृहद् प्रतिदर्श की स्थिति में अनुपात P के लिए



चित्र 12–1 प्रसामान्य वक्र मे दोनों पुच्छों की ओर $\alpha/2$ क्षत्रिक-क्षेत्र

विश्वास्यता सीमाएँ निम्न सम्बन्ध द्वारा ज्ञात कर सकते हैं —

$$P_r\{p - Z_\alpha\ s(p) \leq P \leq p + Z_\alpha\ s(p)\} = 1 - \alpha$$

अर्थात् P की उपरि तथा निम्न सीमाएँ,

$$\left.\begin{aligned} U(P) &= p + Z_\alpha\ s(p) \\ L(P) &= p - Z_\alpha\ s(p) \end{aligned}\right\} \qquad \text{.... (12.12)}$$

जबकि $$s(p) = \sqrt{\left(\frac{pq}{n-1}\right)\left(\frac{N-n}{N}\right)}$$

यहाँ $s(p)$ के लिए सूत्र मे अनभिनत भिन्न को लेना आवश्यक है क्योंकि n को बृहद् लिया गया है

प्रतिदर्श परिमाण

सर्वेक्षण की योजना को तयार करते समय एक स्थिति ऐसी आती है कि प्रतिदर्श के परिमाण का निश्चय करना होता है। किसी प्रतिदर्श का परिमाण मुख्यतः समग्र की विजातीयता पर निर्भर करता है, जितनी विजातीयता अधिक होती है उतने ही बृहद् परिमाण के प्रतिदर्श का चयन करना होता है। किन्तु यदि समग्र पूर्णतया सजातीय हो तो समग्र के एक एकक या अंश पर प्रेक्षण के द्वारा पूर्ण जानकारी या प्राचल मान ज्ञात किये जा सकते हैं जैसे शरीर में खून पूर्णतया सजातीय होता है और केवल एक बूंद की जांच करके सही परिणाम ज्ञात हो जाते हैं। किन्तु ऐसी स्थिति बहुत कम पायी जाती है। अतः समग्र से किस परिमाण के प्रतिदर्श का चयन किया जाये यह निश्चय करना अत्यन्त आवश्यक है। प्रतिदर्श परिमाण के विषय मे निर्णय लेते समय निम्न बातों का ध्यान रखना अत्यन्त आवश्यक है :—

(1) सर्वेक्षण के उद्देश्य का स्पष्ट विवरण दिया जाना चाहिये। इस कथन में यह बताना चाहिये कि अन्त से किन विषयों पर निर्णय लेने हैं।

(2) सर्वेक्षणकर्ता कितनी सूक्ष्मता से परिणाम प्राप्त करना चाहता है अर्थात् आकलन में कितनी त्रुटि तक सहन की जा सकती है। इस त्रुटि को सम्य त्रुटि (permissible error) कहते हैं। यदि $\pm$ 10% त्रुटि स्वीकार करने के विषय में सर्वेक्षणकर्ता अपनी अनुमति देता है और प्रतिदर्श द्वारा प्राप्त आकलक का मान p प्रतिशत है तो किसी लक्षण के प्रति समग्र में प्रतिशत (p+10) और (p−10) के बीच स्थित होगा। आकलक को परम शुद्ध मानना भी असत्य है। अतः यह परिणाम गलत हो सकने की कुछ प्रायिकता माननी होगी है, जिसे सार्थकता स्तर द्वारा सम्बोन्धित करते हैं।

प्रतिदर्श परिमाण 'n' के लिए सूत्र

माना कि आकलित माध्य और समग्र माध्य में अन्तर d को सहन किया जा सकता है अर्थात् क्षम्य त्रुटि है। गणितीय भाषा में,

$$|\overline{X}-\mu|\leq d$$

जब कि प्रतिदर्श माध्य $\overline{x}$ है और μ समग्र माध्य है। माना कि $(1-\alpha)$ इच्छित विश्वास्यता स्तर है या α सार्थकता स्तर है तो $|\overline{x}-\mu|$ के d से अधिक न होने की प्रायिकता,

$$P_r\{|\overline{x}-\mu|>d\}=\alpha \qquad ....(12.15)$$

या

$$P_r\{|\overline{x}-\mu|\leq d\}=1-\alpha \qquad ....(12.15.1)$$

अतः हमें इतने परिमाण के प्रतिदर्श का चयन करना है कि यदि $\overline{X}$ और μ का अन्तर d से अधिक न हो अर्थात् वह प्रतिदर्श परिमाण ज्ञात करना है कि अन्तर d, α सा० स्त० पर विश्वास्यता अन्तराल में ही रहे।

माना कि किसी समग्र से एक प्रतिदर्श का चयन सरल यादृच्छिक विधि द्वारा बिना प्रतिस्थापन के किया जाता है। N परिमाण के समग्र से यदि n परिमाण के प्रतिदर्श का चयन किया जाना उचित है तो इसके लिए सूत्र निम्न प्रकार है :—

यदि चर X के लिए प्रतिदर्श माध्य $\overline{x}$ का बंटन प्रसामान्य है तो सूत्र (12.4) द्वारा विदित है कि,

$$V(\overline{x})=\frac{N-n}{N}\cdot\frac{S^2}{n}$$

विश्वास्यता अन्तराल विधि के अनुसार प्रतिदर्श परिमाण n के लिए α सार्थकता स्तर पर सारणी (प-2) द्वारा प्राप्त प्रसामान्य विचर Z का मान Z_α ज्ञात कर लेते हैं। प्रतिदर्श परिमाण इतना हो कि जिससे अन्तर d का अभिज्ञान हो सके। इसके लिए निम्न असमिका सत्य होनी चाहिए :—

$$\frac{d}{\sqrt{\frac{N-n}{N}\cdot\frac{S^2}{n}}}>Z_\alpha \qquad ....(12.16)$$

या $n\left\{1+\frac{1}{N}\left(\frac{Z_a \cdot S}{d}\right)^2\right\} > \left\{\frac{Z_a \cdot S}{d}\right\}^2$

अतः n का न्यूनतम मान निम्न है :—

$$n=\frac{\left(\frac{Z_a S}{d}\right)^2}{1+\frac{1}{N}\left(\frac{Z_a S}{d}\right)^2} \qquad ....(12\cdot 17)$$

व्यवहार में S का मान ज्ञात नहीं होता है। इसका मान किसी पिछले सर्वेक्षण या प्रयोग के आधार पर उसी चर या सम्बन्धित चर पर दिये गये आकलकों द्वारा मान लेते हैं। यदि इस प्रकार की कोई पिछली रिपोर्ट उपलब्ध न हो तो एक लघु प्रतिदर्श का चयन करके चर X पर प्रेक्षण लेकर प्रसरण S^2 के विषय में अनुमान लगा लेते हैं।

यदि अनुपातों की स्थिति में 'n' का मान ज्ञात करना हो तो S^2 के मान $\frac{N-n}{N-1}\frac{PQ}{n}$ का सूत्र (12 17) में प्रतिस्थापन करने पर n के लिए निम्न सूत्र प्राप्त हो जाता है —

$$n=\frac{\left(Z_a^2 \cdot \frac{PQ}{d^2}\right)}{1+\frac{1}{N}\left(Z_a^2\ \frac{PQ}{d^2}-1\right)} \qquad ....(12.18)$$

S^2 का अनुमानित मान ज्ञात करने सम्बन्धी विस्तृत ज्ञान के लिए Deming द्वारा लिखित पुस्तक 'Some Theory of Sampling' को पढ़िये।

कठिनाइयाँ—प्रतिदर्श परिमाण निर्धारित करते समय एक और समस्या उत्पन्न होती है। वह यह कि अन्तर d केवल एक लक्षण, पद या चर के लिए माना गया है जबकि सर्वेक्षण द्वारा अनेकों लक्षण या चर के विषय में आँकड़े एकत्रित किये जाते हैं और इनसे आकलन किया जाता है। इस कठिनाई को हल करने की निम्न विधियाँ हैं :—

(1) सर्वेक्षण केवल उन चरों या लक्षणों के प्रति किया जाय जो लगभग एक ही प्रकार के हों।

(2) पहिले सर्वेक्षण में मुख्य-मुख्य चरों के लक्षण या पद के लिए क्षम्य त्रुटि d को अलग-अलग निश्चित कर लिया जाये और प्रत्येक के लिए प्रतिदर्श परिमाण का आकलन कर लें। इनमें से सर्वाधिक n को प्रतिदर्श परिमाण के रूप में ग्रहण कर लिया जाता है। किन्तु ऐसा पर्याप्त साधनों के उपलब्ध होने पर ही किया जा सकता है। यदि n के आकलित मानों में अधिक विचलन हो और सर्वाधिक n का मान स्वीकार करना सम्भव न

हो तो या तो इन पदो को सर्वेक्षण से निकाल देना चाहिए या लघु n को लेकर इनका कम परिशुद्ध आकलन कर लेना चाहिए।

(3) सर्वेक्षण म विभिन्न चरो के कारण केवल प्रतिदर्श परिमाण के निश्चित करने की कठिनाई के अतिरिक्त प्राय यह भी आभास होता है कि सब चरो के लिए एक ही प्रकार की प्रतिचयन विधि उपयुक्त नही है। इस कठिनता को दूर करने का एकमात्र उपाय यह है कि केवल उन चरों को सर्वेक्षण मे सम्मिलित किया जाये जिनके लिए एक ही प्रतिचयन विधि उपयुक्त प्रतीत होती हो।

स्तरित प्रतिचयन

परिभाषा एक समग्र को किसी लक्षण के आधार पर कुछ सजातीय वर्गों [स्तरो (strata)] म विभाजित करने और प्रत्येक वर्ग [स्तर (stratum)] मे से एक स्वतन्त्र प्रतिदर्श का चयन करने की क्रिया को स्तरित प्रतिचयन कहते हैं।

इस प्रकार के प्रतिचयन की आवश्यकता मुख्यतया तब होती है जबकि समग्र मे किसी लक्षण के प्रति विजातीयता हो और सीमित व्यय ही करना हो। स्तरित प्रतिचयन करने के कुछ कारणो को निम्न प्रकार समझ सकते हैं —

(i) यदि स्वीकार योग्य त्रुटि दी हुई हो तो कम प्रतिदर्श परिमाण अर्थात् कम व्यय की आवश्यकता होती है या यदि कुल व्यय दिया हो तो त्रुटि कम होती है।
(ii) बहुधा समग्र के कुछ भागो के माध्यो के मानो का आकलन करना आवश्यक होता है।
(iii) कई बार समग्र के विभिन्न भागो मे विभिन्न प्रकार के प्रतिचयन ढाँचे होते हैं। इस कारण इन भागो मे भिन्न भिन्न प्रतिचयन विधि का प्रयोग करना होता है।
(iv) बहुधा समग्र के विभिन्न भागो मे भाषा या अन्य कारणो से अलग अलग अन्वेषकों (investigators) को कार्य करना होता है। सगठन (organisation) के लिए इस अवस्था मे स्तरित प्रतिचयन सुविधाजनक है।

स्तरण (stratification) के कुछ उदाहरण इस प्रकार हैं। औद्योगिक सगठनो सम्बन्धी सर्वेक्षण मे स्तरण कर्मचारियो की सख्या के आधार पर किया जा सकता है, किसी खेत सम्बन्धी अध्ययन के लिए किसानों को जोत के आधार पर स्तरण (stratification) कर सकते हैं। इसी प्रकार जैव सम्बन्धी अध्ययनो के लिये जीवो की आयु, भार या नस्ल आदि के आधार पर स्तरण करना तर्कसगत (logical) प्रतीत होता है, आदि।

प्रत्येक स्तर को एक परिमित समग्र के रूप मे मान कर इन मे से एक स्वतन्त्र, उचित परिमाण के प्रतिदर्श का चयन कर लेते हैं। प्रतिदर्श का चयन सब स्तरों मे से एक ही प्रतिचयन विधि या भिन्न भिन्न विधियों का प्रयोग करके करते हैं जैसा भी प्रत्येक समग्र के लिए उपयुक्त प्रतीत हो। व्यवहार मे प्रत्येक स्तर से अधिकतर सरल यादृच्छिक प्रतिचयन विधि का प्रयोग करके स्वतन्त्र प्रतिदर्शों का चयन किया जाता है। प्रतिदर्शों का परिमाण प्राय स्तरो के परिमाण के अनुपात में लिया जाता है।

समग्र के लिये आवश्यक आकलनो का परिकलन प्रत्येक स्तर द्वारा प्राप्त आकलकों का उचित ढग से समन्वय करके करते हैं। यह आकलक अधिक परिशुद्ध एवं विश्वसनीय होते हैं।

स्तरित प्रतिचयन विधि प्रशासन की दृष्टि से भी अधिक उपयोगी है। यदि किसी सर्वेक्षण के लिए अनेकों मण्डलो (Zones) की स्थापना की गयी है तो प्रत्येक मण्डल को एक स्तर के रूप मे प्रयोग कर सकते हैं। स्तरित प्रतिचयन का एक मुख्य लाभ यह भी है कि समग्र के किसी चर के लिए आकलन की दक्षता उतनी ही प्रति एकक व्यय करने पर पर्याप्त बढ जाती है। उपर्युक्त विवेचन के पढने से स्पष्ट है कि स्तरित प्रतिचयन में निम्न बातो की ओर विशेष ध्यान देना आवश्यक है। इन्हीं बातों का संक्षेप में वर्णन भी दिया गया है :—

(1) चर का निर्णय करना जिसके आधार पर स्तरण करना है।
(2) स्तरो की सख्या निर्धारित करना।
(3) स्तरो के लिये प्रतिदर्श परिमाण का नियतन करना।
(4) स्तरो के अनुकूलतम बिन्दुओं का निर्धारण करना।
(5) स्तरो से प्रतिदर्श चयन करने की विधि का निर्णय करना।
(6) प्रत्येक स्तर के लिए उचित आकलको का परिकलन करना तथा इनका समन्वय करके समग्र के प्रति आकलनो को ज्ञात करना।

(1) स्तरण के लिये आधार चर पूर्णतया सर्वेक्षण के उद्देश्य पर निर्भर करता है। साथ ही इस चर के लिए प्रत्येक एकक पर सूचना उपलब्ध होनी आवश्यक है जिससे यह तय किया जा सके कि कौनसा एकक किस स्तर मे रखा जाये। स्तरण के लिए आधार चर सम्बन्धी उदाहरण पिछले खण्ड मे दिये जा चुके हैं। वास्तव मे चर का निर्णय करने के लिये कोई नियम बताना असम्भव है। केवल यह ही कहा जा सकता है कि चर ऐसा होना चाहिये कि रचित स्तर अधिक से अधिक सजातीय हो और इस चर का आकलकों पर प्रभाव न पडता हो।

(2) यदि समग्र के विषय मे पर्याप्त जानकारी उपलब्ध हो तो अधिक से अधिक स्तरो का गठन करना लाभप्रद है। स्तर जितने अधिक सजातीय होते हैं उतना ही प्रत्येक स्तर मे से कम प्रतिचयन एकको का चयन करना होता है। यहाँ तक कि कुछ स्थितियो मे केवल दो एकको का ही एक स्तर से प्रतिदर्श के रूप मे चयन करना पर्याप्त है।

स्तरों की सख्या निश्चित करने के लिए कुछ सूत्र भी दिये गये हैं। किन्तु इनको इस पुस्तक के स्तर से ऊपर मानकर नही दिया गया है।

(3) स्तरों के लिए प्रतिदर्श परिमाण के निश्चय करने को नियतन (allocation) कहते हैं। किसी एक स्तर से चयनकृत प्रतिदर्श के परिमाण का उस स्तर में आकलकों की परिशुद्धि पर प्रभाव पडता है। अत स्तर का प्रतिदर्श परिमाण n_h के नियतन का समग्र के प्रति आकलक की परिशुद्धि बढाने हेतु अत्यधिक महत्व है। नियतन का विशद विवरण आकलको के बाद दिया गया है।

(4) सामान्यत स्तर प्रशासनिक सुविधा या भौगोलिक दृष्टि से स्वत ही निर्मित होते हैं। किन्तु कुछ स्थितियों में स्तरों की रचना स्वयं करना लाभप्रद होता है। उस स्थिति में यह उपयुक्त है कि स्तरों की सीमा का निर्धारण इस प्रकार किया जाय कि एक निर्दिष्ट आकार के प्रति स्तरित प्रतिचयन द्वारा प्राप्त परिणाम अधिक परिशुद्ध हों। सीमा निर्धारण की अनेकों विधियाँ हैं किन्तु इनका विवरण इस पुस्तक के क्षेत्र से बाहर रखा गया है।

(5) प्राय समष्टि के विषय में एक ही लक्षण के प्रति अतिरिक्त सूचना उपलब्ध नहीं होती है। अत प्राप्त जानकारी के आधार पर अर्थात् विभिन्न लक्षणों के आधार पर स्तरों की रचना कर दी जाती है और इन स्तरों के अनुसार जो प्रतिचयन विधि उपयुक्त होती है उस विधि द्वारा प्रत्येक स्तर में से स्वतन्त्र रूप में प्रतिदर्श का चयन कर लिया जाता है।

(6) आकलकों का विवरण देने से पूर्व कुछ संकेतों का परिचय देना आवश्यक है।

समष्टि में एककों की संख्या $= N$

कुल प्रतिदर्श परिमाण $= n$

स्तरों की संख्या $= K$

h वें स्तर का परिमाण $= N_h$ जहाँ $h = 1, 2, 3, \ldots, K$

h वें स्तर से प्रतिदर्श का परिमाण $= n_h$

h वें स्तर की प्रतिचयन भिन्न $= \frac{n_h}{N_h} = w_h$ और अनुपात $W_h = \frac{N_h}{N}$

h वें स्तर का माध्य $= \mu_h$ और प्रतिदर्श माध्य $\overline{x_h}$

h वें स्तर का प्रसरण $= S_h^2$ और प्रतिदर्श प्रसरण s_h^2

और

$$N_1 + N_2 + N_3 + \ldots + N_K = N$$

$$n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_K = n$$

माना कि h वें स्तर में किसी चर पर प्रेक्षण

$$X_1, X_2, X_3, \ldots, X_{N_h}$$

हैं और प्रतिदर्श में

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n_h}$$

हैं तो विभिन्न आकलन निम्न प्रकार हैं :—

h वें स्तर का माध्य $\quad \bar{X}_h = \sum_{i=1}^{N_h} X_{hi}/N_h \quad$ ....(12 19)

h वें स्तर के लिए प्रतिदर्श माध्य $\bar{x}_h = \sum_{i=1}^{n_h} x_{hi}/n_h$ ....(12.20)

h वें स्तर का प्रसरण,

$$S_h^2 = \frac{1}{N_h - 1} \sum_{i=1}^{N_h} (X_{hi} - \bar{X}_h)^2 \qquad ....(12.21)$$

और प्रतिदर्श प्रसरण,

$$s_h^2 = \frac{1}{n_h - 1} \sum_{i=1}^{n_h} (x_{hi} - \bar{x}_h)^2 \qquad ....(12\ 22)$$

यह सिद्ध किया जा सकता है कि S_h^2 का अनभिनत आकलक s_h^2 है। यदि समग्र का माध्य μ है तो स्तरित प्रतिचयन की स्थिति में इसका एक अनभिनत आकलक

$$\bar{x}_{st} = \frac{\sum_{h=1}^{K} N_h \bar{x}_h}{N} \qquad ....(12.23)$$

होता है।

आकलक $\bar{x}_{st}$ का प्रसरण,

$$V(\bar{x}_{st}) = \frac{1}{N^2} \sum_{h=1}^{K} N_h (N_h - n_h) \frac{S_h^2}{n_h} \qquad ....(12.24)$$

$$= \sum_{h=1}^{K} \left(1 - \frac{n_h}{N_h}\right) W_h^2 \cdot \frac{S_h^2}{n_h} \qquad ....(12{\cdot}25)$$

जहाँ $W_h = \frac{N_h}{N}$

आकलक $\bar{x}_{st}$ का प्रसरण, जबकि $\frac{n_h}{N_h}$ अल्पतम हो तो निम्न होता है :—

$$V(\bar{x}_{st}) \doteqdot \sum_{h=1}^{K} \frac{W_h^2 S_h^2}{n_h} \qquad ....(12\ 26)$$

$V(\bar{x}_{st})$ का अनभिनत आकलक,

$$v(\bar{x}_{st}) = \sum_{h=1}^{K} \left(1 - \frac{n_h}{N_h}\right) \frac{W_h^2 s_h^2}{n_h} \qquad ....(12.27)$$

होता है।

यदि $\frac{n_h}{N_h}$ अत्यल्प हो तो,

$$v(\bar{x}_{st}) \doteq \sum_{h=1}^{K} \frac{W_h^2 s_h^2}{n_h} \qquad ....(12.27.1)$$

यह भी सुगमता से सिद्ध किया जा सकता है कि $\bar{x}_h$, $\bar{X}_h$ का और $\bar{x}_{st}$, $\bar{X}$ का अनभिनत आकलक है।

यदि X और Y दो सहचर हैं तो इनमें h वें स्तर में सहप्रसरण,

$$S_{hXY} = \frac{\sum_{h=1}^{K} (X_{hi} - \bar{X}_h)(Y_{hi} - \bar{Y}_h)}{N_h - 1} \qquad ....(12.28)$$

है और आकलित सहप्रसरण,

$$s_{hxy} = \frac{\sum_{h=1}^{K} (x_{hi} - \bar{x}_h)\ (y_{hi} - \bar{y}_h)}{n_h - 1} \qquad ....(12.29)$$

जबकि s_{hxy}, S_{hXY} का अनभिनत आकलक है।

अनुपातों के लिए आकलक ज्ञात करना

यदि एककों को केवल दो वर्गों G_1 और G_2 में रखा जा सकता है और h वें स्तर के वर्ग G_1 में एककों की संख्या M_h है और इसके लिए प्रतिदर्श में संख्या m_h है तो

$$P_h = \frac{M_h}{N_h} \quad \text{और} \quad p_h = \frac{m_h}{n_h} \qquad ....(12.30)$$

माना कि वर्ग G_1 में पूर्ण अनुपात P है, तो

$$P = \sum_{h=1}^{K} W_h P_h \qquad ....(12.31)$$

स्तरित प्रतिचयन के अन्तर्गत वर्ग G_1 में अनुपात, P का आकलित मान,

$$p_{st} = \frac{\sum_{h=1}^{K} N_h p_h}{N} = \sum_{h=1}^{K} W_h p_h \qquad ....(12.32)$$

और p_{st} का प्रसरण

$$V(p_{st}) = \frac{1}{N^2} \sum_{h=1}^{K} \frac{N_h^2 (N_h - n_h)}{N_h - 1} \cdot \frac{P_h Q_h}{n_h} \qquad ....(12.33)$$

जहाँ $Q_h = (1 - P_h)$

यदि $\frac{n_h}{N_h}$ लघु न हो तो भी संख्या $\frac{1}{N_h}$ उपेक्षणीय ही होती है अतः सूत्र (12.33) को निम्न रूप में लिख सकते हैं :—

$$V(p_{st}) = \frac{1}{N^2} \sum_{h=1}^{K} N_h (N_h - n_h) \frac{P_h Q_h}{n_h} \quad \text{....(12.33.1)}$$

यदि प्रतिचयन भिन्न उपेक्षणीय हो

$$V(p_{st}) = \frac{1}{N^2} \sum_{h=1}^{K} N_h^2 \frac{P_h Q_h}{n_h} \quad \text{....(12.33 2)}$$

$$V(p_{st}) = \sum_{h=1}^{K} W_h^2 \frac{P_h Q_h}{n_h} \quad \text{....(12.33 3)}$$

$V(p_{st})$ का अनभिनत आकलक

$$v(p_{st}) = \frac{1}{N^2} \sum_{h=1}^{K} N_h (N_h - n_h) \frac{p_h q_h}{n_{h-1}} \quad \text{....(12.34)}$$

प्रतिचयन भिन्न उपेक्षणीय होने की स्थिति में,

$$v(p_{st}) = \sum_{h=1}^{K} W_h^2 \frac{p_h q_h}{n_{h-1}} \quad \text{....(12.34 1)}$$

नियतन

सूत्र (12.25) से विदित है कि $\overline{x}_{st}$ का प्रसरण, स्तर प्रतिदर्श परिमाण n_h का फलन है। अत. n_h का चयन इस प्रकार किया जाना चाहिये कि जिससे प्रसरण कम हो जाये। नियतन की कुछ प्रविधियाँ निम्न हैं :—

आनुपातिक नियतन :—प्रायः ऐसा अनुभव किया गया है कि छोटे स्तर में प्रसरण कम और बृहद् में प्रसरण अधिक होता है। इस बात को ध्यान में रखने पर अच्छे आकलक प्राप्त करने हेतु छोटे स्तर में से छोटा प्रतिदर्श और बड़े स्तर में से बड़ा प्रतिदर्श लेना उचित है। अतः प्रत्येक स्तर में से प्रतिचयन इस प्रकार करते हैं कि स्तरित प्रतिचयन-भिन्न समान रहती है। इस प्रकार के नियतन को आनुपातिक नियतन कहते हैं। गणितीय रूप में

$$\frac{n_h}{N_h} = \frac{n}{N} \quad \text{....(12.35)}$$

या $$n_h = n \cdot \frac{N_h}{N} = n\,W_h \quad \text{....(12.36)}$$

अनुपातिक नियतन के अन्तर्गत प्रसरण,

$$V_p\ (\bar{x}_{st}) = \left(1 - \frac{n}{N}\right) \sum_{h=1}^{K} \frac{W_h S_h^2}{n} \qquad \text{....(12 37)}$$

यदि $\frac{n}{N}$ उपेक्षणीय हो तो इस स्थिति में,

$$V_p\ (\bar{x}_{st}) = \sum_{h=1}^{K} \frac{W_h S_h^2}{n} \qquad \text{....(12 38)}$$

यह नियतन क्रिया-विधि में सुगम होने के कारण प्रायः इसका प्रयोग किया जाता है।

अनुकूलतम नियतन :—स्तरित प्रतिचयन के लिए व्यय फलन निम्न रूप में दिया जा सकता है :—

$$C = C_0 + \sum_{h=1}^{K} n_h\ C_h \qquad \text{....(12.39)}$$

जबकि C_0 बंधी लागत है और C_h, h वें स्तर में एक एकक के सर्वेक्षण का औसत व्यय है। C कुल व्यय को सूचित करता है। अनुकूलतम नियतन के लिए निम्न व्यञ्जक को लग्राज गुणक विधि द्वारा न्यूनतम करके n_h का मान ज्ञात कर लिया जाता है।

$$Q = \sum_{h=1}^{K} \frac{W_h^2 S_h^2}{n_h} - \lambda \left(C - C_0 - \sum_{h=1}^{K} n_h\ c_h\right) \qquad \text{....(12.40)}$$

सीधी ओर के व्यञ्जक को Q मान लिया गया है और λ एक लग्रांज गुणक है।

Q का n_h के सम्बन्ध में आंशिक अवकलन करके शून्य के समान रखकर प्राप्त समीकरण को हल करने पर,

$$n_h = n \frac{W_h\ S_h/\sqrt{C_h}}{\sum_h (W_h S_h/\sqrt{C_h})} \qquad \text{....(12 41)}$$

n_h का मान सूत्र (12 25) में रखने पर अनुकूलतम नियतन के अन्तर्गत $\bar{x}_{st}$ का प्रसरण ज्ञात हो जाता है जो कि निम्न है :—

$$V_0\ (\bar{x}_{st}) = \frac{1}{n}\left(\sum_h \frac{W_h S_h}{\sqrt{C_h}}\right)\left(\sum_h W_h S_h\ \sqrt{C_h}\right) - \frac{1}{N}\sum_h W_h S_h^2 \qquad \text{....(12.42)}$$

अनुकूलतम नियतन निम्न दो स्थिति में हो सकता है :—

(क) यदि सर्वेक्षण का व्यय 'C' नियत हो तो n_h का वह मान ज्ञात करते हैं कि जिससे $V\ (\bar{x}_{st})$ न्यूनतम हो जाये। इस स्थिति में n का मान बंधी लागत के पदों में निम्न होता है :—

$$n = \frac{(C - C_0 \sum_h (W_h S_h/\sqrt{C_h})}{\sum_h W_h S_h \sqrt{C_h}} \quad ....(12.43)$$

(12.41) में n का मान रखने पर,

$$n_h = \frac{(C - C_0) W_h S_h/\sqrt{C_h}}{\sum_h W_h S_h \sqrt{C_h}} \quad ....(12.44)$$

(12 42) में n का मान (12 43) द्वारा रखने पर,

$$V_0(\bar{x}_{st}) = \frac{(\sum_h W_h S_h \sqrt{C_h})^2}{(C - C_0)} - \frac{1}{N} \sum_h W_h S_h^2 \quad ....(12\ 45)$$

यदि $\frac{N_h}{N^2}$ अत्यल्प हो तो,

$$v_0(\bar{x}_{st}) = \frac{(\sum_h W_h S_h \sqrt{C_h})^2}{C - C_0} \quad ....(12.45.1)$$

स्थिति (ख) . यदि पूर्व निर्धारित स्तरित प्रतिदर्श प्रसरण V_0 ही प्राप्त करना हो तो हमें n_h के ऐसे मान ज्ञात करने है कि जिससे सर्वेक्षण का व्यय C न्यूनतम हो जाये।
लग्राज विधि द्वारा व्यञ्जक,

$$Q_1 = C_0 + \sum_{h=1}^{K} n_h C_h - \lambda_1 \left(V_0 - \sum_{h=1}^{K} \frac{W_h^2 S_h^2}{n_h} \right) \quad ....(12.46)$$

को न्यूनतम करने पर, n का मान निश्चित प्रसरण के लिए निम्न है :—

$$n = \frac{(\sum_h W_h S_h \sqrt{C_h}) \sum_h W_h S_h/\sqrt{C_h}}{V_0 + \left(\frac{1}{N} \sum_h W_h S_h^2\right)} \quad ....(12.47)$$

n का मान (12.41) में रखने पर,

$$n_h = \frac{\sum_h W_h S_h \sqrt{C_h} \cdot \left(\frac{W_h S_h}{\sqrt{C_h}}\right)}{V_0 + \left(\frac{1}{N} \sum W_h S_h^2\right)} \quad ....(12.48)$$

यदि प्रत्येक स्तर में प्रति एकक व्यय समान हो अर्थात्

$$C_1 = C_2 = C_3 = ... = C_K = C'$$

हो तो सूत्र (12.41) निम्न हो जाता है :—

$$n_h = n \frac{W_h S_h}{\sum W_h S_h} \quad ....(12.49)$$

नियतन का यह सूत्र नेमैन नियतन (Neyman allocation) कहलाता है। इसे नेमैन ने सन् 1934 में दिया था।

इस नियतन के अन्तर्गत $\bar{x}_{st}$ का प्रसरण सूत्र (12 42) की सहायता से निम्न होता है —

$$V_{Ney}(\bar{x}_{st}) = \frac{1}{n}\left(\sum_h W_h S_h\right)^2 - \frac{1}{N}\sum_h W_h S_h^2 \quad ....(12\ 50)$$

इस नियतन में n का मान पूर्व निर्धारित होता है।

सरल यादृच्छिक तथा स्तरित प्रतिचयन के अन्तर्गत आकलित माध्य के प्रसरण की तुलना

माना कि प्रतिदर्श माध्य के प्रसरण को सरल यादृच्छिक प्रतिचयन, नेमन नियतन व आनुपातिक नियतन के सहित स्तरित प्रतिचयन की स्थिति में क्रमशः V_{ran} V_{Ney} और V_{prop} द्वारा निरूपित किया गया है तो यह सिद्ध किया जा सकता है कि,

$$V_{ran} - V_{Ney} = \frac{N-n}{nN}\sum_h W_h \left(S_h - \bar{S}\right)^2 + \frac{N-n}{nN}\left(\mu_h - \mu\right)^2 \quad ....(12\ 51)$$

जहाँ $\bar{S} = \sum_h W_h S_h$

और

$$V_{ran} - V_{prop} = \frac{N-n}{nN}\sum W_h \left(\mu_h - \mu\right)^2 \quad ....(12\ 52)$$

उपर्युक्त सम्बन्धों से स्पष्ट है कि

$$V_{ran} \geq V_{prop} \geq V_{Ney} \quad ...(12\ 53)$$

क्रमबद्ध प्रतिचयन

माना कि समष्टि में N एकक हैं और इनमें से n एककों के प्रतिदर्श का चयन करना है। इन N एककों को $\frac{N}{n}$ समूहों में विभाजित कर दिया जाता है। माना कि $\frac{N}{n} = K$, अर्थात् प्रत्येक समूह में K एकक हैं। इन समूहों को K स्तरों में भी समझा जा सकता है तथापि किसी लक्षण के प्रति स्तरों में भी समझा जा सकता है तथापि किसी लक्षण के प्रति स्तरों की रचना नहीं की गयी है। पहले समूह के 1 से K तक एककों में से एक एकक का सरल यादृच्छिक प्रतिचयन द्वारा चयन कर लिया जाता है और फिर इस एकक से आगे प्रत्येक Kवें एकक का प्रत्येक समूह में से चयन कर लेते हैं। माना कि 1 से K में mवें एकक का चयन किया गया है तो अन्य समूहों में $(m+K)$, $(m+2K)$, ..., $(m+\overline{n-1}K)$वें एककों का चयन कर लिया जाता है। जैसे माना कि समष्टि में 30 एकक हैं और इनमें से

6 एकको के प्रतिदर्श का क्रमबद्ध प्रतिचयन विधि से चयन करना है। अत यहाँ $K=5$ है। माना कि दूसरे एकक का सरल याद्दच्छिक प्रतिचयन विधि द्वारा चयन हुआ है तो 7, 12, 17, 22, 27वें एकको का चयन करना होता है। इस प्रकार के प्रतिचयन को रेखीय क्रमबद्ध प्रतिचयन (Linear systematic sampling) कहते हैं क्योंकि इस प्रतिचयन को ज्यामिति मे रेखा द्वारा निरूपित कर सकते हैं। ऊपर दिये गये उदाहरण के लिए निरूपण निम्न चित्र मे दिया गया है —

0	0	0	×	0	×	0	×	0	×	0	×	0
1	2	5	7	10	12	15	17	20	22	25	27	30

चित्र 12–2 क्रमबद्ध प्रतिचयन का रेखिक निरूपण

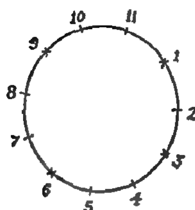
यदि एकको का कार्डों के रूप मे चयन करना है तो रैक मे रक्खे कार्डों की ऊँचाई नाप ली जाती है और उसे ऊँचाई के आधार पर समूहो मे बाँट दिया जाता है। माना कि प्रत्येक समूह 5 सें० मी० लम्बाई का है। पहले समूह म से एक कार्ड का याद्दच्छिक विधि द्वारा चयन कर लिया जाता है और फिर इस कार्ड से प्रत्येक 5 से० मी० की दूरी पर स्थित कार्ड का चयन कर लिया जाता है। इस प्रकार सुगमता से प्रतिदर्श का चयन हो जाता है तथापि प्रत्येक Kवें एकक का सिद्धान्त पूर्णतया सत्य नही रहता है।

व्यवहार मे $N=nK$ की स्थिति प्राय नहीं पायी जाती है अर्थात् K एकको के प्रत्येक समूह की रचना नही हो सकती है। तो इस स्थिति मे प्रतिदर्श का चयन वृत्तीय क्रमबद्ध प्रतिचयन विधि द्वारा किया जा सकता है जोकि निम्न प्रकार है —

वृत्तीय क्रमबद्ध प्रतिचयन

उपर्युक्त खण्ड मे दिया है कि $N=nk$ न होने की स्थिति मे प्रतिदर्श परिमाण n के स्थान पर $(n-1)$ होना सम्भव है और प्रतिदर्श माध्य भी एक अभिनत आगणक होता है। इस कमी को दूर करने के लिए डी० बी० लहरी (D B Lahiri) ने 1952 मे राष्ट्रीय प्रतिदर्श सर्वेक्षण (National Sample survey) मे वृत्तीय क्रमबद्ध प्रतिचयन का प्रयोग किया। इस विधि के अन्तर्गत भिन्न $\frac{N}{n}$ के निकटतम संख्या को k के समान मान लेते है। फिर एक एकक का चयन का चयन 1 से N तक एकको मे से याद्दच्छिक विधि से करते हैं। माना कि यह संख्या m है तो फिर प्रत्येक $(m+ik)$ वें एकक (जबकि $m+ik<N$) या $(m+ik-N)$ वें एकक (जबकि $m+ik>N$) का चयन कर लिया जाता है। इस समग्र एकको को एक वृत्त की परिधि पर स्थित मान सकते हैं। इस प्रकार समूहो को अलग-अलग नहीं बनाना होता है। $N=11$, $n=4$ की स्थिति मे ज्यामितीय निरूपन निम्न रूप मे कर सकते हैं —माना कि $m=3$ है।

इस स्थिति मे $k=3$ लेना उचित है।



चित्र 12–3 वृत्तीय क्रमबद्ध प्रतिचयन का प्रदर्शन

इस प्रकार प्रतिदर्श मे चयन किये गये एकक 3, 6, 9, 1 क्रम सख्या वाले हैं

यदि $N=nk$ हो तो वृत्तीय तथा रैखीय क्रमबद्ध प्रतिचयन एक समान हो जाते हैं।

क्रमबद्ध प्रतिचयन विधि अन्य दो गयी विधियो की अपेक्षा सरल है और इसके द्वारा प्राप्त आकलक भी अनभिनत एव विश्वसनीय होते हैं। यह विधि मुख्यत उस स्थिति मे उपयुक्त है जबकि प्रतिचयन एकक किन्ही कार्डों (Cards) के रूप मे हो और यह कार्ड एक साथ रैक मे रखे हो। इस विधि का प्रयोग प्राय वन सम्बन्धी सर्वेक्षणो या मछली पकडने सम्बन्धी सर्वेक्षणो मे होता है।

प्राचलों के लिए सूत्र

माना कि n परिमाण के क्रमबद्ध प्रतिदर्श मे किसी लक्षण के प्रति प्रेक्षण $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_j, \ldots, X_n$ हैं तो प्रतिदर्श माध्य

$$\bar{X}_{sy}=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j \qquad \ldots(12.54)$$

और प्रतिदर्श माध्य का प्रसरण $V(\bar{x}_{sy})$ जबकि $N=nk$

$$V(\bar{X}_{sy})=\frac{N-1}{N}S^2-\frac{k(n-1)}{N}S^2_{wsy} \qquad \ldots(12.55)$$

जहाँ

$$S^2=\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(X_{ij}-\mu)^2$$ जबकि X_{ij}, iवें क्रमबद्ध प्रतिदर्श मे j वाँ एकक है

और $$\frac{N-1}{N}S^2=\sigma^2$$

S^2_{wsy} क्रमबद्ध प्रतिदर्शों के अन्दर प्रसरण है। अतः

$$S^2_{wsy} = \frac{1}{k(n-1)} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} (X_{ij} - \overline{X}_i)^2$$

$$\frac{k(n-1)}{N} S^2_{wsy} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} (X_{ij} - \overline{X}_i)^2 = \sigma_w^2 \quad \ldots (12.56)$$

$$V(X_{sy}) = \sigma^2 - \sigma_w^2 \quad \ldots (12.57)$$

व्यंजक (12.57) से स्पष्ट है कि σ^2 समग्र प्रसरण है जो कि एक अचर सख्या है और σ_w^2 प्रतिदर्श के अन्दर प्रसरण है। $V(\overline{x}_{sy})$ कम होने के लिए यह आवश्यक है कि σ_w^2 अर्थात् प्रतिदर्श के अन्दर प्रसरण अधिक हो। अत एक क्रमबद्ध प्रतिदर्श में एकक जितने अधिक विजातीय होंगे उतना ही लाभप्रद है। प्रतिदर्श में एकको के अन्दर विजातीयता होने के लिए विभिन्न समूहो का विजातीय होना आवश्यक है। इस विवेचन से यह निष्कर्ष निकलता है कि क्रमबद्ध प्रतिचयन अच्छा सिद्ध होगा जब समूह के एकक विचाराधीन लक्षण के प्रति सजातीय हो और विभिन्न समूहों के लिए इस लक्षण के प्रति एक दूसरे से अधिक से अधिक भिन्न हो।

क्रमबद्ध प्रतिचयन की सरल यादृच्छिक प्रतिचयन से तुलना

क्रमबद्ध प्रतिचयन विधि मे 1 से k तक एकको मे से एक ?वें एकक का चयन यादृच्छिक विधि से करते हैं अर्थात् k सम्भव प्रतिदर्शों का चयन समान प्रायिकता से करते हैं। सरल यादृच्छिक प्रतिचयन द्वारा कुल सम्भव $\binom{N}{n}$ प्रतिदर्शों मे से एक प्राप्त होता है। केवल इन दोनो विधियो मे अन्तर इतना है कि क्रमबद्ध प्रतिचयन अन्य विधियो की अपेक्षा क्रियात्मक दृष्टि से सुगम है क्योकि इसमे कम समय तथा धन लगता है। किन्ही उपयुक्त परिस्थितियों मे इस विधि के अन्तर्गत आकलक अन्य की अपेक्षा अधिक परिशुद्ध होते हैं।

गुच्छ प्रतिचयन : अब तक दी गयी विधियों मे सदैव मूल एकक (elementary unit) का किसी अध्ययन के हेतु चयन किया गया। मूल एकक से हमारा अभिप्राय उस एकक से है जिस पर विप्रेक्षण लिए जाते हैं। इन एकको का प्रयोग करने मे अनेको कठिनाइयाँ भी आ सकती हैं। जैसे,

(i) मूल एककों के लिए प्रतिचयन ढाँचा उपलब्ध न हो और इसे तैयार करने मे बहुत धन तथा समय की आवश्यकता पडती हो,

(ii) प्रतिदर्श एकक एक दूसरे से अधिक दूरी पर स्थित हो और एक एकक से दूसरे एकक तक जाने में व्यय एव समय अधिक लगता हो,

(iii) सर्वेक्षण-क्षेत्र मे एकको को पहचानने और इनकी स्थिति निर्धारण करने मे अधिक समय लगता हो, आदि।

ये कठिनाइयाँ क्रियात्मक दृष्टि से पर्याप्त जटिल है, अत इन्हें कम करने के हेतु गुच्छ प्रतिचयन एक अच्छी प्रतिचयन विधि है।

गुच्छ प्रतिचयन के अन्तर्गत समग्र के मूल एककों को गुच्छों (समूहों) में विभाजित कर दिया जाता है। इन गुच्छों को प्राथमिक एकक (primary unit) के रूप में प्रयोग करते हैं जैसे परिवारों सम्बन्धी सर्वेक्षण में समीप में स्थित मकानों द्वारा सूचना प्राप्त करना, दूर-दूर स्थित मकानों की अपेक्षा सुगम है। अत किसी बड़े शहर में विभिन्न मुहल्लों (क्वार्टरों) को, किसी प्रदेश में निकट के गाँवों को या सस्य (crop) सम्बन्धी सर्वेक्षण में एक बड़े क्षेत्र को मूल एकक के रूप में मान लेते हैं और इनमें से निश्चित परिमाण के प्रतिदर्श का चयन किसी भी पहले दी गयी विधि द्वारा कर लिया जाता है। सर्वेक्षण करते समय प्रत्येक चयन किये गये प्राथमिक एकक में सम्मिलित सभी मूल एककों के विषय में आवश्यकतानुसार जानकारी (आँकड़े) एकत्रित करनी जाती है। गुच्छ बनाते समय यह सावधानी रखनी चाहिये कि गुच्छ परस्पर व्यापी (overlapping) न हों अर्थात् परस्पर-अपवर्जी (mutually exclusive) होने चाहिये।

गुच्छ प्रतिचयन अन्य प्रतिचयन विधियों, जिनमें कि प्रत्येक प्रतिदर्श में एकक का चयन समग्र में मूल एककों की सूची द्वारा किया जाता है, की अपेक्षा कम दक्ष (efficient) है। इसका कारण यह है कि गुच्छ प्रतिचयन में प्रतिदर्श प्रसरण अन्य की अपेक्षा कम होता है, क्योंकि व्यवहार में ऐसा पाया गया है कि गुच्छ में एककों में समानताएँ अधिक होती हैं अपेक्षा उनके कि जो दूर पर स्थित हैं। फिर भी गुच्छ प्रतिचयन व्यावहारिक दृष्टि से सुविधाजनक होने के कारण अनेक सर्वेक्षणों में प्रयोग किया जाता है और इस दक्षता की हानि को समय तथा धन के बचाने के लिए सहन करना उपयुक्त समझा जाता है।

माध्य तथा प्रसरण के लिए सूत्र

माना कि,

समग्र में मूल एककों की संख्या $=NM$

समग्र में प्राथमिक एकक (गुच्छों की संख्या) $=N$

एक गुच्छ में मूल एककों की संख्या $=M$

प्राथमिक एककों के प्रतिदर्श का परिमाण $=n$

प्रतिदर्श में मूल एककों की संख्या $=nM$

यदि i वें गुच्छ में j वें एकक पर प्रेक्षण X_{ij} द्वारा निरूपित है तो,

i वें गुच्छ का माध्य,

$$\bar{X}_i=\frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M} X_{ij} \qquad \text{....(12 58)}$$

जहाँ $i=1, 2, 3, ...N$

समग्र माध्य,

$$\mu=\frac{1}{NM}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} X_{ij}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\bar{X}_i \qquad \text{...(12 59)}$$

समग्र प्रसरण,

$$S^2 = \frac{1}{MN-1} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} (X_{ij} - \mu)^2 \qquad ....(12.60)$$

माना कि S_b^2 और S_w^2 क्रमश गुच्छों के बीच और गुच्छों के अन्दर प्रसरण हैं।

$$S_b^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} (\bar{X}_i - \mu)^2 \qquad ....(12\ 61)$$

और

$$S_w^2 = \frac{1}{N(M-1)} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} (X_{ij} - \bar{X}_i)^2 \qquad ....(12\ 62)$$

अधिकतर $S_b^2 > S_w^2$ होता है क्योंकि गुच्छ सजातीय होते हैं। गुच्छ प्रतिचयन की सरल यादृच्छिक प्रतिचयन के सापेक्ष दक्षता,*

$$E_{ct} = \frac{\frac{NM-Mn}{NM} \cdot \frac{S^2}{nM}}{\frac{N-n}{Nn} \quad S_b^2} = \frac{S^2}{MS_b^2} \qquad ....(12\ 63)$$

ऊपर दिये हुए सूत्र की भाँति प्रतिदर्श के लिए सूत्र, गुच्छ का माध्य, जो i वी बार मे चयनकृत है,

$$\bar{x}_i = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^{M} x_{ij}\ ; \quad \text{जहाँ } i=1, 2, 3, ..., n \qquad ....(12\ 64)$$

$$s_b^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{M} (\bar{x}_i - \bar{\bar{x}})^2 \qquad ....(12\ 65)$$

$$\text{जहाँ } \bar{\bar{x}} = \frac{1}{nM} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{M} x_{ij}$$

$$s_w^2 = \frac{1}{n(M-1)} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{M} (x_{ij} - \bar{x}_i)^2 \qquad ....(12\ 66)$$

अनुकूलतम गुच्छ परिमाण —अब तक दिये विवरण से यह पता चलता है कि जैसे जैसे गुच्छ का परिमाण बढता है प्रतिचयन प्रसरण बढता है और सर्वेक्षण का व्यय घटत

* प्रतिचयन दक्षता $E = \frac{1}{V(\bar{X})}$, अत दो प्रतिचयन दक्षताओं के अनुपात को सापेक्ष दक्षता कहते हैं।

है। इसके विपरीत जैसे-जैसे गुच्छों की संख्या बढ़ती है या गुच्छ परिमाण कम होता है तो व्यय बढ़ता है और प्रतिचयन प्रसरण घटता है। अतः सन्तुलन के लिए व्यवहार में एक उचित आकार के गुच्छ बनाने होते हैं और गुच्छों की संख्या भी न वृहद् रखनी होती है और न लघु ही। आवश्यकता पड़ने पर पूर्व निर्धारित व्यय या सूक्ष्मता के लिए गणितीय विधि से भी अनुकूलतम प्रतिदर्श परिमाण एवं गुच्छ परिमाण ज्ञात कर सकते हैं। इन विधियों के लिए गणितीय कलन इस अध्याय में नहीं दिये गये हैं।

बहुक्रम प्रतिचयन

गुच्छ प्रतिचयन में कुछ गुच्छों का चयन करके प्रत्येक में विद्यमान मूल एककों पर आँकड़े एकत्रित किये जाते हैं किन्तु यदि गुच्छ में स्थित मूल एकक सजातीय हैं तो सबका सर्वेक्षण करना व्यर्थ है। क्योंकि इस स्थिति में पर्याप्त सूचना कुछ ही एककों द्वारा प्राप्त की जा सकती है और इसके आधार पर प्राप्त आगणक भी दक्ष होते हैं। इस स्थिति में एक चरण प्रतिचयन करना उपलब्ध साधनों का अपव्यय है। अतः प्रत्येक चुने हुये गुच्छ *में से भी कुछ मूल एककों का चयन किसी प्रतिचयन विधि द्वारा कर लिया जाता है।* इन एककों को द्विचरण एकक कहते हैं। इस प्रकार के प्रतिचयन को द्विचरण प्रतिचयन (two stage sampling) कहते हैं। इस नाम को सबसे पहले महालानबीज (Mahalanobis) ने दिया था। यदि द्विचरण एककों में भी अन्य एककों का चयन किया गया हो तो इसे त्रिचरण प्रतिचयन (three stage sampling) कहते हैं। इस स्थिति *में द्विचरण एकक स्वयं में अनेकों मूल एककों का समूह है।* इस प्रकार प्रतिदर्श में से प्रतिदर्श अनेक चरणों (stages) में लेने की प्रविधि को उपप्रतिचयन (sub-sampling) कहते हैं। यदि अन्तिम प्रतिदर्श का चयन दो या दो से अधिक चरणों में किया गया हो तो इसे बहुचरणी प्रतिचयन (multi-stage sampling) कहते हैं। जैसे किसी शहर में से कुछ क्षेत्रों का प्रथम चरण में चयन किया जाये और इन क्षेत्रों में से कुछ परिवारों का दूसरे चरण में चयन किया जाये तो परिवार अन्तिम एकक के रूप में प्राप्त होते हैं अतः यहाँ केवल द्विचरण प्रतिचयन का प्रयोग किया गया है।

इसी प्रकार किसी जिले में से तहसीलों, प्रत्येक तहसील में से गाँवों और गाँवों में से परिवारों के चयन करने की विधि त्रिचरण प्रतिचयन का उदाहरण है।

बहुचरणी प्रतिचयन की आवश्यकता प्रायः इस कारण भी पड़ती है कि एक ही सर्वेक्षण में कई प्रकार के अध्ययन करने का लक्ष्य होता है। इन लक्ष्यों के अनुसार विभिन्न प्रतिचयन एककों का प्रयोग करना होता है। *जैसे किसी प्रदेश में जनसंख्या का आगणन* करने तथा गाँवों में उपलब्ध वस्तुओं के विषय में जानकारी और प्रति परिवार आय आदि के विषय में अध्ययन करने के हेतु बहुचरणी प्रतिचयन प्रायः उपयोगी सिद्ध होता है।

इस विधि का प्रयोग सन् 1940 में महालानबीज ने बंगाल में सस्य सर्वेक्षण के लिए किया था। 1954 से उसका प्रयोग भारतीय राष्ट्र प्रतिदर्श सर्वेक्षण (Indian National sample survey) में प्रायः होता रहा है।

द्विचरण प्रतिचयन मे माध्य एवं प्रसरण का आकलन

समग्र म प्राथमिक एकको की सख्या $= N$

प्राथमिक एकको के प्रतिदर्श का परिमाण $= n$

i वें प्राथमिक एकक मे द्विचरण एकको की सख्या $= M_i$

i वें प्राथमिक एकक से किसी प्रतिचयन विधि द्वारा चयन किये गये द्विचरण एकको की सख्या $= m_i$

$$M = \sum_{i=1}^{N} M_i \quad \text{और} \quad \overline{M} = \sum_{i=1}^{N} M_i/N = M/N$$

माना कि दोनो चरणो मे बिना प्रतिस्थापन के समान प्रायिकता मे एकको का चयन किया गया है। i वें प्राथमिक एकक मे j वाँ प्रतिदर्श प्रेक्षण x_{ij} द्वारा सूचित है।

i वें प्राथमिक एकक के लिए प्रतिदर्श माध्य,

$$\overline{x}_i = \frac{1}{m_i} \sum_{j=1}^{m_i} x_{ij} \qquad (12\ 67)$$

प्रतिदर्श माध्य प्रति द्विचरण एकक,

$$\overline{\overline{x}}' = \sum_{i=1}^{n} M_i \overline{x}_i \Big/ \sum_{i=1}^{n} M_i \qquad (12\ 68)$$

$\overline{\overline{x}}'$ समग्र माध्य का अभिनत आकलक है। इसका एक अनभिनत आकलक निम्न रूप से दिया जा सकता है —

$$\overline{\overline{x}}'' = \sum_{i=1}^{n} M_i \overline{X}_i/n\overline{M} \qquad (12\ 68\ 1)$$

$\overline{\overline{x}}'$ के प्रसरण $V(\overline{\overline{x}}')$ का आकलित प्रसरण,

$$v(\overline{\overline{x}}') = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{N}\right) s_b'^2 + \frac{1}{nN} \sum_{i=1}^{n} \frac{M_i^2}{\overline{M}^2} \left(\frac{1}{m_i} - \frac{1}{M_i}\right) s_w^2 \qquad (12\ 69)$$

$$\text{जहाँ} \quad s_b'^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (\overline{x}_i - \overline{\overline{x}}')^2$$

$$\text{और} \quad s_{wi}^2 = \frac{1}{m_i - 1} \sum_{j=1}^{m_i} (x_{ij} - \overline{x}_i)^2$$

$\overline{\overline{x}}''$ के प्रसरण $V(\overline{\overline{x}}'')$ का आकलित प्रसरण,

$$v(\overline{\overline{x}}'') = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{N}\right) s_b''^2 + \frac{1}{nN} \sum_{i=1}^{n} \frac{M_i^2}{\overline{M}^2} \left(\frac{1}{m_i} - \frac{1}{M_i}\right) s_{wi}^2 \qquad (12\ 70)$$

$$\text{जहाँ} \quad s_b'^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{M_i}{\bar{M}} \bar{x}_i - \bar{\bar{x}}' \right)^2$$

यदि प्राथमिक एककों के परिमाण में अन्तर वृहद् हो तो प्रायः $V(\bar{\bar{x}}'')$, अभिनत आकलक $\bar{\bar{x}}'$ के प्रसरण $V(\bar{\bar{x}}')$ से अधिक हो जाता है।

परिमाण के समानुपातिक प्रायिकता प्रतिचयन

ऐसा देखा गया है कि बड़े आकार के एककों में अधिक सूचना विद्यमान होती है और लघु एककों में कम। यहाँ एककों का परिमाण अध्ययन के हेतु लिये गये चर (लक्षण) के किसी सहचर के परिमाण पर निर्भर है। जैसे किसी खेती सम्बन्धी सर्वेक्षण में खेत का क्षेत्र, किसी सामाजिक या आर्थिक अध्ययन सम्बन्धी सर्वेक्षण में परिवार के सदस्यों की संख्या या किसी फैक्ट्री सम्बन्धी अन्वेषण में फैक्ट्री में कर्मचारियों की क्षमता या उत्पादन क्षमता आदि चरों को एकक के आकार के रूप में ले सकते हैं। इन अध्ययनों में एककों का समान प्रायिकता से प्रतिचयन करने की अपेक्षा परिवर्ती प्रायिकता द्वारा चयन करना अधिक उपयुक्त है क्योंकि इस प्रकार प्राप्त आकलक अन्य विधि की अपेक्षा अधिक दक्ष होते हैं। इस प्रकार की परिवर्ती प्रायिकता प्रतिचयन विधि को परिमाण के समानुपातिक प्रायिकता प्रतिचयन कहते हैं।

परिमाण के समानुपातिक प्रायिकता से चयनकृत प्रतिदर्श द्वारा प्राप्त आकलक अभिनत होते हैं यदि प्रेक्षणों को भारित नहीं किया गया हो। इसका कारण यह है कि इस स्थिति में बड़े एककों को प्रतिदर्श में सम्मिलित होने का अधिक अवसर मिल जाता है और छोटे एककों को कम अर्थात् बड़े एककों का प्रतिदर्श में अधिक प्रतिनिधित्व होता है और छोटे एककों का कम। अतः प्रतिदर्श प्रेक्षणों को उनकी उचित प्रायिकता से भारित करके परिकलन करने पर अनभिनत आकलक प्राप्त हो जाते हैं। इस विधि को हैनसन व हुरविट्ज (Hansen and Hurwitz) ने 1942 में विस्तृत रूप में दिया था।

यदि एक समष्टि में परिमाण के समानुपातिक प्रायिकता प्रतिचयन विधि द्वारा प्रतिस्थापन सहित n एककों के एक प्रतिदर्श का चयन करना हो तो इसके लिए विधियाँ निम्न प्रकार हैं —

संचयी योग विधि :—माना कि समष्टि के N एकक $U_1, U_2, U_3, \ldots, U_N$ आकार क्रमशः $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_N$ हैं। इस विधि में प्रत्येक एकक से सम्बद्ध अन्तराल परिमाणों के संचयी योगों की सारणी से प्राप्त होते हैं।

संख्या	संचयी योग
X_1	$X_1 = C_1$
X_2	$X_1 + X_2 = C_2$
X_3	$C_2 + X_3 = C_3$
⋮	⋮
X_N	$C_{N-1} + X_N = C_N = N$

पहले एकक U_1 से सम्बद्ध अन्तराल $(1-C_1)$, U_2 से सम्बद्ध अन्तराल $(C_1+1)-C_2$, U_3 से सम्बद्ध अन्तराल $(C_2+1)-C_3$ आदि लिख देते हैं।

इसके पश्चात् 1 से X तक सख्या मे से एक का यादृच्छिक सख्या-सारणी की सहायता से चयन करते हैं। यह यादृच्छिक सख्या जिस अन्तराल मे स्थित होती है उसी अन्तराल के सगत एकक का चयन कर लिया जाता है अन्यथा नहीं।

इस विधि का मुख्य दोष यह है कि इसमे सचयी योग ज्ञात करने होते हैं जो कि N बृहत् होने की स्थिति मे पर्याप्त कठिन कार्य है जैसे किसी प्रदेश के शिक्षा सम्बन्धी सर्वेक्षण के लिए कुछ स्कूलो का ऊपर दी हुई विधि द्वारा चयन करने मे हजारो स्कूलों मे विद्यार्थियो की सख्या को X_i मानते हुये सचयी योग ज्ञात करना एक कठिन कार्य है। अत इस कठिनाई से मुक्त होने के लिये एक विधि है जो निम्न है —

लहरी विधि :—सचयी योग विधि मे विद्यमान कठिनाई को दूर करने के लिये डी० बी० लहरी (D B Lahiri) ने 1951 म एक नई विधि सुझाई। माना कि समग्र मे N एकक $U_1, U_2, U_3, \ldots, U_N$ हैं और इनके परिमाण क्रमश

$$X_1, X_2, X_3, \ldots\ldots, X_N$$

हैं तो इस विधि के अन्तर्गत इन एकको के परिमाण X_i मे जो सबसे बडी सख्या होती है उसे M से सूचित करते हैं। एकको का चयन निम्न प्रकार से करते हैं —

दो यादृच्छिक सख्याओ का, एक का 1 से N तक मे से और दूसरी का 1 से M तक मे से यादृच्छिक सख्या-सारणी की सहायता से स्वतन्त्र रूप मे चयन किया जाता है। माना कि 1 से N मे यादृच्छिक सख्या i और 1 से M तक मे सख्या K प्राप्त होती है।

यदि $K \leqslant X_i$ हो तो एकक U_i का चयन कर लिया जाता है अन्यथा एकक U_i का चयन नही किया जाता है।

अब पुन नई यादृच्छिक सख्याओ i व K को स्वतन्त्र रूप से सारणी द्वारा ज्ञात करते हैं और नियमानुसार एकक के चयन किये जाने के विषय मे निर्णय कर लेते हैं। n परिमाण *के प्रतिदर्श का परिमाण के समानुपातिक प्रायिकता से प्रतिस्थापन सहित चयन करने* मे एक के बाद एक युगल यादृच्छिक सख्याओ का चयन करते रहते हैं और तदनुसार एकको का चयन कर लिया जाता है। यही कार्यक्रम चलता रहता है जब तक कि n एकको का चयन न हो जाये।

उदाहरण 12 1 आठ नगरो की जनसख्या निम्न सारणी के अनुसार थी —

नगर क्रमसख्या :	1	2	3	4	5	[illegible]	7	8
जनसख्या (सौ व्यक्ति)	100	120	240	320	290	110	30	10

इन नगरो मे से दो नगरो का चयन परिमाण के समानुपातिक प्रायिकता से सचयी योग विधि द्वारा इस प्रकार कर सकते हैं। पहले सचयी योग एव अन्तरालों को निम्न प्रकार लिख दिया —

नगर क्रमसंख्या	जनसंख्या (सौ व्यक्ति)	संचयी योग	सम्बद्ध अन्तराल
1	100	100	1 — 100
2	120	220	101 — 220
3	240	360	221 — 360
4	320	680	361 — 680
5	290	970	681 — 970
6	110	1080	971 — 1080
7	30	1110	1081 — 1110
8	10	1120	1111 — 1120

अब यादृच्छिक संख्या सारणी संख्याओं का देखना प्रारम्भ किया। पहली यादृच्छिक संख्या जो 1120 से कम है वह 0554 है। यह संख्या अन्तराल 361 — 680 में है अत नगर 4 का चयन कर लिया जाता है। अब अगली संख्या 0709 है। इस संख्या का अन्तराल 681 — 970 में समावेश है अत नगर 5 का चयन कर लिया। इस प्रकार प्रतिदर्श में नगर 4 व 5 का चयन हुआ।

उदाहरण 12 2 ऊपर दिये उदाहरण (12 1) में दिये गये नगरों के समष्टि से यदि दो नगरों के प्रतिदर्श का चयन लहरी विधि द्वारा निम्न प्रकार कर सकते हैं .—

यहाँ $N=8$ व $M=320$ है।

पहले यादृच्छिक सारणी द्वारा 1 से 8 के बीच प्राप्त संख्या $i=6$ है, 1 से 320 के बीच संख्या $K=096$ है।

नगर 6 की जनसंख्या 110 सौ है जो कि 96 से अधिक है अत नगर 6 स्वीकृत है।

इसी प्रकार अन्य युग्म यादृच्छिक संख्याएँ $i=4$ और $K=030$ है। नगर 4 की जनसंख्या 320 है जो कि 30 से अधिक है। अत नगर 4 का चयन कर लिया जाता है। इस प्रकार चयनकृत नगर 4 व 6 है। यहाँ उन संख्याओं को छोड़ दिया गया है जिनके कारण नगर को प्रतिदर्श में सम्मिलित किया जाना सम्भव नहीं था। जैसे $i=7$ और $K=893$ नगर 7 की जनसंख्या 30 है जो कि 893 से कम है। अत नगर 7 को प्रतिदर्श में नहीं लिया जा सकता है।

आकलकों के लिए सूत्र

स्थिति I माना कि समष्टि में N एकक $U_1, U_2, U_3, \ldots, U_N$ है और इन एककों पर एक चर और सहायक चर के लिए युग्म मान $(Y_1, X_1), (Y_2, X_2), \ldots, (Y_N, X_N)$ है। इस समष्टि में परिमाण n के प्रतिदर्श का चयन परिमाण के समानुपातिक

प्रायिकता से प्रतिस्थापन सहित किया गया है। यहाँ चर x के मान किसी पूर्व में हुये सर्वेक्षण द्वारा या किसी अन्य स्रोत से प्राप्त किये गये है।

माना कि एक U_i के चयन किये जाने की प्रायिकता p_i है और i वें प्रतिचयन एकक के लिए युगल मान (y_i, x_i) हैं।

$$\text{जहाँ} \quad i=1, 2, 3, \ldots, n \qquad \text{और} \quad p_i = \frac{x_i}{X}$$

$$\text{जबकि} \quad \sum_{i=1}^{N} Y_i = Y \qquad \text{व} \quad \sum_{i=1}^{N} X_i = X.$$

Y का अनभिनत आकलक,

$$\hat{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{p_i} \qquad \ldots(12\ 71)$$

होता है।

$\hat{Y}$ का प्रसरण,

$$V(\hat{Y}) = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{N} \frac{Y_i^2}{p_i} - Y^2 \right) \qquad \ldots(12\ 72)$$

$V(\hat{Y})$ का भी प्रतिदर्श प्रेक्षणो द्वारा आकलन कर सकते हैं। इसका एक अनभिनत आकलक निम्न है —

$$v(\hat{Y}) = \frac{1}{n(n-1)} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{y_i^2}{p_i^2} - n\hat{Y}^2 \right) \qquad \ldots(12\cdot73)$$

उपर्युक्त सूत्रो मे प्रत्येक $\frac{y_i}{p_i}$, Y का एक अनभिनत आकलक है और प्रत्येक $\frac{y_i}{p_i}$ का समान प्रसरण है।

स्थिति 2 : समग्र के N एककों मे से यदि n परिमाण के प्रतिदर्श का चयन परिमाण के समानुपातिक प्रायिकता से बिना प्रतिस्थापन सहित किया गया हो तो Y के आकलक $\hat{Y}$ व इसके प्रसरण व इस प्रसरण के आकलक के लिए सूत्र निम्न होते हैं।

माना कि पहला एकक U_i के चयन किये जाने के प्रायिकता P है और i वें प्रतिचयन एकक के लिये युगल प्रेक्षण (y_i, x_i) है,

जहाँ $i=1, 2, 3, \ldots, n$। मानाकि समग्र में प्रेक्षणो का योग,

$$\sum_{i=1}^{N} y_i = Y, \qquad \sum_{i=1}^{N} x_i = X$$

अतः एकक U_i का चयन करने की प्रायिकता,

$$P_i = \frac{X_i}{X}$$

और दूसरी बार में किसी एकक U_j के चयन करने की प्रायिकता,

$$= \frac{P_j}{1 - P_i}$$

जबकि $i \neq j$

जबकि एकक U_i का चयन किया जा चुका है। तीसरी बार में एकक U_m के चयन किये जाने की प्रायिकता,

$$= \frac{P_m}{1 - P_i - P}, \quad i \neq j \neq m$$

जबकि एकक U_i तथा U_j का क्रमशः पहली व दूसरी बार में चयन हो चुका है।

इसी प्रकार n एककों का एक के बाद एक करके चयन करने की प्रायिकता दी जा सकती है।

माना कि π_i, एकक U_i के प्रतिदर्श में सम्मिलित होने की प्रायिकता है,

$$\pi_i = \sum_{s=1}^{\binom{N-1}{n-1}} P\left(s_n^i\right) \qquad ....(12.74)$$

जबकि s_n^i, एक n परिमाण के क्रमित प्रतिदर्श को निरूपित करता है जिसमें कि i वाँ एकक सम्मिलित है। यहाँ Σ को समस्त सम्भव प्रतिदर्शों के लिए लिया गया है जिसमें कि i वाँ एकक सम्मिलित है।

π_{ij} = एकक U_i तथा U_j के प्रतिदर्श में सम्मिलित होने की प्रायिकता है।

$$\pi_{ij} = \sum_{s=1}^{\binom{N-2}{n-2}} P\left(s_n^{ij}\right) \qquad ....(12.75)$$

जहाँ s_n^{ij}, एक n परिमाण के क्रमित प्रतिदर्श को निरूपित करता है जिसमें कि i वाँ तथा j एकक सम्मिलित है।

माना कि Y का अनभिनत रैखीय आकलक

$$= \sum_{i=1}^{n} \beta_i y$$

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} l_i y_i\right) = \sum_{s} P\left(s_n^1\right)\left(\sum_{i=1}^{n} l_i y_i\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \pi_i l_i y_i$$

यदि $\sum_{i=1}^{N} \pi_i l_i y_i$, Y का एक अनभिनत आकलक है तो,

$$\sum_{i=1}^{N} \pi_i l_i y_i = \sum_{i=1}^{N} y_i \qquad \because \; l_i \pi_i = 1$$

$$\text{या} \quad l_i = \frac{1}{\pi_i}$$

Y का अनभिनत आकलक जो कि हूरविट्ज व थामसन (Horvitz and Thompson) ने दिया, निम्न है,

$$\hat{Y}_{HT} = \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{\pi_i} \qquad \text{....(12 76)}$$

और $\hat{Y}$ का प्रसरण,

$$V(\hat{Y}_{HT}) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j>i}^{N} (\pi_i \pi_j - \pi_{ij}) \left(\frac{Y_i}{\pi_i} - \frac{Y_j}{\pi_j}\right)^2 \quad \text{..(12 77)}$$

जहाँ $i, j = 1, 2, 3, ..., N$

$\hat{Y}$ के प्रसरण का अनभिनत आकलक जो कि हूरविट्ज व थामसन ने सन् (1952) में दिया उसके लिए सूत्र निम्न है

$$V_{HT}(\hat{Y}_{HT}) = \sum_{i=1}^{n} (1-\pi_i)\left(\frac{y_i}{\pi_i}\right)^2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{i \neq j}^{n} \frac{\pi_{ij} - \pi_i \pi_j}{\pi_{ij}} \frac{y_i}{\pi_i} \frac{y_j}{\pi_j} \quad \text{....(12 78)}$$

$\hat{Y}_{HT}$ के प्रसरण का अनभिनत आकलक जो कि येट्स व गरण्डी (Yates and Grundy) ने सन् 1953 में दिया उसके लिए सूत्र निम्न है -

$$v_{YG}(\hat{Y}_{HT}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{i>j}^{n} \frac{\pi_i \pi_j - \pi_{ij}}{\pi_{ij}} \left(\frac{Y_i}{\pi_i} - \frac{Y_j}{\pi_j}\right)^2 \quad \text{...(12 79)}$$

जबकि उपर्युक्त सूत्रों (12 78) और (12 79) में π_{ij} एकक U_i और U_j, $(i \neq j)$ के एक साथ सम्मिलित होने की प्रायिकता है।

इन सूत्रों द्वारा प्राप्त प्रसरण के आकलकों का एक मुख्य दोष यह है कि प्राय कुछ प्रतिदर्शों के लिए इनका मान ऋणात्मक आ जाता है जिसके कारण इन आकलकों का कोई अर्थ नहीं रहता और विश्वास्यता अन्तराल के लिए इनका उपयोग नहीं किया जा सकता। कुछ प्रतिदर्शों के लिए इनके द्वारा अच्छे आकलक भी प्राप्त होते हैं।

देशराज आकलक .—यदि N एककों के एक समग्र से परिमाण के समानुपातिक प्रायिकता से बिना प्रतिस्थापन सहित n एककों के एक प्रतिदर्श का चयन किया गया है तो देशराज ने समग्र योग Y का एक आकलक $\bar{t}$ दिया (यहाँ $\bar{t} = \hat{Y}$) जो एकक के चयन होने के क्रम पर आधारित है।

Y का अनभिनत आकलक,

$$\bar{t} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} t_i \qquad \dots (12\ 80)$$

जहाँ $t_i = y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_{i-1} + \frac{y_i}{p_i}\left(1 - p_1 - p_2 - \dots - p_{i-1}\right)$

और $\bar{t}$ के प्रसरण का प्रतिदर्श प्रेक्षणों के आधार पर अनभिनत आकलक निम्न है जो कि सदैव धनात्मक होता है —

$$v(\bar{t}) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} (t_i - \bar{t})^2 \qquad \dots (12\ 81)$$

विशेषत जब n=2 हो तो,

$$\bar{t} = \frac{1}{2}\left\{\frac{1+p_1}{p_1} y_1 + \frac{1-p_1}{p_2} y_2\right\} \qquad \dots (12\ 82)$$

और $v(\bar{t}) = \frac{1}{4}(t_1 - t_2)^2$

$$= \frac{1}{4}(1-p_1)^2 \left(\frac{y_1}{p_1} - \frac{y_2}{p_2}\right)^2 \qquad \dots (12\ 83)$$

यह सिद्ध किया जा सकता है कि परिमाण के समानुपातिक प्रायिकता से बिना-प्रतिस्थापन द्वारा प्रतिदर्श का चयन करने की स्थिति में देशराज आकलक, प्रतिस्थापन सहित प्रतिचयन करने की स्थिति की अपेक्षा अधिक दक्ष है। किन्तु इसके लिए आकलकों का परिकलन करने में प्रायिकताओं का परिकलन करना होता है जो कि प्रतिदर्श बृहत् होने की स्थिति में एक कठिन समस्या है। इसी कारण यहाँ बिना प्रतिस्थापन के प्रतिचयन का प्रयोग n का मान 3 या 4 तक होने की स्थिति में करते हैं। यदि प्रतिदर्श परिमाण

'n' वृहद् हो और $\frac{n}{N}$ उपक्षणीय हो तो यहाँ दोनो प्रकार के प्रतिचयन लगभग समान दक्ष होते है।

आकलन की अनुपात विधि

यहाँ उन आकलकों पर विचार करना है जिनमें दो यादृच्छिक चरो का अनुपात लिया जाता है। इसका अर्थ है कि इसमे अश व हर दोनो मे प्रतिचयन त्रुटि हो सकती है। अब यह जानने की उत्कण्ठा होती है कि इस प्रकार के आकलन की आवश्यकता ही क्या है ? इसकी आवश्यकता के कुछ उदाहरण इस प्रकार है —गेहूँ की उपज का गेहूँ के लिए बोये गये क्षेत्र से अनुपात का आकलन करना है, आयकर की प्राप्ति एव आय के अनुपात का आकलन करना है आदि। इन सभी स्थितियो मे प्रतिदर्श लेकर अनुपात का आकलन करना होता है। अनुपात आकलन, कुल मानो के आकलन के हेतु भी उपयोगी है।

आकलन की अनुपात विधि मे एक चर (Y) तो वह होता है जिसके विषय मे जानकारी प्राप्त करनी है और दूसरा चर सदैव एक सहायक चर (X) को लेना होता है। सहायक चर इस प्रकार का होना चाहिये कि इसका Y से सम्बन्ध उच्च क्रम का हो। माना कि किसी समग्र मे i वें एकक का मान Y_i है और सहायक चर का मान X_i है (जहाँ $i = 1, 2, 3, \ldots N$)। जैसे 1961 की जनगणना के अनुसार किन्ही शहरो की जनसख्या चर X द्वारा सूचित है और 1971 की जनगणना के अनुसार इनकी जनसख्या Y द्वारा सूचित है। कुल जनसख्या के अनुपात आकलन हेतु X को सहायक चर के रूप मे प्रयोग करना होगा।

उन स्थितियो मे जिनमे कि अनुपात के हर (denominator) का वास्तविक मान ज्ञात हो तो यह पर्याप्त है कि अश के कुल मान का आकलन कर लिया जाये और अनुपात ज्ञात कर लिया जाये। किन्तु इस प्रकार प्राप्त अनुपात के आकलन का यथार्थ होना आवश्यक नही है।

यदि अश व हर के आकलक लगभग समानुपाती हो अर्थात् इनमे समाश्रयण रेखा मूल बिन्दु से होकर जाती हो तो अश व हर के अनुपात को हर के वास्तविक मान से गुणा करके अश के प्राचल का एक अच्छा आकलक प्राप्त हो जाता है।

माना कि समग्र मे N एकक हैं और i वें एकक पर प्रेक्षित मान Y_i है और इसके तदनुसार सहचर का मान X_i है। तो, योग,

$$T_X = \sum_{i=1}^{N} X_i , \quad T_Y = \sum_{i=1}^{N} Y_i \qquad .(12\ 84)$$

और माध्य.

$$\mu_X = \frac{T_X}{N} ; \qquad \mu_Y = \frac{T_Y}{N} \qquad ....(12.85)$$

समग्र अनुपात,

$$R = \frac{T_Y}{T_X} = \frac{\mu_Y}{\mu_X} \quad \text{....(12 86)}$$

यदि समग्र से n परिमाण के एक सरल याहच्छिक प्रतिदर्श का चयन किया गया हो और i वें एकक पर चर का मान y_i व सहचर का मान x_i है तो योग,

$$\hat{T}_X = \frac{N}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i, \quad \hat{T}_Y = \frac{N}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i \quad \text{....(12.87)}$$

और $$\bar{x} = \frac{\hat{T}_X}{N} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i, \quad \bar{y} = \frac{\hat{T}_Y}{N} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i \quad \text{....(12 87.1)}$$

आकलित अनुपात,

$$\hat{R} = \frac{\hat{T}_Y}{\hat{T}_X} = \frac{\bar{y}}{\bar{x}} \quad \text{....(12 88)}$$

T_Y का अनुपात आकलक,

$$\hat{T}_{YR} = \frac{\hat{T}_Y}{\hat{T}_X} T_X = \frac{\bar{y}}{\bar{x}} \quad T_X \quad \text{....(12 89)}$$

समग्र माध्य μ_Y का अनुपात आकलक,

$$\hat{\mu}_{YR} = \frac{\bar{y}}{\bar{x}} \cdot \mu_X \quad \text{....(12.90)}$$

$\hat{T}_{YR}$ का प्रसरण,

$$V(\hat{T}_{YR}) = \frac{N(N-n)}{n(N-1)} \sum_{i=1}^{N} (Y_i - RX_i)^2 \quad \text{....(12.91)}$$

$V(\hat{T}_{YR})$ का n प्रतिदर्श प्रेक्षणों द्वारा आकलित मान निम्न होता है :—

$$v(\hat{T}_{YR}) = \frac{N(N-n)}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{R} x_i)^2 \quad \text{....(12 92)}$$

$$= \frac{N(N-n)}{n(n-1)} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2 + \hat{R}^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\hat{R} \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \right)$$

$$\text{....(12.92.1)}$$

$$v(\hat{T}_{YR}) = \frac{N(N-n)}{n}(s_Y^2 + \hat{R}^2 s_X^2 - 2\hat{R}\, s_{XY}) \quad ...(12.92\ 2)$$

$v(\hat{T}_{YR})$ प्रसरण $V(\hat{T}_{YR})$ का अभिनत आकलक है। अनभिनत आकलक अभी तक ज्ञात नही किया जा सका है। अनुपात आकलक की आपेक्षिक अभिनतता का आकलित मान, $\frac{b(\hat{R})}{R}$, निम्न सूत्र द्वारा ज्ञात कर सकते हैं —

$$\frac{b(\hat{R})}{R} = \frac{(N-n)}{Nn}[\{c\,v(X)\}^2 - \rho\ c\ v(X)\,c\,v(Y)] \quad ..(12\ 93)$$

यहाँ $\frac{1}{n^2}$ व उच्च क्रम के पदो की अपेक्षा कर दी गयी है। यदि Y की X पर समाश्रयण रेखा मूल बिन्दु से होकर जाती हो तो उपर्युक्त सूत्र (12.93) से दिखाया जा सकता है कि यह अभिनतता शून्य हो जाती है।

आकलन की समाश्रयण विधि

अनुपात आकलन विधि द्वारा अच्छे आकलक प्राप्त होते हैं यदि चर Y व सहायक चर X में सम्बन्ध रैखिक हो और यह रेखा मूल बिन्दु से होकर जाती हो। यदि समाश्रयण रेखा मूल बिन्दु से होकर न जाती हो तो अनुपात आकलन की अपेक्षा रैखिक समाश्रयण आकलन विधि उत्तम है।

समग्र के N एककों से एक n परिमाण के प्रतिदर्श का सरल यादृच्छिक विधि द्वारा चयन किया गया है। $\overline{y}$ व $\overline{x}$ चरों Y व X के लिये क्रमश प्रतिदर्श माध्य हैं।

माना कि निम्न आकलक $\overline{y}_D$ विचाराधीन है,

$$\overline{y}_D = \overline{y} - K(\overline{x} - \mu_X) \quad ....(12\ 94)$$

यहाँ $\overline{y}_D$ एक अन्तर आकलक (difference estimator) है क्योंकि $\overline{y}$ में से सदा $K(\overline{x} - \mu_X)$ को घटाया गया है। जबकि K एक स्थिराक है। समीकरण (12 94) में K का चयन इस प्रकार करना होता है कि $\overline{y}_D$ का प्रसरण न्यूनतम हो जबकि,

$$V(\overline{y}_D) = V(\overline{y}) + K^2 V(\overline{x}) - 2K\, Cov(\overline{y}, \overline{x}) \quad ..(12\ 95)$$

समीकरण (12 95) का K के सम्बन्ध में आंशिक अवकलन करके शून्य के समान रखने पर K का निम्न मान प्राप्त हो जाता है —

$$K = \frac{Cov(\overline{y}, \overline{x})}{V(\overline{x})} = \beta \quad ....(12.96)$$

जहाँ β, $\overline{y}$ का $\overline{x}$ पर समाश्रयण गुणाक है। K के मान β को (12 95) में प्रतिस्थापित करने पर $\overline{y}_D$ का न्यूनतम प्रसरण निम्न होता है :—

$$V(\bar{y}_D) \approx \frac{(N-n)}{Nn} S_Y^2 (1-\rho^2) \qquad \text{...(12.97)}$$

$$\text{जहाँ} \quad S_Y^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} (Y_i - \mu_Y)^2$$

किन्तु β का मान अज्ञात है, अत: इसके आकलक b को β के स्थान पर प्रयोग करना होता है। इस स्थिति में,

$$\bar{y}_{lr} = \bar{y} - b(\bar{x} - \mu_x) \qquad \text{....(12.98)}$$

$\bar{y}_{lr}$ को रैखिक समाश्रयण आकलक कहते हैं। यहाँ प्रसरण,

$$V(\bar{y}_{lr}) \doteq V(\bar{y})(1-\rho^2) \qquad \text{....(12.99)}$$

$$\doteq \frac{N-n}{Nn} S_Y^2 (1-\rho^2) \qquad \text{....(12.99.1)}$$

जबकि यहाँ $\frac{1}{n^2}$ व उच्च क्रम के पदों की उपेक्षा कर दी गयी है। $V(\bar{y}_{lr})$ का आकलक,

$$v(\bar{y}_{lr}) = \frac{N-n}{Nn} s_Y^2 (1-r^2) \qquad \text{....(12.100)}$$

होता है, जहाँ r प्रतिदर्श सहसम्बन्ध गुणांक है।

आकलक $\bar{y}_{lr}$ की अभिनतता $-\text{Cov}(b, \bar{x})$ के समान है। सूत्र (12.99) से स्पष्ट है कि यदि $\rho = 0$ हो तो $\bar{y}_{lr}$ का प्रसरण वही होता है जो कि सरल यादृच्छिक प्रतिचयन की स्थिति में होता है। साथ ही यदि ρ का मान बृहत् हो तो $\bar{y}_{lr}$ का प्रसरण पर्याप्त कम हो जाता है।

टिप्पणी : (1) अनुपात आकलक से समाश्रयण आकलक सदैव उत्तम है। यदि समाश्रयण रेखा मूल बिन्दु से होकर जाती हो तो इन दो आकलन विधियों द्वारा समान परिशुद्ध परिणाम प्राप्त होते हैं।

(2) सरल यादृच्छिक प्रतिचयन के अतिरिक्त अन्य प्रतिचयन विधियों जैसे स्तरित प्रतिचयन विधि, क्रमबद्ध प्रतिचयन आदि के लिए भी अनुपात या समाश्रयण आकलन का प्रयोग किया जा सकता है। अन्य विधियों के लिये सूत्रों को यहाँ नहीं दिया गया है।

न्यास का संग्रह

प्रतिदर्श के चयन करने के पश्चात् आँकड़े अध्ययन की आवश्यकता के अनुसार प्रत्येक प्रतिचयन एकक से संग्रहीत किये जाते हैं। इस प्रकार प्राप्त आँकड़ों को प्राथमिक न्यास (primary data) कहते हैं। ये आँकड़े दो प्रकार से प्राप्त किये जा सकते हैं :—

(1) व्यक्तिगत पूछ-ताछ :—इस प्रकार की पूछ-ताछ के लिए पहले प्रश्नों तथा कुछ सम्भव उत्तरों का एक प्रोफार्मा (proforma) तैयार कर लिया जाता है। इस प्रोफार्मा को सूची-पत्रक (schedule) कहते हैं। इस सूची-पत्रक में दिये प्रश्नों के उत्तर अन्वेषक प्रतिदर्श में चुने हुए एककों से व्यक्तिगत पूछ-ताछ द्वारा प्राप्त करता है। उनके उत्तर के अनुसार अन्वेषक सूची-पत्रक में टिक (✓) लगा देता है या इन्हें लिख देता है। जैसे किसी अनाज के उत्पादन व्यय का अनुमान लगाना है तो उनसे व्यक्तिगत रूप से मिलकर भिन्न प्रश्न पूछते हैं जैसे वह सिंचाई पर, खाद पर, बैलों पर, मजदूरी, बीज व कीटनाशी तथा खरपतवारनाशी आदि पर कितना व्यय करता है ? उसे प्रति एकड़ कितना अनाज प्राप्त होता है, कितना भूसा या चरी आदि मिलती है। इस प्रकार की विश्वसनीय सूचना व्यक्तिगत पूछ-ताछ द्वारा प्राप्त की जाती है। कभी-कभी सर्वेक्षण इस प्रकार का होता है कि जिसमें अन्वेषक किसी से पूछताछ न करके स्वयं ही अवलोकन, नाप तौल आदि करके सूची-पत्रक को पूरा करता रहता है और कुछ समय में आवश्यक सूचना प्राप्त करने के पश्चात् वह उस स्थान को छोड़ देता है। इस प्रकार के सर्वेक्षण पहले प्रकार की अपेक्षा कम होते हैं। जैसे जनता में किसी नये नियम के विषय में प्रतिक्रिया को जानने, किसी क्षेत्र में एक विशेष बिमारी के घटित होने या रोकथाम के उपायों का प्रभाव देखने आदि सर्वेक्षणों में व्यक्तिगत अवलोकन ही एक उचित उपाय है।

सूची-पत्रक

ग्राम सेवकों से कुछ जानकारी प्राप्त करने के लिए निम्न सूची-पत्रक का प्रयोग किया गया। यहाँ इसे संक्षेप में उदाहरण के रूप में दिया गया है जिससे पाठकों को सूची-पत्रक के विषय में स्पष्ट ज्ञान हो जाये।

1. ग्राम सेवक का व्यक्तिगत परिचय :

नाम ________________ कोड नं० ________

गाँव का नाम ________________ पंचायत समिति ________

(जिसमें वह नियुक्त है)

आयु : ________ वैवाहिक स्तर : विवाहित ☐, अविवाहित ☐,

विधुर ☐

जन्म स्थान : गाँव ________ पंचायत समिति ________ जिला ________

शिक्षा का स्तर :

(क) शिक्षित है ☐ (ख) हाई स्कूल या सेकण्डरी ☐

(ग) कृषि में डिप्लोमा प्राप्त ☐ (घ) इन्टर या हायर सेकण्डरी ☐

स्नातक ☐

भाषाएँ जो वह जानता है :

भाषा	बोल सकता है	पढ़ सकता है	लिख सकता है
हिन्दी			
अंग्रेजी			
अन्य ( )			

पिता का नाम ______________ व्यवसाय ______________

2 ग्राम सेवक बनने से पूर्व आपने किस प्रकार का प्रशिक्षण लिया ?

(क) प्रशिक्षण का नाम ______________ अवधि

3, आपने ग्राम सेवक बनने के पश्चात् कोई विशेष प्रकार का प्रशिक्षण लिया।

(क) हाँ ☐ (ख) नहीं ☐

यदि हाँ तो, प्रशिक्षण का नाम ______________ अवधि ______________

4 आपको खेती-बाड़ी की नयी विधियों का ज्ञान किन स्रोतों से होता है और इनमें से आपकी दृष्टि में कौनसा स्रोत अधिक प्रभावी है ?

(क) ब्लॉक प्रसार अधिकारी ☐ (ख) उन्नत किसान ☐ (ग) रेडियो ☐

(घ) व्यापारी ☐ (ङ) राष्ट्रीय प्रदर्शन ☐

(च) पुस्तकें एवं पर्चे ☐ (छ) अन्य ______________

सर्वोत्तम स्रोत का नाम या क्र० ______________

5. आप किसानों की कठिनाइयों के विषय में ज्ञान किस प्रकार प्राप्त करते हैं ?

(क) स्वयं उनकी उपज देखकर ☐ (ख) पूछताछ करके ☐

(ग) उनके खेतों की मिट्टी की जाँच कराकर ☐

(घ) खेत में कीटाणुओं का प्रभाव देखकर ☐

(ङ) पौधों में बीमारियों की जाँच करके ☐

(च) अन्य ______________

6. क्या आपके विचार में किसानों को निम्न आवश्यक पदार्थ उपलब्ध हैं ?

(क) अच्छा बीज ☐ (ख) खाद ☐ (ग) पानी ☐

(घ) कीटनाशी ☐ (ङ) खरपतवारनाशी ☐

7. क्या किसानों को प्रशिक्षण केन्द्रों पर भेजकर प्रशिक्षित करने से लाभ होता है

(क) हाँ ☐ (ख) नहीं ☐

8. किसान को किस प्रकार सूचना देना प्रभावी है ?

(क) चौपाल में बात कर ☐ (ख) प्रदर्शनी लगाकर ☐

(ग) व्यक्तिगत मिलकर ☐ (घ) राष्ट्रीय प्रदर्शनों द्वारा ☐

(ङ) भाषण द्वारा ☐ (च) अन्य ______________

9. क्या आप समझते हैं कि आप किसानों के लिए उपयोगी हैं ?

(क) हाँ ☐ (ख) नहीं ☐

10 क्या आप अपने क्षेत्र में स्वतन्त्रता से कार्य कर पाते हैं ?
(क) हाँ ☐ (ख) नहीं ☐ यदि नहीं तो क्यों ?

11. क्या आप अपने कार्य से सन्तुष्ट हैं ?
(क) हाँ ☐ (ख) नहीं ☐

(2) डाक द्वारा पूछ-ताछ इस विधि के अन्तर्गत तैयार किये गये प्रश्नों तथा कुछ सम्भावित उत्तरों के प्रोफार्मा को प्रश्नावली (questionnaire) कहते हैं। इसको तैयार करने में सूची-पत्रक की अपेक्षा अधिक सावधानी बरतनी होती है इस प्रकार के सर्वेक्षण में प्रश्नावली को डाक द्वारा प्रत्येक चयनकृत प्रतिचयन एकक के पास भेज देते हैं और उनसे प्रार्थना की जाती है कि वे इसे पूर्णतया भरके वापस भेज दें। इस प्रकार के सर्वेक्षण में कम व्यय होता है और बहुत कम प्रशिक्षित व्यक्तियों की आवश्यकता होती है। इस विधि में एक दोष यह है कि अत्यधिक अनुक्रिया अभाव (non response) की समस्या सम्मुख आती है। इस समस्या का समाधान करने की विधि एल-बद्री (El-Badry) ने JASA, 1956 में (डाक प्रश्नावली के लिए एक प्रतिचयन विधि) (A sampling procedure for mailed questionnaire) नामक लेख में दी गयी है।

डाक-प्रश्नावली का प्रयोग किन्हीं दफ्तरों, अधिकारियों या शिक्षित तथा प्रगतिशील व्यक्तियों के प्रतिचयन एककों के रूप में होने की स्थिति में उचित है।

इसके अतिरिक्त किसी प्रयोग में कुछ संगृहीत एककों पर परीक्षण करने के उपरांत जो प्रेक्षण प्राप्त होते हैं वे प्राथमिक न्यास ही होते हैं।

न्यास का विश्लेषण

न्यास का विश्लेषण करने से पूर्व सूची-पत्रक या प्रश्नावली पर ली गयी सूचना का सम्पादन (editing) करना आवश्यक है। इस प्रकार कुछ स्पष्ट त्रुटियों को दूर कर सकते हैं और अनुपयोगी सूचना को निकाल दिया जाता है। इसके पश्चात् आवश्यक सारणियाँ बनाकर न्यास का सांख्यिकीय विश्लेषण करके आकलकों के मान ज्ञात कर लिये जाते हैं तथा विभिन्न परिकल्पनाओं की परीक्षा कर ली जाती है। इस विश्लेषण के आधार पर प्राप्त परिणामों का निर्वचन करके एक रिपोर्ट के रूप में प्रस्तुत या प्रकाशित कर दिया जाता है।

प्रश्नावली

1. एक शहर, जिसमें कि 10,000 परिवार हैं, का सर्वेक्षण करके शिक्षित व्यक्तियों की संख्या तथा पारिवारिक माध्य आय का पता लगाना है, तो बताइये कि किस प्रतिचयन विधि को अपनाया जाये और कितने परिमाण का प्रतिदर्श लिया जाना उचित है कि अच्छे आकलक प्राप्त हों। इसके लिये आप किस प्रकार की पूर्व सूचना प्राप्त करना चाहेंगे ?
2. दिल्ली में नगर सम्पत्ति की सीमा निर्धारित करने के हेतु एक सर्वेक्षण करके पता लगाना है कि इससे कितने मूल्य की सम्पत्ति सरकार के नियन्त्रण में आ जायेगी। माना कि प्राप्त सूचना के अनुसार ऐसे लगभग 7,000 परिवार हैं जो सम्पत्ति सीमा

में आते हैं। इन परिवारों को तीन वर्गों में उच्च, मध्यम, और निम्न में सम्पत्ति के मूल्य के आधार पर विभाजित किया गया है और इन वर्गों में माना कि परिवारों की संख्या 1,500, 2,500 व 3,000 है, तो बताइये कि किस प्रतिचयन विधि को अपनाया जाये कि जिससे कुल सम्पत्ति के अच्छे आगणक प्राप्त हो ? प्रत्येक वर्ग से उपयुक्त प्रतिदर्श परिमाण के विषय में भी विचार व्यक्त कीजिये।

3 देश राज (Des Raj) आकलक को समझाइये तथा अन्य आकलकों की तुलना में इसके गुण एवं दोषों का विवेचन कीजिये।

4 प्रतिचयन त्रुटि व अप्रतिचयन त्रुटि में अन्तर उदाहरणों सहित बताइये।

5 निम्न पर टिप्पणी लिखिए —

(1) प्रयोगगत न्यास
(2) प्रतिचयन एकक
(3) वृत्तीय क्रमबद्ध प्रतिचयन
(4) यादृच्छिक संख्या सारणी

6 किसी प्रतिदर्श सर्वेक्षण में पूछ-ताछ की विधियों का वर्णन कीजिये और यह भी बताइये कि किन-किन स्थितियों में इनका प्रयोग करना उचित है ?

□□□

13 | समाश्रयण सामान्य विवेचन तथा गणितीय फलन

प्राय. दो या दो से अधिक चरो का एक साथ अध्ययन करने की आवश्यकता होती है। साथ ही इन चरो में फलनीय सम्बन्ध जानना भी आवश्यक हो जाता है। जैसे माना कि एक वस्तु की उत्पादन-लागत (production cost), कच्चे माल के मूल्य, बिजली व ईंधन का व्यय मजदूरी पर निर्भर है। यदि उत्पादन-लागत व अन्य तीनों चरों में फलनीय सम्बन्ध ज्ञात हो तो कच्चे माल के मूल्य, बिजली व ईंधन के व्यय और मजदूरी के निर्दिष्ट मानों के लिए उत्पादन-लागत का अनुमान किया जा सकता है। यहाँ उत्पादित वस्तु का मूल्य, आश्रित चर और अन्य तीनों चर, स्वतन्त्र चर कहलाते हैं।

समाश्रयण शब्द का विचार सर्वप्रथम गैल्टन (Galton) ने दिया जबकि उन्होंने यह कहा कि एक व्यक्ति के विशेष लक्षण उसके स्वबुल्य द्वारा शेयर (share) किये जाते हैं। इसी तथ्य को सिद्ध करने के हेतु कार्ल पियर्सन ने पुत्र की ऊँचाई का पिता की ऊँचाई पर समाश्रयण ज्ञात किया।

दो चरों की स्थिति में समाश्रयण रेखा या वक्र को इस प्रकार समझ सकते हैं। माना दो चर Y और X हैं और इनका प्रतिबन्धी बारम्बारता फलन $f(y/x)$ है। यदि $f(y/x)$ के किसी विशेष मान जैसे माध्य, माध्यिका आदि को विचार करें तो यह विशेष मान x पर निर्भर करता है। माना कि यह विशेष मान y_x है। (यहाँ Y एक आश्रित चर और X एक स्वतन्त्र चर है।) x में परिवर्तन करने पर y_x में भी परिवर्तन होगा। अत. x के विभिन्न मानों के लिए बिन्दुओं (x, y_x) को आलेखित करके मिलाने पर एक सरल रेखा या वक्र प्राप्त होता है। इस रेखा या वक्र के समीकरण को चर Y का चर X पर समाश्रयण समीकरण कहते हैं। इसी सिद्धान्त को एक से अधिक स्वतन्त्र चरों के लिए विस्तारित किया जा सकता है।

माना कि एक आश्रित चर Y का स्वतन्त्र चरो $X_1, X_2, X_3, ..., X_k$ पर समाश्रयण फलन ज्ञात करना है। यह फलन रेखीय या वक्र-रेखीय कैसा भी हो सकता है। व्यापक रूप से गणितीय फलन को निम्न प्रकार से निरूपित कर सकते हैं :—

$$E(Y)=\psi(X_1, X_2, X_3, ...X_k / \theta_1, \theta_2, \theta_3, ..., \theta_m) \quad ..(13.1)$$

समीकरण (13.1) मे θ_j, (जहाँ $j=1, 2, 3, ..., m$) अज्ञात प्राचल है। व्यवहार में प्राय फलन (13.1) को निम्न प्रकार भी लिखते हैं —

$$E(Y)=\psi(X_1, X_2, X_3, ..., X_k) \quad ....(13.1.1)$$

इसी फलन को समाश्रयण फलन कहते हैं। इस फलन का रूप निर्धारित करना प्रयोग करने वाले की दक्षता पर निर्भर करता है। यदि फलन का रूप निश्चित भी कर लिया गया हो तो यह कहना कठिन है कि चरों में सम्बन्ध का अस्तित्व है भी या नहीं। अत फलनीय सम्बन्ध चयन करने की निम्न दो विधियों मे से एक का प्रयोग करना होता है।

विधि 1—क्रिया सम्बन्धी तथ्यों का वैज्ञानिक दृष्टि से विचार करना। यह विधि उत्तम है किन्तु क्रिया के विषय में पर्याप्त जानकारी न होने की स्थिति में इस विधि को प्रयोग में नहीं लाया जा सकता।

विधि 2—प्रेक्षित मानों को आलेखित करने पर प्राप्त प्रकीर्ण आरेख के निरीक्षण द्वारा। प्रथम विधि उपयुक्त न होने की स्थिति में यह विधि अधिक उपयोगी एवं व्यावहारिक है।

प्रकीर्ण आरेख—बिन्दुओं (X_i, Y_i), जहाँ $i=1, 2, 3, ..., n$, को X-Y समतल (plane) में प्रदर्शित किया जा सकता है। इस प्रकार प्राप्त आरेख को प्रकीर्ण आरेख कहते हैं।

वक्र-समंजन

यदि चर Y का $X_1, X_2, X_3, ..., X_k$ चरों पर समाश्रयण फलन का निश्चय कर लिया गया है तो इसका अभिप्राय है कि यहाँ समष्टि में वास्तविक सम्बन्ध को बतलाता है। अब प्रेक्षित मानों के आधार पर इस फलन के प्राचलों के सर्वोत्तम आगणक ज्ञात करना है। प्राचलों के आगणन और उनके द्वारा फलन के निर्धारित करने को ही वक्र-समंजन कहते हैं। अब प्राचलों के आगणन करने का प्रश्न सम्मुख है। आगणन की अनेकों विधियाँ हैं किन्तु सर्वोत्तम आगणक प्राप्त करने के लिए अधिकतर न्यूनतम वर्ग विधि (Method of least squares) का प्रयोग किया जाता है। अतः इस विधि का यहाँ सैद्धान्तिक वर्णन किया गया है जोकि निम्न प्रकार है —

न्यूनतम वर्ग-विधि—सम्बन्ध (13.1) के अनुसार Y एक आश्रित चर है और $X_1, X_2, X_3, ..., X_k$ स्वतन्त्र चर हैं। माना कि Y', Y का $X_1, X_2, X_3, ..., X_k$ दिये होने पर प्रत्याशित मान है और Y' का Y से अन्तर e है जिसको कि त्रुटि कहते हैं। अतः,

$$Y=Y'+e=\psi(X_1, X_2, X_3, ..., X_k)+e \qquad ....(13.2)$$

यहाँ यह भी कल्पना की गयी है कि e एक यादृच्छिक चर है जिसका बंटन प्रसामान्य है और इसके माध्य व प्रसरण क्रमशः 0 और σ_e^2 हैं। यदि n प्रेक्षण लिए गये हैं जिनमें से iवें प्रेक्षण में आश्रित और स्वतन्त्र चरों के मान क्रमशः Y_i और $X_{1i}, X_{2i}, X_{3i} ... X_{ki}$ हैं। (13.2) के अनुसार,

$$Y_i=\psi(X_{1i}, X_{2i}, X_{3i}, ..., X_{ki})+e_i \qquad ....(13.2.1)$$

या $$e_i=(Y_i-Y_i')=Y_i-\psi(X_{1i}, X_{2i}, X_{3i}, ..., X_{ki}) \qquad ....(13.2.2)$$

(Y_i-Y_i') का मान धनात्मक है यदि $Y_i>Y_i'$ हो और ऋणात्मक है यदि $Y_i<Y_i'$ हो। अतः इस चिह्न की समस्या को दूर करने के लिए दोनों ओर के व्यंजक का वर्ग कर लिया जाता है। इस प्रकार हमें त्रुटि के परिमाण से ही सम्बन्ध रह जाता है। त्रुटि को न्यूनतम करने के लिए, न्यूनतम वर्ग विधि द्वारा सम्पूर्ण $(Y_i-Y_i')^2$ को न्यूनतम करते हैं। यदि n प्रेक्षण लिए गये हैं तो सभी प्रेक्षणों के लिए निम्न व्यंजक Q को

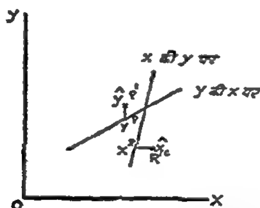
अवकल गणित (*differential calculus*) की सहायता से न्यूनतम करते हैं।

$$Q=\sum_{i=1}^{n} e_i^2=\sum_{i=1}^{n}(Y_i-Y_i')^2=\sum_{i=1}^{n}\{Y_i-\psi(X_1, X_2, X_3 \ldots\ldots X_K)\}^2 \quad \ldots(13.3)$$

उपर्युक्त विधि का प्रयोग विभिन्न फलनों के समजन के हेतु आगामी खण्डों में किया गया है।

सरल समाश्रयण रेखा

यदि आश्रित चर और स्वतन्त्र चर में या चरों में फलनीय सम्बन्ध रैखिक समीकरण द्वारा प्रदर्शित किया गया हो तो इसे रैखिक समाश्रयण कहते हैं। शब्द सरल से भाव है कि रेखा के समीकरण में चर Y केवल एक ही स्वतन्त्र चर X पर आश्रित है। यदि रेखा के समीकरण को इस प्रकार लिया गया हो कि Y–अक्ष के समान्तर विचलनों के वर्ग के योग को न्यूनतम किया गया हो अर्थात् $\sum_i (Y_i-Y_i')^2$ को न्यूनतम किया गया हो तो इसे Y की X पर समाश्रयण रेखा कहते हैं। यदि X–अक्ष के समान्तर विचलनों के वर्ग को न्यूनतम किया गया हो अर्थात् $\sum_i (X_i-X_i')^2$ को न्यूनतम किया गया हो तो इसे X की Y पर समाश्रयण रेखा कहते हैं। यह स्थिति X के आश्रित चर और Y के स्वतन्त्र चर होने की दशा में उत्पन्न होती है।



चित्र 13–1 दो समाश्रयण रेखाओं का निरूपण

माना कि समग्र के लिए Y की X पर समाश्रयण रेखा समीकरण है,

$$Y=\beta_0+\beta_1 X+e \quad \ldots(13.4)$$

यहाँ β_0 और β_1 दो प्राचल हैं। इन प्राचलों के आगणक b_0 b_1 (मानलिया) न्यूनतम वर्ग विधि द्वारा इस प्रकार ज्ञात कर सकते हैं। माना कि प्रतिदर्श में युगल प्रेक्षणों की संख्या n है जो कि निम्न हैं :—

$Y : Y_1, Y_2, Y_3 \ldots Y_n$

$X : X_1, X_2, X_3 \ldots X_n$

अत Y की X पर प्रागणित समाश्रयण रेखा निम्न है —

$$Y' = b_o + b_1 X \quad ....(13.5)$$

i वें प्रेक्षण के लिए रेखा समीकरण,

$$Y_i' = b_o + b_1 X_i \quad ....(13.5.1)$$

है अब इन प्रेक्षणों के पक्षों में b_o व b_1 के मान ज्ञात करते हैं

स्पष्टत,

$$(Y_i - Y_i') = (Y_i - b_o - b_1 X_i)$$

या $$(Y_i - Y_i')^2 = (Y_i - b_o - b_1 X_i)^2$$

अब प्रेक्षणों के लिए विचलनों के वर्गों का योग,

$$Q = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - Y_i')^2 = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - b_o - b_1 X_i)^2 \quad ....(13.6)$$

है। Q का b_o, b_1 के सम्बन्ध में क्रमश आंशिक अवकलन करके शून्य के समान रखने पर,

$$\frac{\partial Q}{\partial b_o} = -2 \sum_i (Y_i - b_0 - b_1 X_i) = 0 \quad ....(13.7)$$

$$\frac{QQ}{\partial b_1} = -2 \sum_i X_i (Y_i - b_0 - b_1 X_i) = 0 \quad ....(13.7.1)$$

इन दोनो समीकरणो को हल करने पर, पहले (13.7) द्वारा,

$$\sum_i Y_i - \sum_i b_0 - b_1 \sum_i X_i = 0$$

या $$nb_0 = \sum_i Y_i - b_1 \sum_i X_i$$

या $$b_0 = (\overline{Y} - b_1 \overline{X}) \quad ....(13.8)$$

इसी प्रकार (13 7.1) द्वारा

$$\sum_i X_i (Y - b_0 - b_1 X_i) = 0$$

$$\sum_i X_i Y_i - b_0 \sum_i X_i - b_1 \sum_i X_i^2 = 0$$

b_0 का (13 8) द्वारा मान रखने पर,

$$\sum_i X_i Y_i - (\overline{Y} - b_1 \overline{X}) \sum_i X_i - b_1 \sum_i X_i^2 = 0$$

$$\therefore \quad b_1 = \frac{\sum_i X_i Y_i - \overline{X} \sum_i Y_i}{\sum_i X_i^2 - \overline{X} \sum_i X}$$

$$=\frac{\sum_i X_i Y_i - \frac{(\sum_i X_i)(\sum_i Y_i)}{n}}{\sum_i X_i^2 - (\sum_i X_i)^2/n} \qquad ....(13.9)$$

सूत्र (13.9) को माध्य से विचलन के रूप मे निम्न प्रकार लिख सकते हैं।

$$b_1=\frac{\sum_i (X_i-\bar{X})(Y_i-\bar{Y})}{\sum_i (X_i-\bar{X})^2} \qquad ....(13.9.1)$$

माना कि $X_i-\bar{X}=x_i$ और $Y_i-\bar{Y}=y_i$

$$\therefore \quad b_1=\frac{\sum_i x_i y_i}{\sum_i x_i^2} \qquad ....(13.9.2)$$

यदि b_1 के लिए दायीं ओर के व्यञ्जक मे अश व हर को $(n-1)$ से भाग कर दें तो

$$b_1=\frac{\text{cov}(X, Y)}{v(X)} \qquad ....(13.9.3)$$

यदि cov $(X, Y)=s_{xy}$ और $v(X)=s_x^2$ रख दें तो

$$b=\frac{s_{xy}}{s_x^2} \qquad ....(13.9.4)$$

b_1 को Y का X पर आगणिक समाश्रयण गुणाक कहते हैं और इसे b_{yx} द्वारा भी निरूपित करते हैं। अनुलग्न yx यह प्रदर्शित करता है कि Y का X पर समाश्रयण ज्ञात किया गया है। माना $\hat{Y}_i$, आश्रित चर Y का आकलित मान है। अत. आकलित समाश्रयण समीकरण निम्न है :—

$$\hat{Y}=(\bar{Y}-b_1\bar{X})+b_1 X$$

$$(\hat{Y}-\bar{Y})=b_1(X-\bar{X}) \qquad ....(13.10)$$

समीकरण (13.10) मे b_1, $\bar{X}$, $\bar{Y}$ के परिकलित मानो को रखने पर आगणित समाश्रयण रेखा, $Y'=b_0+b_1 X$ के रूप मे ज्ञात हो जाती है।

यदि X की Y पर समाश्रयण रेखा $X'=\beta_0'+\beta_{xy} Y$ करना हो तो पहले की भाँति β_0' और β_{xy} के आगणित मान b_0' और b_{xy} ज्ञात कर सकते हैं। इस स्थिति मे,

$$b_0'=(\bar{X}-b_{xy}\bar{Y}) \qquad ....(13.11)$$

और
$$b_{xy}=\frac{\sum_i (X_i-\bar{X})(Y_i-\bar{Y})}{\sum_i (Y_i-\bar{Y})^2} \qquad ....(13.12)$$

सूत्र (13 9 4) की भाँति,

$$b_{xy}=s_{xy}/s_y^2 \quad ..(13\ 12\ 1)$$

अत X की Y पर आगणित समाश्रयण रेखा है,

$$\hat{X}-\overline{X}=b_{xy}\ (Y-\overline{Y}) \quad ...(13\ 13)$$

टिप्पणी (1) सभी सूत्रों को देखने से स्पष्ट है कि Y का X पर समाश्रयण की स्थिति में यदि X को Y से और Y को X से बदल दें तो X का Y पर समाश्रयण के लिए सूत्र एव समीकरण ज्ञात हो जाते है।

(2) साथ ही यह बात ध्यान देने योग्य है कि X की Y पर समाश्रयण रेखा वही नही होती है जो Y की X पर होती है।

(3) यदि प्रतिदर्श मे युग्म प्रेक्षणों (X_i, Y_i) की बारम्बारता परिवर्ती हो तो b_{yx} का परिकलन निम्न सूत्र द्वारा किया जाता है। माना कि युग्म प्रेक्षण (X_i, Y_i) की बारम्बारता f_i है जहाँ $i=1, 2, 3, .. n$ तो,

$$b_{yx}=\frac{\sum_i f_i\ (X_i-\overline{X})\ (Y_i-\overline{Y})}{\sum_i f_i\ (X_i-\overline{X})^2} \quad ....(13\ 14)$$

$$=\frac{\sum_i f_i X_i Y-\frac{(\sum_i f_i X_i)\ (\sum_i f_i Y_i)}{\sum_i f_i}}{\sum_i f_i X_i^2-\frac{(\sum_i f_i X_i)^2}{\sum f_i}} \quad ....(13\ 14\ 1)$$

(4) s_x व s_y सदैव धनात्मक होते हैं। अत b_{yx}, b_{xy} व r_{xy} का चिह्न वही होता है अर्थात् μ_{11}, $\sum_i x_i y_i$ व s_{xy} के चिह्न एक से होते हैं।

समाश्रयण गुणांक की परिभाषा

यह आश्रित चर मे उस परिवर्तन का माप है जो कि स्वतन्त्र चर मे एक इकाई परिवर्तन करने से उत्पन्न होता है।

समाश्रयण गुणांक b_{yx} की इकाई Y की इकाई प्रति X की इकाई के तुल्य है। जैसे Y का माप किलोग्राम मे और X का माप सेंटीमीटर मे किया गया हो तो b_{yx} की इकाई किलोग्राम प्रति सेंटीमीटर होती है यदि $b_{yx}=3\ 5$ कि० प्रति सें० है तो इसका अभिप्राय है कि लम्बाई को 1 सेंटीमीटर बढ़ा देने पर भार 3 5 किलोग्राम बढ़ जाता है। यदि b_{yx} का मान ऋणात्मक हो तो Y के मान मे कमी हो जाती है। इसी प्रकार का कथन b_{xy} के लिए भी दिया जा सकता है।

उदाहरण 13.1 : एक खरपतवारनाशी (weedicide) का मक्का की उपज पर प्रभाव जानने के लिए प्रयोग किया गया। मक्का बोने के 10 दिन के बाद प्रत्येक भूखण्ड (plot)

में खरपतवारों व मक्का की उपज निम्न थी :—

खरपतवारों की संख्या (X) 80, 28, 42, 37, 61, 52, 45, 39, 38, 34, 56, 40

मक्का की उपज (क्विंटल प्रति हैक्टर) (Y) 10, 24, 15, 28, 16, 26, 25, 26, 18, 22, 22, 20

यह ज्ञात है कि उपज, खरपतवारों की संख्या पर निर्भर करती है। अतः उपज Y की खरपतवारों की संख्या X पर सरल समाश्रयण रेखा निम्न प्रकार ज्ञात कर सकते हैं —

$$\sum_i X = 552, \ \overline{X} = 46, \ \sum_i Y = 252, \ \overline{Y} = 21$$

निम्न सारणी बनाकर b_{yx} का मान सुगमता से परिकलित किया जा सकता है।

$(X-\overline{X})$	$(Y-\overline{Y})$	$(X-\overline{X})(Y-\overline{Y})$	$(X-\overline{X})^2$	$(Y-\overline{Y}^2)$
34	−11	−374	1156	121
−18	3	− 54	324	9
−4	−6	24	16	36
−9	7	− 63	81	49
15	−5	− 75	225	25
6	5	30	36	25
−1	4	−4	1	16
−7	5	− 35	49	25
−8	−3	24	64	9
−12	1	− 12	144	1
10	1	10	100	1
−6	−1	6	36	1
0	0	−523	2232	318

दिये गये परिकलन के अनुसार,

$$\sum_i (X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y}) = -523,$$

$$\sum_i (X_i - \overline{X})^2 = 2232$$

और $n=12, \ \overline{X}=46, \ \overline{Y}=21$

सूत्र (12 9 1) के अनुसार,

$$b_{yx} = \frac{-523}{2232} = -0\ 2343$$

अत समीकरण (13 10) की सहायता से आगणित समाश्रयण रेखा,

$$(\hat{Y} - 21) = -0\ 2343\ (X - 46)$$

$$\hat{Y} = -0\ 2343\ X + 21 + 10\ 7778$$

$$\hat{Y} = -0\ 2343\ X + 31\ 7778$$

है।

यदि $X = 50$ के लिए Y का आगणित मान ज्ञात करना है तो,

$$\hat{Y} = -0\ 2343 \times 50 + 31\ 7778$$

$$= -11\ 7150 + 31\ 7778$$

$$= 20\ 0628$$

इसी प्रकार X के अन्य किसी भी मान के लिए Y का आगणित मान ज्ञात कर सकते है।

टिप्पणी X के मान लेने मे यह ध्यान रखना चाहिये कि समजित समाश्रयण समीकरण X के परिसर मे व परिसर से बाहर निम्न व उच्च मानो के निकट मानो के लिए ही सत्य है।

चरो के रैखिक रूपान्तरण (सकेतीकरण) का समाश्रयण गुणांक पर प्रभाव

प्रतिदर्श मे X और Y के रैखीय रूपान्तरण के हेतु माना कि

$$u_i = \frac{X_i - a}{c}, \quad v_i = \frac{Y_i - b}{d}$$

या $\quad X_i = a + cu_i, \quad Y_i = b + dv_i$

और माध्य $\overline{X} = a + c\overline{u}$, $\overline{Y} = b + d\overline{v}$

सूत्र (13 9 1) के अनुसार,

$$b_{yx} = \frac{\sum_i \{(a + cu_i) - (a + c\overline{u})\}\{(b + d\,v_i) - (b + d\overline{v})\}}{\sum_i \{(a + cu_i) - (a + c\overline{u})\}^2}$$

$$= \frac{cd \sum_i (u_i - \overline{u})\ (v_i - \overline{v})}{c^2 \sum_i (u_i - \overline{u})^2}$$

$$= \frac{d}{c} b_{uv} \qquad \text{....(13 15)}$$

b_{yx} और b_{xy} मे सम्बन्ध मे स्पष्ट है कि मूल विन्दु को बदलने का समाश्रयण गुणाक पर कोई प्रभाव नही पडता है अर्थात् यदि कोई अचर मान, X और Y के समुच्चय मे से घटा या जोड दिये जाय तो b_{yx} के मान पर कोई प्रभाव नहीं पडता है किन्तु गुणा या भाग करने का समाश्रयण गुणाक पर प्रभाव पडता है। यदि केवल मूल विन्दु ही बदला गया हो तो उस स्थिति मे $c=d=1$ होता है और यदि मापनी (scale) मे ही परिवर्तन किया गया हो तो $a=b=0$ होता है।

दो सरल समाश्रयण रेखाओं का कटान विन्दु

सूत्रों (13 10) और (13 13) द्वारा दी गयी दो सरल समाश्रयण रेखाएँ

$$(\hat{Y}-\overline{Y})=b_{yx}\ (X-\overline{X})$$

और
$$(\hat{X}-\overline{X})=b_{xy}\ (Y-\overline{Y})$$

हैं। इन दोनो समीकरणों को विन्दु, जिसके निर्देशाक $(\overline{X}, \overline{Y})$ हैं, सन्तुष्ट करता है, अतः इन दोनों रेखाओं का कटान विन्दु $(\overline{X}, \overline{Y})$ है अर्थात् X और Y के मध्य पर दोनों रेखाएँ एक दूसरे को काटती है।

सरल रेखीय समाश्रयण के लिए प्रसरण-विश्लेषण

यहाँ प्रसरण विश्लेषण को सीधे ही दिया गया है। इसके सैद्धान्तिक विवरण के लिए अध्याय 21 का अध्ययन कीजिये।

पूर्व की भाँति, माना कि समाश्रयण रेखा समीकरण $Y=\beta_0+\beta_1 X$ है और प्राचलों β_0 व β_1 के प्राक्कलक b_0 और b_1 हैं।

यहाँ कुल प्रसरण को तीन संघटकों मे विभाजित किया जा सकता है। एक तो b_0 के कारण, दूसरा समाश्रयण (b_1/b_0) के कारण और तीसरा अवशिष्ट (residual) प्रसरण होता है।

माना कि प्रतिदर्श मे निम्न n युगल प्रेक्षण

$$\binom{Y_1}{X_1}, \binom{Y_2}{X_2}, \binom{Y_3}{X_3} \ldots\ldots\ldots \binom{Y_n}{X_n}$$

हैं। इन प्रेक्षणों द्वारा कुल वर्ग-योग (व० यो०) b_0 तथा समाश्रयण (b_1/b_0) के कारण वर्ग योग सामान्य रीति से ज्ञात कर लिये जाते हैं। वर्ग-योगो को उनकी तदनुसार स्वा० को० द्वारा भाग देने पर माध्य वर्ग योग (मा० व० यो०) ज्ञात हो जाते हैं। समाश्रयण मा० व० यो० का अवशिष्ट मा० व० यो० से अनुपात, परिकलित F के समान होता है।

$$\text{यहाँ कुल व० यो०} = \sum_i Y_i^2 \qquad \ldots(13.16)$$

$$b_0 \text{ के कारण व० यो०} = (\sum_i Y_i)^2/n \qquad \ldots(13.17)$$

समाश्रयण (b_1/b_0) के कारण व० यो० $= b_1 \left\{ \sum_i X_i Y_i - \frac{(\sum_i X_i)(\sum_i Y_i)}{n} \right\}$ (13.18)

$$= b_1 \sum_i x_i y_i \quad (13.18.1)$$

$$= (\sum_i x_i y_i)^2 / \sum_i x_i^2 \quad (13.18.2)$$

जहाँ $(X_i - \bar{X}) = x_i$ व $(Y_i - \bar{Y}) = y_i$

अतः अवशिष्ट व० यो० $= \sum_i Y_i^2 - (\sum_i Y_i)^2/n - b \sum_i x_i y_i$ (13.19)

$$= \sum_i y_i^2 - (\sum_i x_i y_i)^2 / \sum_i x_i^2 \quad (13.20)$$

$$= \sum_i y_i^2 - b_1 \sum_i x_i y_i \quad (13.20.1)$$

$$= \sum_i (Y_i - \hat{Y}_i)^2 \quad (13.20.2)$$

इन वर्ग योगों को निम्न प्रसरण–विश्लेषण सारणी में इस प्रकार प्रयोग करते हैं।

सारणी (13.1) प्रसरण विश्लेषण सारणी

विचरण स्रोत	स्व० को०	व० यो०	मा० व० यो०	F मान
कुल	n	$\sum_i Y_i^2$		
b_0	1	$(\sum_i Y_i)^2/n$		
समाश्रयण (b_1/b_0)	1	$b_1 \sum_i x_i y_i$	$b_1 \sum_i x_i y_i$	$\frac{b_1 \sum_i x_i y_i}{s_e^2} \sim F_{1, n-2}$
अवशिष्ट	(n−2)	$\sum_i y_i^2 - b_1 \sum_i x_i y_i$	$\frac{\sum_i y_i^2 - b_1 \sum_i x_i y_i}{(n-2)} = s_e^2$ (मान लिया)	

परिकलित F की पूर्व निर्धारित मा स्त. α व (1, n–2) स्व को के लिए सारणीबद्ध F_α से तुलना करके b_1 की सार्थकता के प्रति निश्चय कर लिया जाता है।

यदि परिकलित $F > F_\alpha$ हो तो b_1 सार्थक है और यदि परिकलित $F < F_\alpha$ हो तो b_1 निरर्थक है अर्थात् समाश्रयण का व्यावहारिक दृष्टि से महत्त्व नही है।

उदाहरण 13 2 : यदि उदाहरण 13 1 म दिये गये न्यास के लिए Y का X पर समाश्रयण विश्लेपण करना है तो प्रसरण–विश्लेपण सारणी (13 1) बनाकर समाश्रयण की सार्थकता परीक्षा निम्न प्रकार कर सकते हैं —

न्यास के लिए उदाहरण (13 1) के अनुसार परिकलित मान निम्न हैं —

$$\sum_1 x_i y_i = -523, \sum_1 x_i^2 = 2232$$

$$\sum_1 y_i^2 = 318, n = 12, b_1 = -0{\cdot}2343$$

$$\text{समाश्रयण के कारण व य} = \frac{(-523)^2}{2232}$$

$$= 122\ 55$$

$$\text{अवशिष्ट व य} = 318\ 00 - 122\ 55$$

$$= 195\ 45$$

प्रसरण विश्लेपण सारणी

विचरण स्रोत	स्त को	व य	मा व य	F-मान
समाश्रयण	1	122 55	122 55	$\frac{122\ 55}{19\ 55} = 6\ 27$
अवशिष्ट	10	195 45	19 55	
पूर्ण	11	318 00		

माना कि α = 05 है तो सारणी (परि० प–5 2) द्वारा $F_{05,\ 1,\ 10} = 4\ 96$ है। परिकलित F, सारणीबद्ध F से बडा है अत समाश्रयण सार्थक है। इसका अभिप्राय है कि खरपतवार की सख्या का उपज पर सार्थक विपरीत प्रभाव पडता है। यहाँ विपरीत प्रभाव इस कारण कहा गया है कि b_1 का मान ऋणात्मक है।

समाश्रयण-गुणांक की सार्थकता की t-परीक्षा

यह पहले ही कहा जा चुका है कि यदि X एक t_n चर हो तो X^2 एक $F_{1,n}$ चर होगा । इस कारण बजाय F परीक्षण के जिसका वर्णन हम ऊपर कर चुके हैं हम $\sqrt{\frac{b_1 \Sigma x_i y_i}{s_e^2}}$ पर t_{n-2} परीक्षण भी कर सकते हैं।

$$\sqrt{\frac{b_1 \Sigma x_i y_i}{s_e^2}} = \frac{b_1\sqrt{\Sigma x_i^2}}{s_e}$$

माना कि निराकरणीय परिकल्पना

H_0 $\beta_{yx} = C$ को H_1 $\beta_{yx} \neq C$ के विरुद्ध परीक्षा करनी है, जहाँ C एक ज्ञात अचर मान है। यदि β_{yx} की केवल सार्थकता परीक्षा करनी हो तो इस स्थिति में C को शून्य के समान मानते हैं।

माना कि n परिमाण के प्रतिदर्श में युगल प्रेक्षण हैं —

Y $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots\ .y_n$
X $X_1, X_2, X_3, \ldots \ldots X_n$

H_0 की t-परीक्षा निम्न प्रकार है —

$$t_{n-2} = \frac{b_{yx} - \beta_{yx}}{s_b} \tag{13 21}$$

$\because$ $\beta_{yx} = 0$ है,

$$t = \frac{b_{yx}}{s_b} \tag{13 21 1}$$

जबकि s_b, b_{yx} का मानक विचलन है।

b_{yx} का मान सूत्र (13 9) द्वारा ज्ञात कर लिया जाता है और s_b निम्न प्रकार ज्ञात करते हैं -

$$s_e^2 = \frac{1}{n-2}\left\{\sum_i y_i - (\sum_i x_i y_i)^2 / \sum_i x_i^2\right\} \tag{13 22}$$

और $s_b^2 = \frac{s_e^2}{\sum_i x_i^2}$

$$\therefore\ s_b = \sqrt{\frac{s_e^2}{\sum_i x_i^2}} \tag{13 22 1}$$

प्रतिदर्शज (13 21) म b, β व s_b का मान रखकर, t का परिकलित मान ज्ञात कर लिया जाता है।

यदि α सा र्थ और (n–2) स्व को पर $t_{\alpha,\,(n-2)} < t$ हो, तो H_o को अस्वीकार कर दिया जाता है। इसका अभिप्राय है कि β_{yx} का मान, C से सार्थक रूप में भिन्न है। यदि $t < t_{\alpha,\,(n-2)}$ हो तो H_o को स्वीकार कर लिया जाता है जिसका अभिप्राय है कि β_{yx} का मान C सत्य है। $\beta_{yx}=0$ की स्थिति म H_o को स्वीकार करने से यह निष्कर्ष निकलता है कि, X म इकाई परिवर्तन करने पर, Y म परिवर्तन महत्वपूर्ण है।

β_{yx} की विश्वास्यता सीमाएँ

माध्य μ के लिए दिय गये सूत्र (9 9) के समरूप निम्न सूत्र द्वारा समग्र समाश्रयण गुणांक β_{yx} की α सा र्थ पर उपरि व निम्न सीमाएँ U तथा L, ज्ञात कर सकते हैं।

$$\left.\begin{matrix}U\\L\end{matrix}\right\} = b_{yx} \pm s_b\, t_{\alpha,\,(n-2)} \qquad (13\ 23)$$

उदाहरण 13 3 β_{yx} की सार्थकता-परीक्षा तथा विश्वास्यता सीमाएँ उदाहरण (13 2) मे दिये गये न्यास के लिए निम्न प्रकार ज्ञात कर सकते हैं —

इस उदाहरण द्वारा,

$$b_{yx} = -0\ 2343,\ n=12$$

$$s_e^2 = 19\ 55$$

सूत्र (13 22 1) द्वारा,

$$s_b^2 = \frac{19\ 55}{2232} = 008759$$

$$s_b = 093$$

H_o $\beta_{yx}=0$ की H_1 $\beta_{yx} \neq 0$ के विरुद्ध परीक्षा करनी है तो प्रतिदर्शज (13 21 1) द्वारा,

$$t = -\frac{0\ 2343}{093} = -2\ 52$$

सारणी (परि घ–3) द्वारा α = 05 व स्व को 10 के लिए t का मान = 2 228

$$t > t_{(05)\,(10)}$$

अत H_o को अस्वीकार कर दिया। इसका अर्थ है कि β_{yx} सार्थक है। सूत्र (13 23) द्वारा β_{yx} की 95 प्रतिशत विश्वास्यता सीमाएँ इस प्रकार ज्ञात कर सकते हैं —

$$\left.\begin{matrix} U \\ L \end{matrix}\right\} = -0\ 2343 \pm 093 \times 2\ 228$$

$$= -0\ 2343 \pm 0\ 2072$$

अत निम्न सीमा $L = -0\ 4415$

उपरि सीमा $U = -0\ 0271$

β_0 की सार्थकता-परीक्षा

$H_0 \quad \beta_0 = 0$ की $H_1 \quad \beta_0 \neq 0$ के विरुद्ध, सार्थकता परीक्षा प्रतिदर्शज t द्वारा करते हैं जो कि निम्न प्रकार है —

$$t_{n\ 2} = \frac{b_0 - 0}{s_{b0}} \qquad (13\ 24)$$

जबकि b_0 का मागणित मान $(\overline{Y} - b_{yx}\overline{X})$ के समान है s_{b0}, b_0 का मागणित मानक विचलन है।

b_0 का प्रसरण,

$$s_{b0}^2 = s_e^2 \left\{ \frac{1}{n} + \frac{\overline{X}^2}{\Sigma (X_i - \overline{X})^2} \right\} \qquad (13\ 25)$$

b_0 व s_{b0} के मानों का (12 24) मे प्रतिस्थापन करके t का मान परिकलित कर लिया जाता है। इस t की सारणीबद्ध $t_{\alpha,\ (n-2)}$ से तुलना करके परिकल्पना H_0 के विषय में निर्णय नियमानुसार कर लिया जाता है।

β_0 की $(1-\alpha)$ प्रतिशत विश्वास्यता सीमाएँ निम्न सूत्र द्वारा ज्ञात कर सकते हैं —

$$\left.\begin{matrix} U \\ L \end{matrix}\right\} = b_0 \pm s_{b0} \quad t_{\alpha,\ (n-2)} \qquad (13\ 26)$$

उदाहरण 13 4 β_0 की सार्थकता परीक्षा तथा 95 प्रतिशत ($\alpha = 05$) विश्वास्यता सीमाएँ, उदाहरण (13 1) में दिये गये न्यास के लिए निम्न प्रकार ज्ञात कर सकते हैं।

$b_0 = 31\ 7778,\ n = 12,\ \overline{X} = 46,\ \overline{Y} = 21$

$\Sigma x_i^2 = 2232$

सूत्र (13 25) द्वारा,

$$s_{b0}^2 = 19\ 55 \quad \left\{ \frac{1}{12} + \frac{46^2}{2232} \right\}$$

$$= 19\ 55 \ \{0\ 0833 + 0\ 9480\}$$

$$= 20\ 1616$$

$$\therefore \ s_{b0} = 4\ 49$$

सूत्र (13 24) द्वारा,

$$t = \frac{31\ 7778}{4\ 49}$$

$$= 7\ 07$$

सारणीबद्ध (परि घ–3)द्वारा $t_{(\ 05)\ (10)} = 2\ 228$ जो कि t के परिकलित मान से कम है अत β_0 का मान सार्थक है ।

सूत्र (13 26) द्वारा β_0 की 95% विश्वास्यता सीमाएँ निम्न हैं —

$$\left.\begin{matrix} U \\ L \end{matrix}\right\} = 31\ 7778 \pm 4\ 49 \times 2\ 228$$

$$= 31\ 7778 \pm 10\ 0037$$

अत उपरि सीमा $U = 41\ 7815$

और निम्न सीमा $L = 21\ 7741$

$\hat{Y}$ की मानक त्रुटि एवं $\mu_{y/x}$ की विश्वास्यता सीमाएँ

स्पष्टत $\mu_{y/x} = \beta_0 + \beta_1 X$ का आगणक $\hat{Y} = b_0 + b_1 X$ है । जबकि $\mu_{y/x}$ एक प्रसामान्य समग्र मे चर Y का X के दिए हुए मान के प्रति माध्य है । $\mu_{y/x}$ की 100 (1-α) प्रतिशत विश्वास्यता सीमाएँ निम्न होती हैं —

$$\left.\begin{matrix} U \\ L \end{matrix}\right\} = \hat{Y} \pm t_{\alpha,\ (n-2)}\ s_{\hat{Y}} \qquad (13\ 27)$$

जब कि $\hat{Y}$ की मानक त्रुटि का वर्ग $s^2_{\hat{Y}}$ निम्न होता है —

$$s^2_{\hat{Y}} = s_e^2 \left\{ \frac{1}{n} + \frac{(X - \bar{X})^2}{\sum_1 (X_i - \bar{X})^2} \right\} \qquad (13\ 28)$$

जबकि X एक निर्दिष्ट मान है ।

यदि $\hat{Y}$ को एक प्रसामान्य समग्र के माध्य का आगणक न मानकर एक Y– मान के आगणक के रूप मे प्रयोग किया गया हो अर्थात् $Y = \beta_0 + \beta_1 X$ का आगणक $\hat{Y} = b_0 + b_1 X$ हो ।

यहाँ X के एक निर्दिष्ट मान के लिए Y का आगणक $\hat{Y}$ है। इस स्थिति में,

$$s^2_{\hat{Y}} = s_e^2 \left\{ 1 + \frac{1}{n} + \frac{(X-\bar{X})^2}{\sum\limits_{1} (X-\bar{X})^2} \right\} \qquad (13.29)$$

Y की $(1-\alpha)$ प्रतिशत विश्वास्यता सीमाएँ (13.26) के समरूप निम्न सूत्र द्वारा ज्ञात कर सकते हैं —

$$\left.\begin{matrix}U\\L\end{matrix}\right\} = \hat{Y} \pm t_{\alpha,\,(n-2)}\; s_{\hat{Y}} \qquad (13.30)$$

सरल अरैखिक समाश्रयण समीकरण

अनेक अनुसंधानों एवं गणितीय विश्लेषणों में यह देखा गया है कि आश्रित चर व एक या एक से अधिक स्वतन्त्र चरों में सम्बन्ध रैखीय न होकर प्राय अरैखिक होता है। इस वक्र का रूप कैसा भी हो सकता है और उसी के अनुसार समाश्रयण समीकरण के गणितीय प्रतिरूप (Mathematical model) का चयन करना होता है। इस प्रकार अरैखीयता के कारण होने वाली त्रुटि को समाप्त कर दिया जाता है। समाश्रयण वक्र का रूप निर्धारित करने के पश्चात् गणितीय समीकरण लिख दिया जाता है और प्रतिदर्श प्रेक्षणों की सहायता से वक्र का समंजन कर दिया जाता है। इस प्रक्रिया को वक्रीय समाश्रयण समंजन कहते हैं। कुछ मुख्य मुख्य वक्रों का वर्णन यहाँ दिया गया है।

चरघातांकी समाश्रयण वक्र

प्राय परतन्त्र चर (Y) और स्वतन्त्र चर (X) में सम्बन्ध चरघातांकी वक्र नियम का पालन करता है। चरघातांकी वृद्धि वक्र समीकरण —

$$Y = \alpha\, \beta^{X} \qquad (13.31)$$

है। इस वृद्धि वक्र की विशेषता यह है कि किसी भी समय पर Y में वृद्धि उस समय तक प्राप्त Y के परिमाण के समानुपाती होती है।

इसका ज्यामितीय रूप उदाहरण (13.5) के साथ दिखाया गया है। यहाँ न्यूनतम वर्ग विधि द्वारा प्राप्त युगपत समीकरणों को हल करके α व β के आगणक ज्ञात किये गये हैं। इस वक्र का समंजन लघुगणक (Logarithm) की सहायता से किया जाता है।

यहाँ $\log_{10} Y = \log_{10} \alpha + X \log_{10} \beta$ (13.32)

माना कि $\log_{10} Y = Z$, $\log_{10} \alpha = a$ $\log_{10} \beta = b$

समीकरण (13.32) का निम्न रूप हो जाता है —

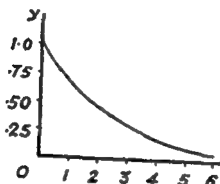
$$Z = a + bX \qquad (13.32.1)$$

a और b के आकलित मान (13.8) और (13.9) के द्वारा सुगमता से ज्ञात किये जा सकते हैं। इन मानों का प्रतिलघुगणक (antilogarithm) लेकर α व β के आकलित मान ज्ञात कर लिए जाते हैं जिनका कि प्रतिस्थापन करके वांछित वक्र समीकरण निश्चित हो जाता है।

यदि चर X और Y, क्षय (decay) घातीय निमय का पालन करते हों तो घातीय वक्र समीकरण

$$Y = \alpha \beta^{-x} \qquad \ldots(13.33)$$

है। इस स्थिति में ज्यामितीय रूप को चित्र (13–2) में दिखाया गया है।



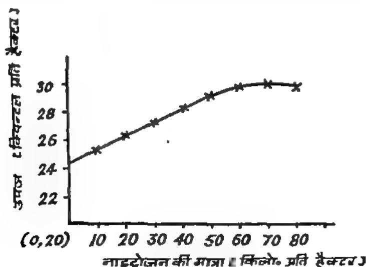
चित्र 13–2 घर घातीय वक्र का रूप

मिश्चुरलिस वक्र

इसी प्रकार अनन्तस्पर्शीय समाश्रयण (asymptotic regression) समीकरण

$$Y = \alpha - \beta \rho^{x} \qquad \ldots(13.34)$$

है। यदि X=0 हो तो $Y=(\alpha-\beta)$ है। इसके अतिरिक्त जैसे-जैसे X का मान बढ़ता है ρ^x का मान घटता जाता है ($\because \rho < 1$) अतः Y का मान α की ओर प्रवृत्त करता है। इस α मान को ही अनन्तस्पर्शी कहते हैं। कृषि विज्ञान में इस वक्र को मिश्चुरलिस वक्र (Mitscherlich's curve) कहते हैं। इस वक्र का रूप चित्र (13–3) मे दिखाया गया है।



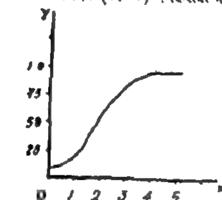
चित्र 13–3 मिश्चुरलिस वक्र

लघुगणकीय वृद्धि नियम

जनसंख्या में वृद्धि प्राय लघुगणकीय वृद्धि नियम (logistic growth law) का पालन करती है। अत इस स्थिति में निम्न लघुगणकीय वृद्धि वक्र का समजन किया जा सकता है :—

$$\frac{1}{Y}=\alpha+\beta\rho^{x} \quad \text{... (13 35)}$$

इस वक्र का ज्यामितीय रूप चित्र (13–4) में दिखाया गया है।



चित्र 13–4 लघुगणकीय वृद्धि वक्र का स्वरूप

उदाहरण 13.5 : विभिन्न तापक्रमों का पत्ती से वाष्पोत्सर्जन दर पर प्रभाव देखा गया। सात तापक्रमों पर वाष्पोत्सर्जन की दर निम्न पायी गयी —

तापक्रम (X)	5,	10,	15,	20,	25,	30,	35
वाष्पोत्सर्जन दर (Y)	2,	6,	10,	18,	25,	35,	50

यह ज्ञात है कि वाष्पोत्सर्जन दर तापक्रम पर निर्भर है और एक सीमा तक यह घातीय नियम का पालन करता है। अत इन प्रेक्षणों की सहायता से समीकरण $\hat{Y}=\hat{\alpha}\hat{\beta}^{x}$ का समजन कर सकते हैं।

पहले समीकरण (13 32.1) का समजन करेंगे और फिर प्रतिलघुगणक लेकर समीकरण (13 31) की आकलित समीकरण ज्ञात कर लिया गया है।

Y	log Y=Z	X	ZX	X^2
1 8	0 2553	5	1 2765	25
6 0	0 7782	10	7 7820	100
10 0	1 0000	15	15 0000	225
18 0	1 2553	20	25 1060	400
25 0	1 3979	25	34 9475	625
35 0	1 5441	30	46 3230	900
50 0	1 6990	35	58 4150	1225
	7 9298	140	188 7600	3500

समीकरण $Z = a + bX$ के समजन के लिए,

$$b = \frac{188\ 76 - \frac{7\ 9298 \times 140}{7}}{3500 - \frac{(140)^2}{7}}$$

$$= \frac{30\ 16}{700}$$

$$= 0\ 043$$

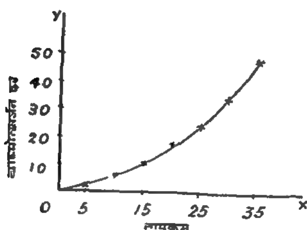
$$a = \overline{Z} - b\overline{X}$$

$$= (1 \cdot 1328) - (0\ 043)\ (20)$$

$$= 0\ 2728$$

$$\therefore \quad \hat{\alpha} = \text{Antilog}\ (0\ 2728)$$

$$= 1\ 873$$



चित्र (13–5) घरघानाकी समाश्रयण वक्र

और $\quad \beta = \text{Antilog}\ (0\ 043)$

$$= 1\ 104$$

अत घरघाताकी वृद्धि वक्र

$$Y = (1\ 873)\ (1\ 104)^x$$

है।

द्विघात या उच्चतर घात समीकरण का समंजन

अनेक अध्ययनो के अन्तर्गत ऐसा देखा गया है कि द्विघात या अन्य उच्चतर घात बहु-पद समाश्रयण समीकरण उचित है। यदि द्विघात समीकरण का समजन करना है तो माना कि इसका समग्र के लिए गणितीय प्रतिरूप

$$Y = \alpha_0 + \alpha_1 X + \alpha_2 X^2 \qquad ....(13.36)$$

है। निर्देशांक (Y, X) को ग्राफ पर आलेखित करने पर इस वक्र की आकृति परवलय (Parabola) जैसी होती है जिसकी अक्ष उर्ध्वाधर है। साधारणतया इस परवलय वक्र का पूर्ण भाग ग्राफ में न होकर केवल इसका एक खण्ड ही होता है। इस वक्र का समजन न्यूनतम वर्ग विधि द्वारा कर सकते हैं। माना कि प्राचलों $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ के आकलित मान क्रमशः a_0, a_1, a_2 हैं। अतः आगणित समीकरण

$$\hat{Y} = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 \qquad ....(13.36.1)$$

है। माना कि प्रतिदर्श में n युग्म-प्रेक्षण (X_i, Y_i) हैं। (जहाँ i=1, 2, 3, ...,n)।

राशि $\Sigma (Y - \hat{Y})^2$ का न्यूनतम वर्ग विधि के अन्तर्गत a_0, a_1 व a_2 के सम्बन्ध में आंशिक अवकलन करने पर प्रसामान्य समीकरण प्राप्त होते हैं। इन समीकरणों को हल करके a_0, a_1, a_2 के मान ज्ञात कर लिए जाते हैं जिनको कि (13.36.1) में प्रतिस्थापन करके आगणित द्विघात समीकरण ज्ञात हो जाती है।

प्राप्त प्रसामान्य समीकरण निम्न होंगे हैं —

$$\left.\begin{aligned}
\sum_i Y_i &= \sum_i a_0 + a_1 \sum_i X_i + a_2 \sum_i X_i^2 \\
\sum_i X_i Y_i &= a_0 \sum_i X_i + a_1 \sum_i X_i^2 + a_2 \sum_i X_i^3 \\
\sum_i X_i^2 Y_i &= a_0 \sum_i X_i^2 + a_1 \sum_i X_i^3 + a_2 \sum_i X_i^4
\end{aligned}\right\} \quad ....(13.37)$$

आवश्यकतानुसार X^2 के स्थान पर द्विघात समीकरण (13.37) में $\sqrt{X}$, $\log X$ या $\frac{1}{X}$ का भी प्रयोग कर सकते हैं और फिर इसका समजन भी ऊपर की भाँति कर सकते हैं।

यदि घन समीकरण

$$Y = \alpha_0 + \alpha_1 X + \alpha_2 X^2 + \alpha_3 X^3$$

का समंजन करना हो तो ऊपर दी हुई विधि के समान $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ के आगणित मान a_0, a_1, a_2, a_3 निम्न प्रसामान्य समीकरणों को हल करके ज्ञात कर सकते हैं।

$$\left.\begin{aligned}
\sum_i Y_i &= \sum_i a_0 + a_1 \sum_i X_i + a_2 \sum_i X_i^2 + a_3 \sum_i X_i^3 \\
\sum_i X_i Y_i &= a_0 \sum_i X_i + a_1 \sum_i X_i^2 + a_2 \sum_i X_i^3 + a_3 \sum_i X_i^4 \\
\sum_i X_i^2 Y_i &= a_0 \sum_i X_i^2 + a_1 \sum_i X_i^3 + a_2 \sum_i X_i^4 + a_3 \sum_i X_i^5 \\
\sum_i X_i^3 Y_i &= a_0 \sum_i X_i^3 + a_1 \sum_i X_i^4 + a_2 \sum_i X_i^5 + a_3 \sum_i X_i^6
\end{aligned}\right\} \quad ...(13.38)$$

(13. 37) या (13 38) मे दी हुई प्रसामान्य समीकरणो को इसी प्रकार हल कर सकते हैं जैसे कि बहुसमाश्रयण समीकरण (multiple regression equation) के समंजन मे दिया गया है। इस विधि का वर्णन आगामी खण्ड मे दिया गया है।

चतुर्घाती या अन्य उच्चतर घाती समीकरण का समंजन भी उपर्युक्त रीति से कर सकते हैं किन्तु बहुधा यह निश्चय करना कठिन हो जाता है कि समाश्रयण समीकरण एक घाती, द्विघाती, घन घाती या अन्य उच्च घात का लेना उचित है। इस बात का निर्णय करने मे समाश्रयण विश्लेषण सहायता करता है। प्रसरण-विश्लेषण सारणी बनाकर एक घात, द्विघात, घन घात आदि पदो के समाश्रयण गुणांक और इन्ही से विचलन के लिए माध्य वर्ग योग ज्ञात करके सार्थकता की परीक्षा कर लेते हैं। यदि यहाँ उच्च घाती पद की सार्थकता सिद्ध हो तो इसका अभिप्राय है कि अधिक घात का समीकरण लेने से Y का उत्तम आगणक प्राप्त होता है। इसके विपरीत यदि निरर्थक सिद्ध हो तो उच्च घाती पद का सम्मिलित करना लाभप्रद नही है। किन्तु कभी-कभी ऐसी स्थिति भी उत्पन्न होती है कि द्विघात पद के लिए परीक्षा द्वारा निरर्थक परिणाम प्राप्त हो, पर घन घाती पद के लिए सार्थकता सिद्ध होती है। ऐसी स्थिति मे विशिष्ट रूप से कुछ कहना कठिन है। फिर भी व्यावहारिकता की दृष्टि से इस नियम का पालन किया जा सकता है कि यदि दो लगातार पदो के गुणांक निरर्थक सिद्ध हो तो उन्हें छोड़ देना चाहिये और उनसे निम्न घात का समीकरण ही प्रागुक्ति के लिए पर्याप्त शुद्ध है। इस विश्लेषण की विधि का प्रयोग बहु समाश्रयण रेखा के समंजन के समरूप होता है केवल समंजन में यह अन्तर होता है कि यहाँ चर के पदो $X, X^2, X^3 ..., X^k$ को विभिन्न चरो $X_1, X_2, X_3,....X_k$ के रूप मे प्रयोग करना होता है। बहुपद समीकरण के समंजन के प्रति उदाहरण को बहु समाश्रयण रेखा के समंजन के लिए उदाहरण द्वारा पाठक स्वयं समझ सकते हैं।

लंबकोणीय बहुपद विधि द्वारा बहुघातीय समाश्रयण समीकरणों का समंजन

यदि स्वतन्त्र चर X पर प्रेक्षण एक समान्तर श्रेणी मे हो तो लबकोणीय बहुपद विधि का प्रयोग किया जा सकता है। ऊपर खण्ड मे देखा गया है कि यदि उच्च घात का पद समीकरण मे बढाना है तो फिर से प्रसामान्य समीकरणो को ज्ञात करना एवं हल करना होता है अर्थात् यदि एक घात समीकरण का समंजन कर लिया गया हो और अब द्विघात समीकरण का समंजन करना हो तो एक घात समीकरण के समंजन के लिए किये गये परिकलन तथा आगणको को प्रयोग नही कर सकते हैं। किन्तु लबकोणीय बहुपद विधि द्वारा उच्च कम के पद को समीकरण मे, पिछले परिकलनो का प्रयोग करके सुगमता से बढा सकते हैं। यह ध्यान रहे कि स्वतन्त्र चर X के मानो मे समान अन्तर का प्रतिबन्ध सत्य होना आवश्यक है। यहाँ केवल उस स्थिति मे समंजन विधि को दिया गया है जबकि मानो के अन्तराल 1 हो। यदि अन्तराल एक न हो तो अन्तराल से भाग देकर X का सकेतीकरण कर देना चाहिये।

माना कि चर X पर प्रेक्षण समान्तर श्रेणी मे हैं जिनका अन्तराल एक है और लब-

कोणीय बहुपद रीति से बहुपद समीकरण

$$Y=\beta_0+\beta_1 X+\beta_2 X^2+....+\beta_k X^k \quad ....(13.39)$$

का समंजन करना है। तो समीकरण (13.39) को सदैव निम्न रूप में दिया जा सकता है —

$$Y=\alpha_0+\alpha_1 \phi_1+\alpha_2 \phi_2+....+\alpha_k\phi_k \quad ....(13.39.1)$$

जहाँ α_p, (p=0, 1, 2,....,K)

स्थिरांक हैं और ϕ_j लबकोणीय बहुपद है।

इस बहुपद समीकरण में गुणाक इस प्रकार चयन किये जाते हैं कि प्रतिदर्श के n प्रेक्षणों के लिए,

$$\Sigma \phi_j \phi_k^j=0 \quad \text{जबकि } j\neq k$$

इस स्थिति में बहुपद ϕ लबकोणीय कहलाते हैं।

माना कि α_p का प्रागणित मान a_p है जहाँ p=0, 1, 2,....,k

अतः प्रागणित बहुपद समीकरण निम्न हो जाता है :—

$$\hat{Y}=a_0+a_1 \phi_1+a_2 \phi_2+....+a_k \phi_k \quad ....(13\ 40)$$

उपर्युक्त समीकरण में दिये गये स्थिरांकों के मान निम्न सूत्रों द्वारा ज्ञात किये जा सकते हैं :—

$$a_0=\sum_i Y_i/n \quad ....(13.41)$$

और $$a_j=\sum_i Y_i \phi_{ij}/\sum_i \phi_{ij}^2 \quad ....(13.42)$$

$$j=1, 2, 3,....k$$

यह ध्यान रहे कि $\phi_1, \phi_2, \phi_3, ..., \phi_k$ इत्यादि क्रमशः एक घात, दो घात इत्यादि लबकोणीय बहुपदों को निरूपित करते हैं।

यदि X के मान समान्तर श्रेणी में हों जिनका समांतर 1 है और चर X का माध्य $\overline{X}$ है जो कि प्रतिदर्श परिमाण n पर आधारित है तो ϕ's और चर X में निम्न सम्बन्ध होते हैं :—

$$\phi_1=\lambda_1 (X-\overline{X})$$

$$\phi_2=\lambda_2 \{(X-\overline{X})^2-\tfrac{1}{12}(n^2-1)\}$$

$$\phi_3=\lambda_3 \{(X-\overline{X})^3-\tfrac{1}{20}(3n^2-7)(X-\overline{X})\}$$

$$\phi_4=\lambda_4 \{(X-\overline{X})^4-\tfrac{1}{14}(3n^2-13)(X-\overline{X})^2 +\tfrac{3}{560}(n^2-1)(n^2-9)\}$$

$$\phi_5=\lambda_5\left\{(X-\overline{X})^5-\tfrac{5}{18}(n^2-7)(X-\overline{X})^3+\tfrac{1}{1008}(15n^4-230n^2+407)(X-\overline{X})\right\}$$

$\phi_1, \phi_2, \phi_3, \ldots$ के मान X के पदों में समीकरण (13.40) में रखने पर बहुघातीय समाश्रयण समीकरण ज्ञात हो जाते हैं।

$$a_0 \text{ के कारण वर्ग योग} = a_0 \sum_{i} Y_i$$

$$j\text{वें घातीय पद के कारण वर्ग योग में कमी} = a_j \left(\sum_{i} Y_i \phi_{ji}\right) \text{ है।}$$

ϕ_j जोकि लबकोणीय बहुपद हैं इनके गुणांक और इनकी संख्या प्रतिदर्श परिमाण n पर निर्भर करती है। यह नियम है कि n प्रतिदर्श प्रेक्षणों के लिए लबकोणीय बहुपदों की अधिकतम संख्या (n − 1) है। स्पष्टतः किसी n के मान के लिए (n − 1) से ϕ_j's की संख्या कम तो हो सकती है किन्तु अधिक नहीं हो सकती है।

विभिन्न प्रतिदर्श परिमाणों की स्थिति में ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3....आदि के मान, λ_i's के मान तथा $\Sigma\, \phi_{ji}^2$ के मान निम्न सारणी में दिये गये हैं।

जब कि λ's वह अचर मान हैं जो n पर निर्भर हैं उनका चयन इस प्रकार किया जाता है कि ϕ_j के मानों का अपने न्यूनतम पदों की पूर्ण संख्या में लघुकरण हो जाये।

(सारणी 13.2) ϕ_j, λ_j व $\sum_i \phi_j^2$ के मानों की सारणी

	n=3		n=4			n=5			
	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_3	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_3	ϕ_4
	−1	1	−3	1	−1	−2	2	−1	1
	0	−2	−1	−1	3	−1	−1	2	−4
	1	1	1	−1	−3	0	−2	0	6
			3	1	1	1	−1	−2	−4
						2	2	1	1
λ's	1	3	2	1	$\frac{10}{3}$	1	1	$\frac{5}{6}$	$\frac{35}{12}$
$\Sigma_i\, \phi_{ji}^2$	2	6	20	4	20	10	14	10	70

	n=6					n=7					n=8				
	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_3	ϕ_4	ϕ_5	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_3	ϕ_4	ϕ_5	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_3	ϕ_4	ϕ_5
	−5	5	−5	1	−1	−3	5	−1	3	−1	−7	7	−7	7	−7
	−3	−1	7	3	5	−2	0	1	−7	4	−5	1	5	−13	23
	−1	−4	4	2	−10	−1	−3	1	1	−5	−3	−3	7	−3	−17
	1	−4	−4	2	10	0	−4	0	6	0	−1	−5	3	9	−15
	3	−1	−7	−3	−5	1	−3	−1	1	5	1	−5	−3	9	15
	5	5	5	1	1	2	0	−1	−7	−4	3	−3	−7	−3	17
						3	5	1	3	1	5	1	−5	−13	−23
											7	7	7	7	7
λ'_n	2	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{21}{10}$	1	1	$\frac{1}{6}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{7}{20}$	2	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{7}{10}$
$\Sigma \phi_i^2$	70,	84,	180,	28,	252	28,	84,	6,	154,	84	168,	168,	264,	616,	2184

उच्च घातीय बहुपदो ϕ_j तथा n अन्य मानो के लिए दी गयी सारणी को देखिये ।

उपर्युक्त विधि का प्रयोग निम्न उदाहरण मे किया गया है ।

उदाहरण 13.6 : गेहूँ की छोटी किस्म S–307 की उपज, रासायनिक खाद की बढ़ती हुई मात्रा के प्रयुक्त करने पर निम्न पायी गयी —

रासायनिक खाद की मात्रा (X) (क्विंटल प्रति हैक्टर)	गेहूँ की उपज (Y) (क्विंटल प्रति हैक्टर)
0 0	18 7
2 5	19 2
5 0	31 2
7 5	41 8
10 5	42 5
12 5	40 4
15 0	38·2
17 5	37 0

इस न्यास मे चतुर्घात बहुपद समीकरण का समजन तथा बहुघातीय पदो की सार्थकता परीक्षा, दी हुई विधि के अनुसार इस प्रकार कर सकते हैं :—

यहाँ $n=8$ है और ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3, ϕ_4, तक बहुपदो को लेना है । X के मानो को 2·5 से भाग कर दें तो इनमे समांतर 1 हो जाता है ।

a_i's तथा वर्ग-योगों के परिकलन के हेतु सारणी जब $n=8$ सारणी (13 2) के अनुसार

	Y	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_3	ϕ_4	$Y\phi_1$	$Y\phi_2$	$Y\phi_3$	$Y\phi_4$
	18 7	−7	7	−7	7	−130 9	130 9	−130 9	130 9
	19 2	−5	1	5	−13	− 96 0	19 2	96 0	−249 6
	31 5	−3	−3	7	− 3	− 94 5	− 94 5	220 5	− 94 5
	41 8	−1	−5	3	9	− 41 8	−209 0	125 4	376 2
	42 5	1	−5	−3	9	42 5	−212 5	−127 5	382 5
	40 4	3	−3	−7	− 3	121 2	−121 2	−282 8	−121 2
	38 2	5	1	−5	−13	191 0	38 2	−191 0	−496 6
	37 0	7	7	7	7	259 0	259 0	259 0	259 0
λ's		2	1	2/3	7/12				
$\sum_i \phi_j^2$		168	168	264	616				
योग						250 5	−189 9	− 31 3	186 7

$$\sum_i Y_i = 269\ 3,\ \sum_i (Y_i - \overline{Y})^2 = \sum_i y_i^2 = 659{\cdot}16$$

$$a_0 = \frac{269{\cdot}3}{8} = 33\ 66$$

$$a_1 = \frac{250\ 5}{268\ 0} = 1{\cdot}49$$

$$a_2 = \frac{-189\ 9}{168{\cdot}0} = -1{\cdot}13$$

$$a_3 = \frac{-31\ 3}{264} = -0\ 118$$

$$a_4 = \frac{186\ 7}{616} = 0{\cdot}303$$

$$\hat{Y} = 33\ 66 + 1{\cdot}49\ \phi_1 - 1\ 13\ \phi_2 - 0{\cdot}118\ \phi_3 + 0\ 303\ \phi_4$$

$$\phi_1 = \lambda_1\ (X - \overline{X}) = 2\ (X - \tfrac{28}{8}) = 2\ (X - 3\ 5)$$

$$\phi_2 = \lambda_2 \left\{ (X - \overline{X})^2 - \frac{n^2-1}{12} \right\}$$

$$= 1 \left\{ (X - 3{\cdot}5)^2 - \frac{63}{12} \right\}$$

$$= X^2 - 7\ 0\ X + 12{\cdot}25 - 5{\cdot}25$$

$$= X^2 - 7{\cdot}0\ X + 7{\cdot}0$$

$$\varphi_3 = \lambda_3 \left\{ (X - \overline{X})^3 - (X - \overline{X})\ \frac{3n^2 - 7}{20} \right\}$$

$$= \frac{2}{3} \left\{ (X - 3{\cdot}5)^3 - (X - 3{\cdot}5)\ \ \frac{185}{20} \right\}$$

$$= \tfrac{2}{3} \{ X^3 - 10{\cdot}5\ X^2 + 36{\cdot}75\ X - 42{\cdot}875 - 9{\cdot}25\ X + 32{\cdot}375 \}$$

$$= \tfrac{2}{3} \{ X^3 - 10\ 5\ X^2 + 27{\cdot}50\ X - 10{\cdot}5 \}$$

$$\phi_4 = \lambda_4 \{ (X - \overline{X})^4 - \tfrac{1}{14}\ (3n^2 - 13)(X - \overline{X})^2 + \tfrac{3}{560}(n^2-1)(n^2-9) \}$$

$$= \tfrac{7}{12} \{ (X - 3\ 5)^4 - \tfrac{1}{14} \times 179 (X - 3{\cdot}5)^2 + \tfrac{3}{560} \times 63 \times 55 \}$$

$$=\frac{7}{12}\{X^4-14.0X^3+73.5X^2-171.5X+150.0$$
$$-12.8\,(X^2-7.0X+12.25)+18.50)\}$$
$$=\frac{7}{12}\{X^4-14.0X^3+60.7X^2-81.9X+11.76\}$$
$$\hat{Y}=33.66+1.49\times2\,(X-3.5)-1.13\,(X^2-7.0X+7.0)$$
$$-0.118\times\frac{2}{3}\,(X^3-10.5X^2+27.5X-10.5)$$
$$+0.303\times\frac{7}{12}\,(X^4-14.0X^3+60.7X^2-81.9X+11.76)$$
$$=18.224-6.149X+10.425X^2-2.5546X^3+0.1768X^4$$

घातीय पदों के कारण व० य० में कमी,

एक घात	$= a_1 \sum_i (Y_i\,\phi_{1i}) = 377.245$
दो घात	$= a_2 \sum_i (Y_i\,\phi_{2i}) = 214.587$
तीन घात	$= a_3 \sum_i (Y_i\,\phi_{3i}) = 3.693$
चतुर्थ घात	$= a_4 \sum_i (Y_i\,\phi_{4i}) = 56.570$
	652.095

टिप्पणी : X के किसी भी निश्चित मान के लिए Y का आगणित मान $\hat{Y}$ ज्ञात करते समय यह ध्यान रखना चाहिये कि X के इस मान को, X मानों के अन्तराल से भाग देकर ही आगणित बहुघातीय समीकरण में प्रतिस्थापित करें अन्यथा Y का मान त्रुटि युक्त होगा।

माना कि $X=10$ के लिए Y का आगणित मान, $\hat{Y}$ ज्ञात करना है तो $X=10$ न लेकर $X=\frac{10}{2.5}=4$ लेना होगा जब $X=4$ हो तो

$$\hat{Y}=18.224-24.596+166.800-163.490+45.261$$
$$=42.199$$

यह आगणित मान $X=10$ के लिए Y के प्रेक्षित मान के लगभग समान है।

बहुघातीय पदों की सार्थकता परीक्षा निम्न प्रसरण विश्लेषण सारणी द्वारा कर सकते हैं

विचरण स्रोत	स्व० को०	व० यो०	मा०व०यो०	F-मान	$\alpha = .05$ पर सारणीबद्ध F-मान
एकघात पद	1	377·245	377 245	160·19	
द्विघातीय पद	1	214 587	214 587	91 12	
त्रिघातीय पद	1	3 693	3·693	1 57	$F_{1,3}$
चतुर्थघातीय पद	1	56 570	56 570	24 02	$=10\ 13$
समाश्रयण से विचलन	3	7 065	2 355		
कुल	7	659 16			

उपर्युक्त सारणी से स्पष्ट है कि एक घात, द्विघात तथा चतुर्थघात के पद सार्थक हैं। यदि चाहें तो अन्य उच्च घात के पद यहाँ सम्मिलित किये जा सकते हैं किन्तु प्रेक्षणों की संख्या कम होने के कारण अन्य उच्च पदों को सम्मिलित करना उचित नहीं है। वास्तव में तो समाश्रयण से विचलन की स्वतन्त्रता-कोटि 3 भी कम है किन्तु यहाँ हल को अधिक जटिल न दिखाने के कारण केवल आठ प्रेक्षण ही लिये गये हैं।

बहुसमाश्रयण रेखा

ऐसा देखा गया है कि आश्रित चर (Y) का मान केवल एक स्वतन्त्र चर (X) पर निर्भर न होकर एक से अधिक स्वतन्त्र चरों

$$X_1, X_2, X_3, \ldots\ldots, X_K$$

(जहाँ $K>1$) पर निर्भर होता है।

इसका अर्थ है कि समाश्रयण समीकरण का समंजन दो या दो से अधिक स्वतन्त्र चरों की स्थिति में करना है। जैसे गेहूँ की उपज, खाद की मात्रा, पानी की मात्रा, तथा कीटनाशी की मात्रा आदि पर निर्भर करती है। यदि उपज तथा इन स्वतन्त्र चरों में सम्बन्ध ज्ञात करना हो तो बहुसमाश्रयण एक उचित विधि है। इसी प्रकार किसी फैक्ट्री में एक उत्पादित वस्तु का मूल्य, कच्ची सामग्री के मूल्य, मजदूरी, पैक करने के खर्च, विज्ञापन व्यय, परिवहन भाड़ा, मशीनों के मूल्य-ह्रास आदि पर निर्भर करता है। इस प्रकार की स्थितियों में बहुसमाश्रयण रेखा के समंजन द्वारा आश्रित चर व स्वतन्त्र चरों में सम्बन्ध ज्ञात कर सकते हैं तथा इस प्रकार का समीकरण प्रागुक्ति के लिए अत्यन्त उपयोगी है। माना कि समग्र के लिए बहुसमाश्रयण समीकरण

$$Y=\beta_0+\beta_1 X_1+\beta_2 X_2+\ldots+\beta_K X_K \qquad \ldots.(13\ 43)$$

है। माना कि β_j का आगणक b_j है जहाँ $j=1, 2, 3, \ldots., k$ और आगणित समाश्रयण रेखा समीकरण,

$$\hat{Y}=b_0+b_1 X_1+b_2 X_2+\ldots+b_K X_K \qquad \ldots.(13\ 44)$$

है। माना कि n परिमाण के प्रतिदर्श का चयन किया गया है अर्थात् प्रत्येक चर पर संगत प्रेक्षणों की संख्या n है तो इन प्रेक्षणों के द्वारा प्राचलों $b_0, b_1, b_2, \ldots., b_K$ के मान ज्ञात करना है।

$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_K$ में से प्रत्येक को आंशिक समाश्रयण गुणांक (Partial regression coefficient) कहते हैं। इन प्राचलों के आगणित मान $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_K$ न्यूनतम वर्ग विधि द्वारा ज्ञात करते हैं, इस विधि द्वारा प्रसामान्य समीकरण निम्न प्रकार प्राप्त कर सकते हैं।

$$Q = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - b_0 - b_1 X_{1i} - b_2 X_{2i} \ldots - b_K X_{Ki})^2$$

का $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_K$ के सम्बन्ध में आंशिक अवकलन करके शून्य के समान रखने पर निम्न समीकरण प्राप्त होते हैं —

$$\sum_i Y_i = \sum_i b_0 + b_1 \sum_i X_{1i} + b_2 \sum_i X_{2i} + \ldots + b_K \sum_i X_{Ki}$$

$$\left.\begin{aligned}
\sum_i Y_i &= nb_0 + b_1 \sum_i X_{1i} + b_2 \sum_i X_{2i} + \ldots + b_K \sum_i X_{Ki} \\
\sum_i X_{1i}\, y_i &= b_0 \sum_i X_{1i} + b_1 \sum_i X_{1i}^2 + b_2 \sum_i X_{1i} X_{2i} + \ldots + b_K \sum_i X_{1i} X_{Ki} \\
\sum_i X_{2i}\, Y_i &= b_0 \sum_i X_{2i} + b_1 \sum_i X_{1i} X_{2i} + b_2 \sum_i X_{2i}^2 + \ldots + b_K \sum_i X_{2i} X_{Ki} \\
&\;\vdots \\
\sum_i X_{Ki}\, Y_i &= b_0 \sum_i X_{Ki} + b_1 \sum_i X_{Ki} X_{1i} + b_2 \sum_i X_{Ki} X_{2i} + \ldots + b_K \sum_i X_{Ki}^2
\end{aligned}\right\} \ldots (13\ 45)$$

इन $(K+1)$ प्रसामान्य समीकरणों को हल करके $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_K$ के मान ज्ञात कर लिए जाते हैं और इनका समीकरण (13 44) में प्रतिस्थापन करके आगणित बहुसमाश्रयण समीकरण ज्ञात हो जाता है। किन्तु उपर्युक्त समीकरणों को निरसन-प्रणाली (elimination method) द्वारा हल करना, दो से अधिक चर होने की स्थिति में, दुर्लभ हो जाता है। अतः इन समीकरणों को आव्यूह (Matrix) की सहायता से सुगमता से हल कर सकते हैं। (13 45) द्वारा दी हुई समीकरणों को आव्यूह के रूप में निम्न प्रकार लिख सकते हैं :—

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} n & \Sigma X_{1i} & \Sigma X_{2i} \ldots\ldots & \Sigma X_{Ki} \\ \Sigma X_{1i} & \Sigma X_{1i}^2 & \Sigma X_{1i}X_{2i} \ldots & \Sigma X_{1i}X_{Ki} \\ \Sigma X_{2i} & \Sigma X_{1i}X_{2i} & \Sigma X_{2i}^2 \ldots & \Sigma X_{2i}X_{Ki} \\ \vdots & & & \\ \Sigma X_{Ki} & \Sigma X_{1i}X_{Ki} & \Sigma X_{2i}X_{Ki} \ldots & \Sigma X_{Ki}^2 \end{bmatrix}} \underset{B}{\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_K \end{bmatrix}} = \underset{Y}{\begin{bmatrix} \Sigma Y_i \\ \Sigma X_{1i}Y_i \\ \Sigma X_{2i}Y_i \\ \vdots \\ \Sigma X_{Ki}Y_i \end{bmatrix}} \ldots (13\ 45\ 1)$$

यहाँ यह बात ध्यान देने योग्य है कि (13.45.1) में समीकरणों के दायीं ओर के पदों को बायीं ओर और बायीं ओर के पदों को दायीं ओर लिखा गया है।

यदि गुणाक आव्यूह को A से, समाश्रयण गुणाक आव्यूह को B से और दायीं ओर के आव्यूह को Y से निरूपित कर दें तो (13.45 1) को निम्न प्रकार लिख सकते हैं :—

$$A\,B = Y \qquad \text{....(13 45 2)}$$

यहाँ A का क्रम $(K+1)\times(K+1)$, B का क्रम $(K+1)\times 1$ व Y का क्रम $(K+1)\times 1$ है।

समाश्रयण गुणाकों का परिकलन करने के हेतु इस समीकरण को इस प्रकार लिख सकते हैं :—

$$B = A^{-1}\,Y \qquad \text{...(13 45 3)}$$

जबकि A^{-1}, A का प्रतिलोम आव्यूह है। A^{-1} को डू-लिटिल या कौलकीय सघनन विधि द्वारा सरलता से ज्ञात कर सकते हैं। इन विधियों का वर्णन परिशिष्ट-क में दिया दिया गया है। माना कि

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 \ldots c_K \\ c_1 & c_{11} & c_{12} \ldots c_{1K} \\ c_2 & c_{21} & c_{22} \ldots c_{2K} \\ \vdots & & \vdots \\ c_K & c_{K1} & c_{K2} \ldots c_{KK} \end{bmatrix} = (\,c\,)$$

अतः समीकरण (13 45 3),

$$\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 \ldots c_K \\ c_1 & c_{11} & c_{12} \quad c_{1K} \\ c_2 & c_{21} & c_{22} \quad c_{2K} \\ \vdots & & \vdots \\ c_K & c_{K1} & c_{K2} \ldots c_{KK} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma Y_i \\ \Sigma X_{1i}\; Y_i \\ \Sigma X_{2i}\; Y_i \\ \vdots \\ \Sigma X_{Ki}\; Y_i \end{bmatrix} \qquad \text{....(13 45 4)}$$

समीकरण (13 45.4) द्वारा,

$$b_0 = c_0\,\Sigma Y_i + c_1\,\Sigma X_{1i}\,Y_i + c_2\,\Sigma X_{2i}\,Y_i + \ldots + c_K\,\Sigma X_{Ki}\,Y_i \qquad \text{....(13 46)}$$

और $b_j = c_j\,\Sigma Y_i + c_{j1}\,\Sigma X_{1i}\,Y_i + c_{j2}\,\Sigma X_{2i}\,Y_i + \ldots + c_{jK}\,\Sigma X_{Ki} Y_i \qquad \text{...(13 47)}$

जहाँ $j = 1, 2, 3, \ldots K$

$b_0, b_1, b_2, \ldots, b_K$ के परिकलित मानों का समीकरण (13.44) में प्रतिस्थापन करके

प्रागणित समाश्रयण समीकरण प्राप्त हो जाती है। इस समीकरण में स्वतन्त्र चरों

$$X_1, X_2, X_3, \ldots, X_K$$

के आवश्यकतानुसार मान रखने पर Y का प्रागणित मान प्राप्त कर लिया जाता है।

आव्यूह का क्रम जितना अधिक होता है उतना ही उसका प्रतिलोम ज्ञात करने में अधिक परिश्रम करना होता है। अतः यदि प्रत्येक चर के मानों का प्रतिदर्श माध्य से विचलन ले लिया जाये तो $b_0 = \overline{Y}$ हो जाता है और अन्य K आंशिक समाश्रयण गुणांकों को, $(K \times K)$ क्रम के आव्यूह के प्रतिलोम की सहायता से ज्ञात कर सकते हैं। इस प्रकार आव्यूह का क्रम कम हो जाता है और इस स्थिति में प्रत्येक चर के लिए,

$$x_{ji} = X_{ji} - \overline{X}_j \quad \text{और} \quad y_i = Y_i - \overline{Y}$$

है।

इस प्रकार माध्य से विचलन लेने पर K अज्ञात b_j's के लिए $(j = 1, 2, 3, \ldots, K)$ आव्यूह समीकरण निम्न हो जाता है —

$$\begin{bmatrix} \Sigma x_{1i}^2 & \Sigma x_{1i} x_{2i} \ldots \Sigma x_{1i} x_{Ki} \\ \Sigma x_{1i} x_{2i} & \Sigma x_{2i}^2 \ \ldots \Sigma x_{2i} x_{Ki} \\ \vdots & \vdots \\ \Sigma x_{1i} x_{Ki} & \Sigma x_{2i} x_{Ki} \ldots \Sigma x_{Ki}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma x_{1i} y_i \\ \Sigma x_{2i} y_i \\ \vdots \\ \Sigma x_{Ki} y_i \end{bmatrix} \quad \ldots(13.48)$$

यदि b's के गुणांक का प्रतिलोम आव्यूह (c_{ij}) है तो b's के मान निम्न आव्यूह सम्बन्ध की सहायता से ज्ञात किये जा सकते हैं।

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \ldots c_{1K} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \ldots c_{2K} \\ \vdots \\ c_{K1} & c_{K2} & c_{K3} \ldots c_{KK} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma x_{1i} y_i \\ \Sigma x_{2i} y_i \\ \vdots \\ \Sigma x_{Ki} y_i \end{bmatrix} \quad \ldots(13.49)$$

उपर्युक्त सम्बन्ध द्वारा,

$$b_j = c_{j1} \Sigma x_{1i} y_i + c_{j2} \Sigma x_{2i} y_i + \ldots + c_{jK} \Sigma x_{Ki} y_i \quad \ldots(13.50)$$

जहाँ $j = 1, 2, 3, \ldots, K$

और $i = 1, 2, 3, \ldots, n$

b_0 तथा b's के प्रागणित मानों का प्रतिस्थापन करने पर बहुसमाश्रयण समीकरण निम्न रूप में प्राप्त हो जाता है —

$$\hat{Y} = \overline{Y} + b_1 (X_1 - \overline{X}_1) + b_2 (X_2 - \overline{X}_2) + \ldots + b_K (X_K - \overline{X}_K) \quad \ldots(13.51)$$

इस समीकरण को हल करने पर,

$$\hat{Y}=(\overline{Y}-b_1\ \overline{X}_1-b_2\ \overline{X}_2-\ldots-b_K\overline{X}_K)+b_1X_1+b_2X_2+\ldots+b_KX_K \quad \ldots(13.51.1)$$

यहाँ

$$b_0=\overline{Y}-(b_1\ \overline{X}_1+b_2\ \overline{X}_2+\ldots+b_K\ \overline{X}_K)$$

समीकरण (13.44) और (13.51.1) एक समान हैं।

आंशिक समाश्रयण गुणांक

परिभाषा : यह आश्रित चर Y मे अनुमानित परिवर्तन की मात्रा है जो कि स्वतन्त्र चर X का इकाई मान बढाने से होता है जबकि अन्य स्वतन्त्र चरों मे कोई परिवर्तन न किया गया हो। प्राय β_1, β_2 आदि को $\beta_{Y1\ 23\ \ K}$, $\beta_{Y2\ 13\ \ K}$ आदि के रूप में भी लिखते हैं। इस प्रकार का निरूपण स्वय बताता है कि किस चर X का Y के प्रति आंशिक समाश्रयण गुणाक है। किन्तु लिखने मे सुगम न होने के कारण व्यावहारिक दृष्टि से यह अच्छा निरूपण नही है। अत इन्हे केवल β_1, β_2 ... आदि मे ही निरूपित करते हैं और अन्य बातो को स्वय ही ध्यान मे रखा जाता है।

समाश्रयण से विचलन का माध्य वर्ग-योग

इस माध्य वर्ग-योग को $S^2_{Y\ 123\ldots K}$ मे निरूपित करते हैं और

$$S^2_{Y\ 123\ldots K}=\frac{\sum_i (Y_i-\hat{Y}_i)^2}{(n-K-1)} \quad \ldots(13\ 52)$$

माना कि,

$$y_i=(Y_i-\overline{Y}) \quad \text{और} \quad x_{ji}=(X_{ji}-\overline{X}_j)$$

जहाँ $j=1, 2, 3, \ldots, K$

और $i=1, 2, 3, \ldots, n$

यहाँ

$$\sum_i (Y_i-\hat{Y}_i)^2=\sum_i y_i^2-R^2\sum y_i^2 \quad \ldots(13\ 53)$$

है। जब कि $R^2\sum_i y_i^2$ समाश्रयण वर्ग-योग है और गणितीय रूप मे इसका मान इस प्रकार होता है :—

$$R^2\sum_i y_i^2=b_1\sum x_{1i}\ y_i+b_2\sum x_{2i}\ y_i+\ldots+b_K\sum x_{Ki}\ y_i \quad \ldots(13\ 54)$$

अत: (13 53) मे $\sum y_i^2$ व $R^2\sum y_i^2$ के मानो का प्रतिस्थापन करने पर $\sum_i (Y_i-\hat{Y}_i)^2$ का मान ज्ञात हो जाता है। $\sum_i (Y_i-\hat{Y})^2$ का प्रयोग करके (13 52) द्वारा $S^2_{Y\ 123\ \ K}$ का मान ज्ञात हो जाता है।

यदि एक आगणित समाश्रयण गुणाक b_j की मानक त्रुटि ज्ञात करना हो तो

$$s_{bj}^2 = S^2_{Y \; 123....K} \cdot C_{jj} \qquad ....(13.55)$$

जबकि $S^2_{Y \; 123....K}$ का मान सूत्र (13 52) के अनुसार है और C_{jj}, प्रतिलोम आव्यूह में (j, j)वें कोष्ठिका का अंश है। s^2_{bj} का वर्गमूल लेकर मानक विचलन s_{bj} ज्ञात हो जाता है।

दो आंशिक समाश्रयण गुणाकों के अन्तर $(b_j - b_l)$, जबकि $j \neq l$, की मानक त्रुटि $s_{(bj - bl)}$ ज्ञात करने के लिए,

$$s^2_{(bj - bl)} = S^2_{Y \; 123....K} (C_{jj} + C_{ll} - 2 \; C_{jl}) ... (13\;56)$$

जहाँ $j, l = 1, 2, 3, ..., K$

है। यहाँ अन्य सभी संकेतन पूर्व की भाँति हैं। C_{jj}, C_{ll}, C_{jl} के मान, प्रतिलोम आव्यूह के अनुसार प्रतिस्थापित कर दिये जाते हैं।

आगणित आश्रित चर $\hat{Y}$ की मानक त्रुटि

माना कि $\hat{Y}$ की मानक त्रुटि $s_{\hat{y}}$ है जबकि $\hat{Y}$, $\mu_{(Y/X_0)}$ का आगणित मान है और X_0 का निश्चित मान

$$X_0 = (X_{01}, X_{02}, X_{03} .... X_{0k})$$

$$\therefore \quad S^2_{\hat{Y}} = S^2_{y \; 123...K} \left\{ \frac{1}{n} + \sum_{j=1}^{k} C_{jj} \; (X_{0j} - \bar{X}_j)^2 + 2 \sum_{l > j = 1}^{k} C_{jl} \; (X_{0j} - \bar{X}_j) \; (X_{0l} - \bar{X}_l) \right\} \qquad ....(13.57)$$

$\mu_{(Y/X_0)}$ की 100 (1−α) प्रतिशत विश्वास्यता सीमाएँ निम्न सूत्र द्वारा ज्ञात की जा सकती हैं :—

$$\left. \begin{matrix} U \\ L \end{matrix} \right\} = \hat{Y} \pm t_{\alpha, \; (n-k-1)} \; s_{\hat{y}} \qquad ....(13\;58)$$

(जहाँ U उपरि सीमा व L-निम्न सीमा है)

$S_{\hat{Y}}$ का मान (13 57) द्वारा प्राप्त $S^2_{\hat{Y}}$ का वर्गमूल लेकर ज्ञात हो जाता है।

$t_{\alpha, \; (n-k-1)}$, α सा० स्त० व (n−k−1) स्व० को० के लिए सारणीबद्ध मान है।

आंशिक समाश्रयण गुणांकों व दो गुणांकों में अन्तर की सार्थकता-परीक्षा

परिकल्पना $H_0 : \beta_j = 0$ की $H_1 \; \beta_j \neq 0$ के विरुद्ध परीक्षा, प्रतिदर्शज t द्वारा कर सकते हैं जो कि निम्न प्रकार है —

$$t_{n-k-1} = b_j / s_{bj} \qquad ....(13.59)$$

जहाँ b_j, β_j का आगणक है और s_{bj}, b_j का मानक विचलन है।

यदि $t > t_{\alpha, (n-k-1)}$ हो तो H_0 को अस्वीकार कर दिया जाता है जिसका अर्थ है कि β_j सार्थक है और इससे विपरीत स्थिति में H_0 को स्वीकार कर लिया जाता है अर्थात् β_j निरर्थक है। β_j के सार्थक सिद्ध होने का अभिप्राय है कि चर X_j का समीकरण में जोड़ा जाना लाभप्रद है और निरर्थक होने पर X_j का आश्रित चर-पर व्यावहारिक दृष्टि से कोई प्रभाव नहीं है।

यदि परिकल्पना $H_0 \; \beta_j = \beta_l$ की $H_1 \; \beta_j \neq \beta_l$ के विरुद्ध परीक्षा करनी है तो प्रतिदर्शज,

$$t_{n-k-1} = \frac{b_j - b_l}{s_{(bj-bl)}} \qquad ....(13.60)$$

यहाँ b_j व b_l गुणांको β_j व β_l के क्रमशः आगणक हैं और $(b_j - b_l)$ की मानक त्रुटि, सूत्र (12.56) द्वारा परिकलित की जाती है। पहले की भाँति α सा० स्त० पर H_0 की परीक्षा करके समानता के प्रति निष्कर्ष निकाल लिए जाते हैं।

विश्वास्यता सीमाएँ

β_j व $(\beta_j - \beta_l)$ की $100\,(1-\alpha)$ प्रतिशत विश्वास्यता सीमाएँ क्रमशः निम्न सूत्रों की सहायता से ज्ञात कर सकते हैं —

$$\left.\begin{matrix} U \\ L \end{matrix}\right\} = b_j \pm s_{bj}\, t_{\alpha, (n-k-1)} \qquad .(13.61)$$

और

$$\left.\begin{matrix} U \\ L \end{matrix}\right\} = (b_j - b_l) \pm s_{(b_j - b_l)} \times t_{\alpha, (n-k-1)} \qquad ...(13.62)$$

इन सूत्रों में प्रयोगगत संकेतन सब पहले दिये जा चुके हैं।

रैखिक बहु समाश्रयण की स्थिति में प्रसरण-विश्लेषण

यदि रैखिक बहुसमाश्रयण समीकरण में $(k+1)$ प्राचल हैं अर्थात् चर y_k स्वतन्त्र चरों पर आश्रित है और $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots \beta_k$, k आंशिक समाश्रयण गुणांक हैं तो H_0 $\beta_i = 0$, $i = 1, 2, 3, \ldots k$ की, H_1 कम से कम एक β_i शून्य नहीं है के विरुद्ध परीक्षा, प्रसरण-विश्लेषण द्वारा निम्न प्रकार कर सकते हैं —

(सारणी 13–3) प्रसरण विश्लेषण सारणी

विचरण स्रोत	स्व० को०	व० यो०	मा० व० यो०	F-मान
समाश्रयण के कारण	k	$R^2 \sum_i Y_i^2$	$R^2 \sum_i y_i^2/k$	$\dfrac{R^2 \sum_i y_i/k}{(1-R^2) \sum_i y_i^2/n-k-1}$
समाश्रयण से विचलन	$(n-k-1)$	$\sum_i y_i^2 - R^2 \sum_i y_i^2$	$(1-R^2) \sum_i y_i^2/n-k-1$	
कुल	$(n-1)$	$\sum_i y_i^2$		

यदि F का परिकलित मान, α सा० स्त० व $\{k, (n-k-1)\}$ स्व० को० के लिए F के सारणीबद्ध मान से अधिक हो तो आंशिक समाश्रयण गुणांकों को शून्य होने के प्रति परिकल्पना H_0 को अस्वीकार कर दिया जाता है जिसका अभिप्राय है कि बहुसमाश्रयण का लेना उचित है। इसका अर्थ है कि बहुसमाश्रयण द्वारा, आश्रित चर में विद्यमान अधिकांश विचरण की गणना करली गयी है। यदि परिकलित F का मान सारणीबद्ध F–मान से कम हो तो बहुसमाश्रयण रेखा का लिया जाना उचित नहीं है।

उदाहरण 13.7 एक सांख्यिक सर्वेक्षण द्वारा पन्द्रह वर्ष की आयु के लड़कों के शारीरिक भार तथा चार मुख्य अंगों के माप निम्न प्रकार थे —

क्रम संख्या	भार (किलोग्राम) (Y)	ऊँचाई (से० मी०) (X_1)	बैठन ऊँचाई (सें० मी०) (X_2)	सिर की परिधि (से० मी०) (X_3)	सीने की परिधि (से० मी०) (X_4)
1	36.5	161.0	73.5	52.0	69.0
2.	40.5	151.0	79.0	53.0	72.5
3	27.1	143.0	68.0	52.5	64.0
4	33.2	144.0	65.0	52.0	67.0
5	36.0	155.5	73.0	54.0	68.0
6	28.5	133.0	67.0	51.0	63.0
7	38.0	152.0	71.0	52.5	73.0
8	38.0	159.5	76.0	54.6	68.0
9	29.0	143.0	74.0	51.0	63.5

10	34.0	152.0	72.0	53.0	68.0
11	39.0	160.0	76.0	53.0	68.0
12	40.0	155.5	77.0	54.0	71.0
13	41.0	149.5	75.0	52.0	70.0
14	29.0	142.0	80.0	52.5	62.5
15	31.0	148.0	78.0	52.0	63.0
16.	36.0	158.0	78.0	53.0	66.0
17	48.0	163.0	76.0	54.5	77.0
18	30.0	139.0	70.0	53.0	64.0
19	32.0	147.0	70.0	52.0	67.0
20	42.5	164.0	74.0	54.5	70.0
योग	709.0	3020.0	1472.4	1056.1	1354.5
माध्य मान	35.46	151.00	73.62	52.80	67.78

सारणी मे दिये गये न्यास के लिए,

(i) बहुसमाश्रयण रेखा समीकरण

$$Y = b_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2 + b_3 X_3 + b_4 X_4$$

का समंजन,

(ii) $X_1 = 160, X_2 = 76, X_3 = 53, X_4 = 68,$

मानो के लिए Y का आगणन,

(iii) आंशिक समाश्रयण गुणांक β_1 की सार्थकता-परीक्षा,

(iv) परिकल्पना $H_0 . \beta_2 = \beta_3$ की परीक्षा

(v) β_4 के लिए विश्वास्यता सीमाएँ,

(vi) उपर्युक्त समाश्रयण रेखा के लिए प्रसरण विश्लेषण, निम्न प्रकार कर सकते हैं :—

बहुसमाश्रयण रेखा का समंजन करने के लिए सबसे पहले निम्न संख्याओं को ज्ञात करना होता है। यहाँ छोटे अक्षर x, y माध्य से विचलन को निरूपित करते हैं।

$\Sigma x^2_{1i} = 1411.00,$ $\Sigma x_{1i} x_{2i} = 319.50$

$\Sigma x^2_{2i} = 324.44,$ $\Sigma x_{1i} x_{3i} = 125.60$

$\Sigma x^2_{3i} = 22.05,$ $\Sigma x_{1i} x_{4i} = 427.00$

यह न्यास डॉ॰ डी॰ कच्छारी तथा डॉ॰ ए॰ एम॰ जैन, रवीन्द्र नाथ टैगोर, आयुर्विज्ञान महाविद्यालय, उदयपुर के सौजन्य से प्राप्त हुआ।

$\Sigma x^2_{4i} =$ 281 24, $\Sigma x_{2i}\, x_{3i} =$ 30 74

$\Sigma x_{1i}\, y_i =$ 735 80, $\Sigma x_{2i}\, x_{4i} =$ 99 94

$\Sigma x_{2i}\, y_i =$ 176 34, $\Sigma x_{3i}\, x_{4i} =$ 43 68

$\Sigma x_{3i}\, y_i =$ 75 11, $\Sigma y_i^2 =$ 585 13

$\Sigma x_{4i}\, y_i =$ 369 71

चरो x_1, x_2, x_3 x_4 के वर्गों तथा गुणनों के योग द्वारा प्राप्त आव्यूह A निम्न है,

$$A = \begin{bmatrix} 1411\ 00 & 319\ 50 & 125\ 60 & 427{\cdot}00 \\ 319\ 50 & 324\ 44 & 30\ 74 & 99\ 94 \\ 125\ 60 & 30\ 74 & 22\ 05 & 43\ 68 \\ 427\ 00 & 99\ 94 & 43\ 68 & 281\ 24 \end{bmatrix}$$

A का प्रतिलोम कीलकीय मथनन विधि (परिशिष्ट–घ) द्वारा निम्न प्रकार है —

1411 00	319 50	125 60	427 00	1	0	0	0
319 50	324 44	30 74	99 94	0	1	0	0
125 60	30 74	22 05	43 68	0	0	1	0
427 00	99 94	43 60	281 24	0	0	0	1
1	2264	0890	3026	0007087	0	0	0
0	252 1032	2 3045	3 2593	– 2264	1	0	0
0	2 3042	10 8716	5 6734	– 0890	0	1	0
0	3 2672	5 6770	152 0298	– 3026	0	0	1
	1	009141	01293	– 000898	003966	0	0
	0	10·85054	5 6436	– 0869	– 009138	1	0
	0	5 6471	151 9866	– 2997	– 01296	0	1

1			·5201	− 008001	− 00842	09216	0
			149 0495	− 2545	− 008205	− 5204	1
			1	− 001707	− 000055	− 003491	006709

पिवटीय पंक्तियों को फिर से लिखकर ऊपरि त्रिभुज के घटकों को शून्य कर दिया ।
इस प्रकार प्राप्त दायीं ओर का आव्यूह, A^{-1} को निरूपित करता है ।

1	2264	0890	3026	0007087	0	0	0
0	1	009141	01293	− 000898	003966	0	0
0	0	1	·5201	− 008001	− 000842	09216	0
0	0	0	1	− 001707	− 000055	− 003491	006709
1	0	08693	2997	000912	− 000898	0	0
0	1	0	008176	− 000825	003974	− 000842	0
0	0	1	0	− 007113	− 000813	09398	− 003489
0	0	0	1	− 001707	− 000055	− 003491	·006709

1	0	0	2997	00153	– 000827	– 008170	– 0003032
0	1	0	0	– 000811	003974	– 0008135	– 0000548
0	0	1	0	– 007113	– 000813	09398	– 003489
0	0	0	1	– 001707	– 000055	– 003491	006709
1	0	0	0	002041	– 000811	– 007124	– 001707
0	1	0	0	– 000811	0008135	– 0008135	– 0000548
0	0	1	0	– 007113	– 000813	09398	– 003489
0	0	0	1	– 001707	– 000055	– 003491	006709
	I				A^{-1}		

दायी ओर का आव्यूह A^{-1} लगभग सममित है थोडा जो अन्तर पाँचवें दशमलव में है वह परिकलन के कारण है। यदि पाठक चाहें तो यह पुष्टि कर सकते हैं कि

$$A A^{-1} = I$$

अत A^{-1} का प्रयोग करके b_j', s के मान (13 50) की सहायता से निम्न हैं —

$$b_1 = (\ 002041)(735\ 80) + (-\ 000811)(176\ 34) + (-\ 007124)(75\ 11) + (-\ 001707)(369\ 71)$$

$$= 1\ 5018 - \ 1430 - \ 5351 - \ 6311$$

$$= 0\ 1926$$

$$b_2 = (-\ 000811)(735\ 80) + (\ 003974)(176\ 34) + (-\ 0008135)(75\ 11) + (-\ 0000548)(396\ 71)$$

$$= -\ 5967 + \ 7008 - \ 0611 - \ 0203$$

$$= \ 0227$$

इसी प्रकार

$$b_3 = -\ 8984$$

और $$b_4 = \ 9525$$

(13 50) के अनुसार, बहुसमाश्रयण रेखा समीकरण,

$$\hat{Y} = 35\ 46 + \ 1926\ (X_1 - 151\ 00) + \ 0227\ (X_2 - 73\ 62) - \ 8984\ (X_3 - 52\ 80) + \ 9525\ (X_4 - 67\ 78)$$

$$\hat{Y} = -\ 12\ 4187 + \ 1926\ X_1 + \ 0227\ X_2 - \ 8984\ X_3 + \ 9525\ X_4$$

है।

(ii) उपर्युक्त आगणित समीकरण मे $X_1 = 160$, $X_2 = 76$, $X_3 = 53$, $X_4 = 68$ रखने पर Y का आगणित मान $\hat{Y}$ ज्ञात हो जाता है।

$$\hat{Y} = -12\ 4187 + \ 1926 \times 60 + \ 0227 \times 76 - \ 8984 \times 53 + \ 9525 \times 68$$

$$= 37\ 2773$$

यहाँ यह बात ध्यान देने योग्य है कि प्रश्न म, 11 वें प्रेक्षण म दिये हुए X's के इन मानो के लिए Y का प्रेक्षित मान 39 0 है जो कि आगणित मान से अधिक भिन्न नही है।

(iii) सूत्र (13 53) की सहायता से $\sum_i (Y_i - \hat{Y}_i)^2$ का मान ज्ञात करने के लिए (13 54) के अनुसार,

$$R^2 \sum_{1} Y_i^2 = (\ 1926)\ (735\ 80) + (\ 0227)\ (176\ 34)$$

$$-(\ 8984)\ (75\ 11) + (\ 9525)\ (396\ 71)$$

$$= 299\ 844$$

$$\sum_{i} (Y_i - \hat{Y})^2 = 585\ 13 - 299\ 844$$

$$= 285\ 2856$$

$$s^2_{y \cdot 1234} = \frac{285\ 2856}{(20-4-1)}$$

$$= 19\ 0190$$

सूत्र (13 55) के अनुसार,

$$s^2_{b1} = s^2_{Y\ 1234} \times C_{11}$$

$$= 19\ 0190 \times 002041$$

$$= 038818$$

$$= 0\ 197$$

$$H_0\ \ \beta_1 = 0$$

को $H_1 \cdot \beta_1 \neq 0$ के विरुद्ध परीक्षा के लिए (13 59) के अनुसार, प्रतिदर्शज

$$t = \frac{1926}{0\ 197}$$

$$= 0\ 9776$$

5 प्रतिशत सार्थकता स्तर और 15 स्व० को० के लिए सारणी (परि० प-3) द्वारा $t = 2\ 131$ है।

जो कि परिकलित t से अधिक है अत H_0 को स्वीकार कर लिया जाता है। इसका अभिप्राय है कि β_1 निरर्थक है।

(iv) परिकल्पना $H_0 : \beta_2 = \beta_3$ को $H_1\ \ \beta_2 \neq \beta_3$ के विरुद्ध सार्थकता परीक्षा सूत्र (13 60) के द्वारा कर सकते हैं। सूत्र (13 56) की सहायता से,

$$s^2_{(b_2 - b_3)} = s^2_{y\ 1234}\ (C_{22} + C_{33} - 2\ C_{23})$$

$$= 19\ 0190\ \{003974 + 093980 - 2\ (-\ 0008135)\}$$

$$= 19\ 0190\ (\ 099581)$$

$$= 1{\cdot}8939$$

$$\therefore\ \ s_{(b_2 - b_3)} = \sqrt{1\ 8939}$$

$$= 1\ 376$$

$$\therefore \qquad t = \frac{0\ 0227 - (-\cdot 8984)}{1\ 376}$$

$$= 6738$$

सारणी (परि० च–3) द्वारा $t_{05\ 15} = 2\ 131$ है जोकि t के परिकलित मान से अधिक है अत परिकल्पना H_0 को स्वीकार कर लिया जाता है अर्थात् B_2 और B_3 मे अन्तर सार्थक नही है।

(v) B_4 को 95 प्रतिशत विश्वास्यता सीमाएँ ज्ञात करने के लिए,

$$s_{b4}^2 = s_{y\ 1234}^2\ C_{44}$$

$$= 19\ 0190 \times 006709$$

$$= 127598$$

$$s_{b4} = 3572$$

सूत्र (13 61) के अनुसार,

$$\left.\begin{matrix} U \\ L \end{matrix}\right\} = 9525 \pm 3572 \times 2\ 131$$

$$= 9525 \pm 7612$$

अतः B_4 की उपरि सीमा U = 1 7137 और निम्न सीमा L = 1913 है।

(vi) रैखिक बहुसमाश्रयण के लिए प्रसरण-विश्लेषण सारणी

विचरण-स्रोत	स्व० को०	व० य०	मा०व०य०	F-मान
समाश्रयण के कारण	4	299 844	74 96	$\frac{74\ 96}{19\ 02} = 3\ 94$
समाश्रयण से विचलन	15	285 286	19 02	
कुल	19	585 13		

उपर्युक्त विश्लेषण, सारणी (13.3) के अनुसार किया गया है।

$\alpha = 05$ और (4, 15) स्व० को० पर F का सारणी (परि० च–5 2) द्वारा मान 3 06 है जो कि परिकलित F से कम है। अत F-परीक्षा द्वारा बहुसमाश्रयण की सार्थकता सिद्ध होती है। यह इस बात की पुष्टि करता है कि आश्रित चर का इन स्वतन्त्र चरों द्वारा पर्याप्त शुद्ध मापन किया गया है।

दो स्वतन्त्र चर होने पर समाश्रयण रेखा का समंजन

माना कि रैखिक बहुसमाश्रयण समीकरण

$$Y=\beta_0+\beta_1X_1+\beta_2X_2 \qquad \text{....(13.63)}$$

और $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ के प्रागणित मान क्रमश b_0 b_1 व b_2 हैं। उपर्युक्त समीकरण का समंजन बिना आव्यूह की सहायता से इस विशेष स्थिति में 'n' परिमाण के प्रतिदर्श के आधार पर निम्न प्रकार किया जा सकता है। तथापि यह विधि भी न्यूनतम वर्ग विधि पर आधारित है। यहाँ प्रसामान्य समीकरणों को सामान्य रूप में हल करके, b_1 व b_2 के मानों का परिकलन किया गया है।

यदि $x_{1i}=X_{1i}-\overline{X}_1,\ x_{2i}=X_{2i}-\overline{X}_2\ \ y_i=Y_i-\overline{Y}$

मानलें तो,

$$b_0=\overline{Y} \qquad \text{...(13.64)}$$

$$b_1=\frac{(\Sigma x^2_{2i})(\Sigma x_{1i}\, y_i)-(\Sigma x_{1i}\, x_{2i})(\Sigma x_{2i}\, y_i)}{(\Sigma x_{1i}^2)(\Sigma x_{2i}^2)-(\Sigma x_{1i}\, x_{2i})^2} \qquad \text{...(13.65)}$$

$$b_2=\frac{(\Sigma x_{1i}^2)(\Sigma x_{2i}\, y_i)-(\Sigma x_{1i}\, x_{2i})(\Sigma x_{1i}\, y_i)}{(\Sigma x_{1i}^2)(\Sigma x_{2i}^2)-(\Sigma x_{1i}\, x_{2i})^2} \qquad \text{..(13.66)}$$

b_0, b_1, b_2 के परिकलित मानों को निम्न समीकरण (13.67) म प्रतिस्थापित करने पर प्रागणित समाश्रयण रेखा,

$$\hat{Y}=\overline{Y}+b_1\ (X_1-\overline{X}_1)+b_2(X_2-\overline{X}_2) \qquad \text{.(13.67)}$$

ज्ञात हो जाती है।

उदाहरण 13.8 गेहूँ की छ किस्मों की उपज तथा इसके दो घटकों सम्बन्धी न्यास निम्न सारणी में दिया गया है —

गेहूँ की किस्म	गेहूँ की उपज (क्विंटल प्रति हेक्टर) (Y)	भूसे की मात्रा (क्विंटल प्रति हेक्टर) (X_1)	बाली (Spikes) की प्रति वर्ग-मीटर संख्या (X_2)
कल्यान सोनारा	58 22	82 21	419
सोनालिका	58 71	79 50	402
एम० 331	57 02	94 35	544
यू० पी० 301	55 78	85 61	433
ई० ए० 222-1	35 62	78 05	589
एन० डी० 1941	63 68	79 09	519

इस न्याम मे रैखिक बहुसमाश्रयण समीकरण का समजन निम्न प्रकार कर सकते हैं —

$\Sigma Y_i = 329.03$, $\Sigma y_i^2 = 479.60$

$\Sigma X_{1i} = 498.81$ $\Sigma x_{1i}^2 = 188.20$

$\Sigma X_{2i} = 2906.00$ $\Sigma x_{2i}^2 = 29399.34$

$\Sigma x_{1i} y_i = 171.55$, $\Sigma x_{2i} y_i = -2162.87$

$\Sigma x_{1i} x_{2i} = 229.37$

$\bar{Y} = 54.838$, $\bar{X}_1 = 83.135$, $\bar{X}_2 = 484.333$

सूत्रों (13.65) व (13.66) की सहायता से,

$$b_1 = \frac{(29399.34)(171.55) - (229.37)(-2162.87)}{(188.20)(29399.34) - (229.37)^2}$$

$$= \frac{5539554.2689}{5480345.1911}$$

$$= 1.011$$

$$b_2 = \frac{(188.20)(-2162.87) - (229.37)(171.55)}{(188.20)(29399.34) - (229.37)^2}$$

$$= \frac{-446400.5575}{5480345.1911}$$

$$= -0.08145$$

(13.67) के अनुसार रैखिक बहुसमाश्रयण समीकरण,

$$\hat{Y} = 54.838 + 1.011\ (X_1 - 83.135) - 0.08145(X_2 - 484.33)$$

$$\hat{Y} = 10.238 + 1.011\ X_1 - 0.08145\ X_2$$

है।

यदि $X_1 = 80$, $X_2 = 500$ के लिए Y के मान का आगणन करना है तो,

$$\hat{Y} = 10.238 + (1.011)(80) - (0.08145)(500)$$

$$= 50.393$$

प्रश्नावली

1 निम्न की परिभाषा दीजिये —

(क) समाश्रयण गुणाक

(ख) आंशिक समाश्रयण गुणाक

2 एक समाश्रयण रेखा का समजन किस सिद्धान्त पर आधारित है ? इस सिद्धान्त का समुचित वर्णन भी दीजिये।

3 कारण बताइये कि चर Y का X पर समाश्रयण वह क्यों नहीं होता है जो X का चर Y पर होता है।

4 *निम्न न्यास के लिए सरल समाश्रयण रेखाओं को ज्ञात कीजिये —*

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Y	9	8	10	12	11	13	14	16	15

X=6 2 के मान के लिए Y का आगणन भी कीजिये।

(आई० ए० एस०, 1954)

समाश्रयण रेखाएँ

$$\left[\begin{array}{l}\hat{Y}= 95X+7\ 25,\ \hat{X}= 95Y-6\ 4\\ \text{हैं और } \hat{Y}=13\ 14 \text{ है।}\end{array}\right]$$

5 समाश्रयण से आप क्या समझते हैं ? साधारणतया दो समाश्रयण रेखाएँ क्या होती हैं ? ये रेखाएँ कब संपाती (Coincident) होती हैं ? एक आर्थिक *अध्ययन में समाश्रयण समीकरण के प्रयोग का वर्णन कीजिये।*

(एम० कॉम०, बम्बई, 1964)

6 एक धातु के प्रतिदर्शों की कठोरता (X) और तनाव-सामर्थ्य (Y) किन्हीं *निश्चित इकाइयों में निम्न दिये हुए हैं —*

X .	146	152	158	164	170	176	182
Y	75	78	77	79	82	85	86

Y की X पर समाश्रयण रेखा ज्ञात कीजिये।

(आई० सी० डब्ल्यू० ए०, 1969)

[उत्तर $\hat{Y} = 0\ 31\ X+29\ 46$]

7. बम्बई के स्टॉक-एक्सचेन्ज पर 12 स्टॉकों के एक निश्चित दिन के दर मूल्य (X) और हजार शेयरों में बिक्री (Y) के प्रति निम्न परिकलन किये गये। इन *परिकलनों की सहायता से समाश्रयण रेखाएँ ज्ञात कीजिये।*

$$\Sigma X=580,\ \Sigma Y=370,\ \Sigma XY=11\ 494$$

$$\Sigma X^2=41,658,\ \Sigma Y^2=17,206$$

(बी० ए० (ऑनर्स) दिल्ली, 1971)

$$\left[\begin{array}{ll}\text{उत्तर} & \hat{Y}=53\ 55-0\ 47\ X\\ & \hat{X}=79\ 16-1\ 1\ \ Y\end{array}\right]$$

8. यदि दो चर Y और X हैं जिनमें Y, चर X पर आश्रित है तो बताइये कि लम्बकोणीय बहुपद विधि द्वारा एक बहुपद समाश्रयण समीकरण का समंजन करने के क्या लाभ हैं ? यह बताइये कि किस स्थिति में लम्बकोणीय बहुपद विधि का प्रयोग करना सुगम है ?
9. एक प्रयोग में खर्व गेहूँ (dwarf wheat) की एक किस्म, सोनारा-64 (Sonara-64) की उपज नाइट्रोजन की विभिन्न मात्राओं पर निम्न प्रकार थी—

नाइट्रोजन की मात्रा (किलो प्रति हेक्टर)	गेहूँ की उपज (क्विंटल प्रति हेक्टर)
0	17 84
40	26·90
80	44·57
120	51·63
160	52·61
200	53·89

इस न्यास में एक घन घातीय बहुपद समीकरण का समंजन कीजिये और रैखिक द्विघात व घनघात पदों की सार्थकता की परीक्षा कीजिये ।
10. एक प्रयोग में लिए गये कुछ बछड़ों की आयु (X) तथा तदनुसार भार (Y) निम्न सारणी में दिये गये हैं जबकि इन बछड़ों को सदैव एक से भोजन पर ही रखा गया :—

आयु (महीनों में) :	0·5,	1·0,	1·5,	2·0,	2·5,
	3 0,	3·5,	4 0,	4·5,	5 0
	5·5	6·0			
भार (किलोग्राम में) :	25 0,	29 0,	33 3,	38 7,	44·8
	51·0	58·5,	66·7	76·3	86·7
	94 8,	103·5			

(i) Y की X पर समाश्रयण रेखा का समंजन कीजिये ।

(ii) समाश्रयण गुणांक की सार्थकता-परीक्षा कीजिये ।

(iii) समाश्रयण गुणांक β_{YX} की 99 प्रतिशत विश्वास्यता सीमाएँ ज्ञात कीजिये।

(iv) समाश्रयण रेखा को ग्राफ पेपर पर आलेखित कीजिये।

11 एक प्रयोग के अन्तर्गत K_2O की विभिन्न मात्राओं पर कन्द (Tuber) की उपज निम्न प्रकार थी —

K_2O की मात्रा (किलो॰ प्रति हैक्टर)	कन्द की उपज (क्विंटल प्रति हैक्टर)
0	221
25	251
50	265
75	275
100	291
125	262
150	242

(i) इस न्यास में एक द्विघात समीकरण का समजन कीजिये।

(ii) रैखिक तथा द्विघात पदों की सार्थकता-परीक्षा कीजिये।

(iii) K_2O की 80 किलोग्राम प्रति हैक्टर मात्रा के लिए उपज की प्रागुक्ति कीजिये।

12 चावल पर किये गये एक कीट नियन्त्रण प्रयोग के अन्तर्गत निम्न प्रेक्षण प्राप्त हुए —

चावल की उपज (क्विंटल प्रति हैक्टर) (Y)	5% जनसंख्या में वर्धक दौजियों की संख्या (X_1)	प्रति पुष्प गुच्छ दानों की संख्या (X_2)	बाली पर बन्ध्यता (X_3)
3009	1269	106.8	6.7
3882	1320	118.1	3.9
3208	1295	116.2	4.4
3616	1322	128.6	4.0
3430	1302	134.5	4.1
3843	1205	142.5	4.2

(i) अनेकधा समाश्रयण रेखा,

$$\hat{Y}=a_0+a_1X_1+a_2X_2+a_3X_3$$

का समंजन कीजिये।

(ii) आंशिक समाश्रयण गुणांकों की सार्थकता परीक्षा कीजिये।

(iii) परिकल्पना $H_0 : \beta_{1\cdot23}=\beta_{3\cdot12}$ की $H_1 : \beta_{1\cdot23}\neq\beta_{3\cdot12}$ के विरुद्ध परीक्षा कीजिये।

(iv) समाश्रयण विश्लेषण कीजिये और बहुसमाश्रयण रेखा के औचित्य पर टिप्पणी कीजिये।

13. चरों X_1, X_2, X_3 के माध्य से विचलन के वर्ग-योगों तथा गुणनफलनों के आव्यूह का प्रतिलोम आव्यूह निम्न हैं :—

$$(C_{ij}) = \begin{bmatrix} \cdot10 & -\cdot15 & -\cdot20 \\ & \cdot12 & -\cdot05 \\ & & \cdot17 \end{bmatrix}$$

और $\sum_i x_{1i} Y_i=15,\ \sum_i x_{2i} Y_i=25,\ \sum_i x_{3i} y_i=20,\ n=10$

आंशिक समाश्रयण गुणाकों का परिकलन कीजिये।

14. तिल की विभिन्न किस्मों पर प्रयोग में निम्न प्रेक्षण प्राप्त हुए :—

किस्म संख्या	प्रति पौधे की उपज (ग्राम में) (Y)	प्रति पौधे में शाखाएँ (X_1)	प्रति सम्पुट (Capsule) बीजों की संख्या (X_2)
1	5·4	5·1	70·6
2	5·5	5·2	58·4
3	6·0	1·3	75·6
4	6·6	4·6	79·5
5	1·7	3·0	63·2
6	4·6	1·6	66·5
7	3·9	2·7	72·2
8	8·0	4·1	69·8
9	6·6	3·6	108·5
10	0·6	4·2	59·3

उपर्युक्त न्यास द्वारा समाश्रयण रेखा

$$\hat{Y}=b_0+b_1X_1+b_2X_2$$

का समंजन कीजिये और $X_1=5$ व $X_2=80$ के लिए Y का आगणन कीजिये।

□□□

14 सहसम्बन्ध

पिछले अध्याय मे हम देख चुके हैं कि यदि Y का X पर समाश्रयण सरल रेखीय हो तो माध्य त्रुटि वर्ग योग,

$$\sigma_e^2 = \sigma_Y^2 - \frac{\sigma_{XY}^2}{\sigma_X^2}$$

$$= \sigma_Y^2 \left[1 - \frac{\sigma_{XY}^2}{\sigma_X^2 \sigma_Y^2}\right]$$

होता है। यदि $\frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y} = 0$ हो तो समाश्रयण के उपयोग से कुछ लाभ नहीं होता है अर्थात् X के ज्ञान से Y के मान का अनुमान लगाने मे कोई सहायता नहीं मिलती है। $\sigma_{XY}^2/\sigma_X^2 \sigma_Y^2$ का मान जितना अधिक हो उतनी ही त्रुटि कम होती है। इसलिए इसको Y और X के बीच रैखिक सहसम्बन्ध का कोटि माप माना जा सकता है। इसको ρ^2 से सूचित करते हैं। ρ इसका वर्गमूल है जिसका मान धनात्मक या ऋणात्मक, σ_{XY} के मान के अनुसार होता है। ρ को X और Y का सहसम्बन्ध गुणांक कहते हैं। ρ के आकलक को r से निरूपित किया जाता है।

परिभाषा सहसम्बन्ध गुणांक किन्ही दो चरों मे रैखिक साहचर्य (Linear association) की कोटि का माप है।

व्यवहार मे अधिकतर प्रतिदर्श का प्रयोग किया जाता है। अत यहाँ सब सूत्र r के लिए दिये गये हैं। ρ का मान, इन्हीं सूत्रों मे समष्टि के समरूप मानों को रखकर ज्ञात कर सकते हैं।

माना कि एक n परिमाण के प्रतिदर्श एककों पर चरों X और Y के लिए युग्मित प्रेक्षण निम्न हैं :—

X : $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$

Y $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots, Y_n$

सहसम्बन्ध गुणांक r का सूत्र,

$$r_{XY} = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{v(X)\, v(Y)}} \qquad \ldots(14.1)$$

है।

यदि cov (X, Y) $= s_{XY}$, v (X) $= s_X^2$ और v (Y) $= s_Y^2$, सूत्र (14.1)

में रखदें तो,

$$r = \frac{s^*_{XY}}{s_X s_Y} \quad ....(14.1.1)$$

है। इस सूत्र को निम्न रूप मे सुगमता से दिया जा सकता है :—

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2 \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \overline{Y})^2}} \quad ....(14.1.2)$$

$$= \frac{\sum_i X_i Y_i - \frac{(\sum_i X_i)(\sum_i Y_i)}{n}}{\sqrt{\left\{\sum_i X_i^2 - \frac{(\sum_i X_i)^2}{n}\right\}\left\{\sum_i Y_i^2 - \frac{(\sum_i Y_i)^2}{n}\right\}}} \quad ....(14.1.3)$$

यदि सूत्र (14.1.2) में $(X_i - \overline{X}) = x_i$, $Y_i - \overline{Y} = y_i$ रखदें तो

$$r = \frac{\sum_i x_i y_i}{\sqrt{\sum_i x_i^2 \sum_i y_i^2}}$$

स्वार्ज असमिका (Schwarz inequality),

$$\text{Cov}(X, Y) < \sqrt{V(X)V(Y)}$$

के अनुसार ρ (या r) का मान कभी 1 से अधिक नही हो सकता है। यदि चरो में सहप्रसरण का मान ऋणात्मक हो तो ρ का मान − 1 से कम नही हो सकता है क्योंकि सूत्र मे हर (denominator) कदापि ऋणात्मक नही हो सकता है। यदि दो चर स्वतन्त्र हों तो उनमें सहसम्बन्ध गुणांक सदैव शून्य होता है। इसका कारण यह है कि इस स्थिति में सहप्रसरण शून्य हो जाता है। इस तथ्य को निम्न प्रकार सिद्ध कर सकते हैं :—

माना $E(X_i) = E(\overline{X}) = \mu_X$

और $E(Y_i) = E(\overline{Y}) = \mu_Y$

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X, Y) &= E(X - \mu_X)(Y - \mu_Y) \\ &= E(X - \mu_X)\, E(Y - \mu_Y) \\ &= (\mu_X - \mu_X)(\mu_Y - \mu_Y) \\ &= 0 \end{aligned}$$

किन्तु यदि r=0 हो तो इसका यह तात्पर्य नही है कि X और Y स्वतन्त्र हैं।

सहसम्बन्ध गुणांक के लिए ऊपर दिये सूत्रों में से किसी एक का परिकलन में सुविधा के अनुसार उपयोग कर सकते हैं। r का मान धनात्मक हो तो धनात्मक सहसम्बन्ध और ऋणात्मक हो तो ऋणात्मक सहसम्बन्ध कहलाता है।

उदाहरण 14.1 उदाहरण (13.1) में दिये गये 12 युगल प्रेक्षणों के लिए, खरपतवारों की सख्या तथा मक्का की उपज में सहसम्बन्ध गुणांक निम्न प्रकार ज्ञात कर सकते हैं :—

यहाँ दिये गये परिकलनों का यहाँ सीधा प्रयोग किया गया है।

सूत्र (13.1.2) के द्वारा,

$$r = \frac{-523}{\sqrt{2232 \times 318}}$$

$$= \frac{-523}{842.48} = -0.62$$

r का मान − 0.62 है जो कि उच्च क्रम का ऋणात्मक सहसम्बन्ध है। अत: यह कह सकते हैं कि जब खरपतवार की सख्या बढ़ती है तो उपज घटती है। r सार्थक होने पर ही दिया गया तर्क वैध है। r की सार्थकता-परीक्षा प्रतिदर्शज t द्वारा की जाती है जिसका विवरण आने वाले खण्ड में सूत्र (14.13.1) द्वारा दिया गया है।

सहसम्बन्ध गुणांक और समाश्रयण गुणांकों में सम्बन्ध

हम जानते हैं कि,

$$b_{YX} = \frac{\text{cov}(X, Y)}{v(X)} = \frac{s_{XY}}{s_X^2} \qquad \text{....(14.2)}$$

$$b_{XY} = \frac{\text{cov}(X, Y)}{v(Y)} = \frac{s_{XY}}{s_Y^2} \qquad \text{....(14.3)}$$

और

$$r_{XY} = r_{YX} = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{v(X)\,v(X)}} \qquad \text{....(14.4)}$$

$$= \frac{s_{XY}}{\sqrt{s_X^2 \cdot s_Y^2}} \qquad \text{....(14.4.1)}$$

$$\therefore \quad r^2 = \frac{s_{XY}^2}{s_X^2\, s_Y^2}$$

$$= b_{YX}\; b_{XY}$$

या $$r = \sqrt{b_{YX} \cdot b_{XY}} \qquad \text{....(14.5)}$$

अत सम्बन्ध (14 5) द्वारा स्पष्ट है कि सहसम्बन्ध गुणाक दोनो समाश्रयण गुणाको के गुणोत्तर माध्य के समान होता है। साथ ही यह बात ध्यान देने योग्य है कि b_{YX}, b_{XY}, s_{XY} और r का चिह्न सदैव एक सा होता है क्योंकि s_X व s_Y सर्वदा धनात्मक होते हैं। अतः r का चिह्न वही लेना होता है जो कि b_{YX} या b_{XY} का है।

निर्धारण गुणांक

सूत्र (14 1 4) की सहायता से,

सख्या $(\sum_i x_i y_i)^2/\sum_i x_i^2 = r^2 \sum_i y_i^2$. (14 6)

या $r^2 = (\sum_i x_i y_i)^2/\sum_i x_i^2 \sum_i y_i^2$ (14 7)

$$r^2 = r^2 \sum_i y_i^2/\sum_i y_i^2 \quad (14\,8)$$

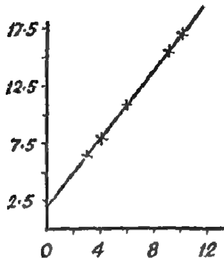
सम्बन्ध (14 8) से स्पष्ट है कि r^2 समाश्रयण के कारण वर्ग योग और कुल वर्ग याग के अनुपात के समान होता है। इस सख्या r^2 को निर्धारण गुणाक कहते हैं इसी प्रकार सख्या $(1-r^2)$ अनिर्धारण गुणाक कहलाती है। सख्या $\sqrt{1-r^2}$ को सक्रामण गुणाक (Coefficient of alienation) कहते हैं।

सहसम्बन्ध गुणांक का ज्यामितीय निरूपण

इस अध्याय के प्रारम्भ मे ही कहा जा चुका है कि चर X और Y मे सम्बन्ध रैखीय होता है। इस रेखा की चतुर्थांश (quadrant) मे स्थिति, r के मान पर निर्भर करती है। उदाहरण के लिए कुछ मान लेकर रेखा की स्थिति को चित्रो द्वारा प्रदर्शित किया गया है। किसी भी स्थिति मे सामान्य रेखा समीकरण को $Y=mX+c$ के रूप म दिया जा सकता है।

(1) यदि $r=1$ हो तो सूत्र (14 1 2) मे Y के स्थान पर $mX+c$ रख देने पर $r=1$ आ जाता है अत $r=1$ होना m व c पर निर्भर नही है, इसका अभिप्राय है कि X और Y मे परिपूर्ण सहसम्बन्ध होने पर जितना परिवर्तन एक विचरमान मे होता है उसके समानुपाती परिवर्तन अन्य चर मे तदनुसार मान मे होता है। इस स्थिति मे सब युगल प्रेक्षण रेखा पर स्थित होते है। जैसा कि चित्र (14 1) मे दिखाया गया है। निम्न प्रेक्षणो के लिए $r=1$ है।

X	Y
3	6 5
4	8 0
6	11 0
9	15 5
10	17 0



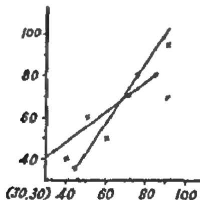
चित्र 14-1 r=1 अर्थात् चरों में परिपूर्ण सहसम्बन्ध का आलेखी प्रदर्शन

(2) निम्न प्रेक्षणों के लिए सहसम्बन्ध गुणांक r = ·903 है अर्थात् चर X और Y में सम्बन्ध उच्च स्तरीय है।

X . 45, 70, 65, 30, 90, 40, 50, 75, 85, 60

Y 35, 90, 70, 40, 95, 40, 60, 80, 80, 50

इस स्थिति में सब युगल प्रेक्षण रेखा पर स्थित नहीं होते हैं। किन्तु रेखा पर अस्थित बिन्दु इसके समीप में ही होते हैं जैसा कि चित्र (14-2) से स्पष्ट है।



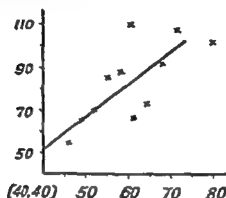
चित्र 14-2 r=·903 की स्थिति में आलेखी निरूपण

(3) निम्न युगल प्रेक्षणों में सहसम्बन्ध गुणांक r=·452 है। यहाँ प्रेक्षणों में सहसम्बन्ध अल्प है।

X 40, 46, 49, 61, 64, 52, 55, 58, 68, 77, 70, 60

Y : 51, 55, 65, 67, 73, 70, 85, 88, 92, 102, 106, 110

इस स्थिति में कुछ ही प्रेक्षण रेखा पर स्थित होते हैं। इसके अतिरिक्त यहाँ अस्थित बिन्दुओं की रेखा से दूरी उच्च स्तरीय सहसम्बन्ध की अपेक्षा अधिक होती है जैसा कि चित्र (14–3) में दिखाया गया है।

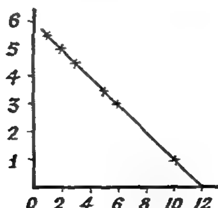


चित्र 14–3 r = 452 की स्थिति में रेखा चित्र

(4) निम्न युगल प्रेक्षणों में सहसम्बन्ध गुणाक r = − 1 है यहाँ सहसम्बन्ध परिपूर्ण एवं ऋणात्मक है।

X	2,	1,	5,	3,	6,	10,	12
Y	5 0,	5 5,	3·5,	4 5,	3 0,	1 0,	0

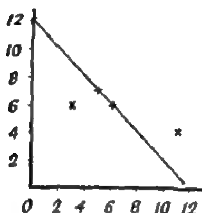
इस सहसम्बन्ध गुणाक के लिए रेखा भुज-अक्ष से 90° से अधिक का कोण बनाती है। सब युगल प्रेक्षण रेखा पर स्थित होते हैं। अतः यदि एक विचर का मान बढ़ता है तो अन्य का मान एक निश्चित समानुपात में घटता है। इस रेखा को उपर्युक्त प्रेक्षणों के लिए चित्र (14–4) में दिखाया गया है।



चित्र 14–4 r = − 1 अर्थात् ऋणात्मक परिपूर्ण सहसम्बन्ध का रेखीय निरूपण

(5) निम्न युगल प्रेक्षणों में सहसम्बन्ध गुणाक r = −·153 है।

X	3,	5,	6,	0,	11
Y	6,	7,	6,	12,	4

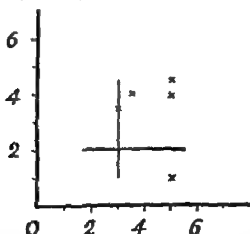


चित्र 14–5 $r = -.153$ की स्थिति में प्रक्षिप्त बिन्दु एवं रेखा

इस स्थिति में भी रेखा X–अक्ष से 90° से अधिक का कोण बनाती है। यहाँ सब युगल प्रेक्षणों में एक चर के अनुसार दूसरे में परिवर्तन समानुपातिक नहीं होता है। इसके अतिरिक्त रेखा पर कुछ ही आलेखित बिन्दु स्थित होते हैं। जितना r का मान कम होता है उतनी ही बिन्दुओं की रेखा से दूरी अधिक होती है जैसा कि (चित्र 14–5) से स्पष्ट है।

(6) निम्न युगल प्रेक्षणों में सहसम्बन्ध गुणांक शून्य के समान है अर्थात् $r = 0$ है।

X·	5 0	2·5,	5 0,	3 0,	3 5,	5 0
Y:	1 0,	2 0,	4 0,	4 5,	4 0,	4 5



चित्र 14–6 $r = 0$ की स्थिति में प्रकीर्णन आरेख

चरों में सहसम्बन्ध न होने की स्थिति में चित्र एक प्रकीर्ण आरेख (Scatter diagram) होता है। चर X और Y स्वतन्त्र होने के कारण, आलेखित बिन्दु अनेक

(*collinear*) नही होते हैं। अतः इस रेखा पर दो से अधिक बिन्दु स्थित नही होते हैं और एक दूसरे से दूरी भी अधिक होती है।

इन चित्रों की भाँति, r के किसी भी अन्य मान को निरूपित करती हुई रेखा दिखाई जा सकती है।

युगल प्रेक्षणों की परिवर्ती बारम्बारता की स्थिति में सहसम्बन्ध

पूर्व में दिये r के लिए सूत्रो मे यह कल्पना की गई थी कि प्रत्येक प्रेक्षण एक बार या समान बारम्बारता सहित घटित है। यदि यह कल्पना सत्य न हो अर्थात् युगल प्रेक्षणो की बारम्बारता भिन्न-भिन्न हो तो r के परिकलन मे बारम्बारता को भी सम्मिलित करना आवश्यक है। माना कि युगल प्रेक्षण और उनकी तदनुसार बारम्बारता इस प्रकार है :—

चर (X)	चर (Y)	बारम्बारता (f)
X_1	Y_1	f_1
X_2	Y_2	f_2
X_3	Y_3	f_3
⋮	⋮	⋮
X_K	Y_K	f_K

माना $\sum_{i=1}^{K} f_i = n$ (प्रतिदर्श परिमाण)

चर X और Y मे सहसम्बन्ध गुणांक r को निम्न सूत्र की सहायता से ज्ञात कर सकते हैं :—

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{K} f_i (X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{K} f_i (X_i - \overline{X})^2 \times \sum_{i=1}^{K} f_i (Y_i - \overline{Y})^2}} \quad \text{....(14 9)}$$

यदि $X_i - \overline{X} = x_i$ और $(Y_i - \overline{Y}) = y_i$ रखदें तो,

$$\therefore \quad r = \frac{\sum_i f_i x_i y_i}{\sqrt{(\Sigma f_i x_i^2)(\Sigma f_i y_i^2)}} \quad \text{....(14 9.1)}$$

यदि प्रेक्षणो का माध्य से विचलन ज्ञात करने मे कठिनाई या अशुद्धि हो तो उपर्युक्त सूत्र को निम्न रूप मे प्रयोग कर सकते हैं। इसमे प्रेक्षणो का माध्य से विचलन ज्ञात नही करना होता है :—

$$r = \frac{\sum_i f_i X_i Y_i - \frac{\left(\sum_i f_i X_i\right)\left(\sum_i f_i Y_i\right)}{n}}{\sqrt{\sum_i f_i X_i^2 - \frac{\left(\sum_i f_i X_i\right)^2}{n}}\sqrt{\sum_i f_i Y_i^2 - \frac{\left(\sum_i f_i Y_i\right)^2}{n}}} \quad \text{....(14 9 2)}$$

जहाँ $\sum_i f_i = n$

उदाहरण 14.2 : एक कक्षा के विद्यार्थियों की उपस्थिति, इनके द्वारा प्राप्त अंकों के वर्ग अन्तराल तथा विद्यार्थियों की संख्या निम्न सारणी में दी गई है।

अंकों के वर्ग अन्तराल X	उपस्थिति Y	विद्यार्थियों की संख्या f
20 — 30	26	1
30 — 40	33	2
40 — 50	34	6
50 — 60	35	4
60 — 70	40	5
70 — 80	42	2

विद्यार्थियों के अंकों व उपस्थिति में सहसम्बन्ध गुणांक निम्न प्रकार ज्ञात कर सकते हैं :—

वर्गों के मध्य-मान यहाँ पर X के मानों के रूप लिये जाते हैं।

अतः X व Y में सहसम्बन्ध गुणांक निम्न सारणी बनाकर ज्ञात करना सुगम है।

यहाँ $\sum_i f_i X_i = 1060$ और $\sum_i f_i = 20$

$$\therefore \quad \overline{X} = \frac{1060}{20} = 53$$

$$\sum_i f_i Y_i = 720 \qquad \therefore \quad \overline{Y} = \frac{720}{20} = 36$$

माना $X_i - \overline{X} = x_i$

और $Y_i - \overline{Y} = y_i$

परिकलन के लिए सारणी :—

X	Y	f	x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$	fx_i^2	fy_i^2	$fx_i y_i$
25	26	1	−28	−10	784	100	280	784	100	280
35	33	2	−18	− 3	324	9	54	648	18	100
45	34	6	− 8	− 2	64	4	16	384	24	96
55	35	4	2	− 1	4	1	− 2	16	4	− 8
65	40	5	12	+4	144	16	48	720	80	240
75	42	2	22	+6	484	36	132	968	72	264
योग								3520	298	980

सूत्र (14 9 1) द्वारा,

$$r = \frac{980}{\sqrt{298 \times 3520}} = \frac{980}{\sqrt{1048960}} = \frac{980}{1024\ 13}$$
$$= 0\ 956$$

है। अत विद्यार्थियों के प्राप्त अंकों तथा उपस्थिति में उच्च क्रम का सहसम्बन्ध है।

सहसम्बन्ध-गुणांक का प्रायिकता घनत्व फलन

यह अध्याय (10) में दिया जा चुका है कि एक प्रसामान्य चर X, जिसका माध्य μ_x और मानक विचलन σ_x है, का घनत्व फलन

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_x} e^{-\frac{1}{2\sigma_x^2}(x-\mu_x)^2}$$

होता है। X के दो मानों के बीच प्रेक्षणों की प्रायिकता, इन पर कोटियों के बीच के क्षेत्र के समान होती है इसी प्रकार दो चर X और Y जिनके बंटन क्रमशः $N(\mu_x, \sigma_x)$ और $N(\mu_y, \sigma_y)$ हैं, समतल पर मानों का एक युगल प्रदर्शित करते हैं। प्रसामान्य द्विचर बंटन की स्थिति में घनत्व फलन $f(x, y)$ निम्न सूत्र द्वारा ज्ञात किया जा सकता है।

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left\{\frac{(x-\mu_x)^2}{\sigma_x^2} - 2\rho\frac{(x-\mu_x)(y-\mu_y)}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(y-\mu_y)^2}{\sigma_y^2}\right\}} \quad \text{....(14 10)}$$

घनत्व फलन को द्विचर के सम्बन्ध में एक वक्र से नहीं बल्कि एक पृष्ठ से दर्शाते हैं।

जहाँ ρ चरों X और Y में समग्र सहसम्बन्ध-गुणांक है। इस स्थिति में प्रायिकता, आयतन द्वारा ज्ञात की जाती है और प्रसामान्य द्विचर बारम्बारता बटन का रूप त्रुटि-त्रिकोण (Cocked hat) जैसा होता है। इसको चित्र (14-7) में दिखाया गया है।



चित्र 14–7 त्रुटि-त्रिकोण (Cocked hat)

प्रसामान्य द्विचर बटन के लिए शोधित वर्ग योग s_x^2, s_y^2 और सहसम्बन्ध गुणांक का सम्मिलित बटन इस प्रकार का होता है —

$$C\ e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{s_x^2}{\sigma_x^2}-2\rho r\cdot\frac{s_x s_y}{\sigma_x\sigma_y}+\frac{s_y^2}{\sigma_y^2}\right)} \times (s_x s_y)^{n-2}(1-r^2)^{\frac{n-4}{2}}\, ds_x\, ds_y\, dr. \quad ....(14.11)$$

व्यञ्जक (14.11) में,

$$s_x^2 = \sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2,\quad s_y^2=\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\overline{Y})^2$$

और C एक अचर है।

यदि $\rho = 0$ हो अर्थात् प्रतिदर्श का चयन असहसम्बन्धित द्विचर प्रसामान्य समष्टि से किया गया हो तो इस स्थिति में बटन (14 11) निम्न हो जाता है —

$$C\ e^{-\frac{n}{2}\left(\frac{S_x^2}{\sigma_x^2}+\frac{S_y^2}{\sigma_y^2}\right)} \times (S_x S_y)^{n-2}(1-r^2)^{\frac{n-4}{2}}\, dS_x\, dS_y\, dr \quad ...(14\ 11.1)$$

(14.11 1) से स्पष्ट है कि r का बटन s_x व s_y के बटन से मुक्त है अतः

$$dP = C(1-r^2)^{\frac{n-4}{2}}\, dr \quad ....(14\ 11.2)$$

जबकि $C = \dfrac{1}{\beta\left(\frac{1}{2},\frac{n-2}{2}\right)}$ और $-1 < r < 1$

यदि समी॰ (14.11.2) में,

$$r = \frac{t}{\sqrt{t^2+n-2}}$$

का प्रतिस्थापन करदें तो dP, t–बटन, जिसकी स्व० को० (n – 2) है, के तुल्य हो जाता है अतः

$$t = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}} \qquad ....(14.11.3)$$

सम्बन्ध (14.11.3) से स्पष्ट है कि r का बटन स्टूडेन्ट t होता है। यदि $\rho \neq 0$ हो अर्थात् समग्र सहसम्बन्ध गुणांक शून्य नहीं हो तो रूपान्तरण का प्रयोग करना होता है जो कि इस प्रकार है :—

$$\xi = \frac{S_x S_y}{\sigma_x \sigma_y}, \quad z = \log \frac{\sigma_y S_x}{\sigma_x S_y}, \quad r = r$$

ξ व z का प्रवकलन करके r का बटन ज्ञात कर सकते हैं जो कि निम्न प्रकार है :—

$$dP = C' \, (1 - r^2)^{\frac{n-4}{2}} \frac{d^{\,n-2}}{d(r\rho)^{n-2}} \left\{ \frac{\cos^{-1}(-\rho r)}{\sqrt{1-\rho^2 r^2}} \right\} \qquad ....(14.12)$$

$$\text{जहाँ} \quad C' = \frac{(1-\rho^2)^{\frac{n-1}{2}}}{\pi\sqrt{n-2}} \quad \text{के है।}$$

रैखिक रूपान्तरण (संकेतीकरण) का सहसम्बन्ध गुणांक पर प्रभाव

यदि चर X और Y पर दिये गये युगल प्रेक्षणों के समुच्चय में चर X पर लिए गये प्रत्येक प्रेक्षण में से कोई स्वेच्छ प्रचर 'a' घटा दें और किसी स्वेच्छ प्रचर 'c' से भाग कर दें और चर Y पर प्रेक्षणों में से एक स्वेच्छ प्रचर 'b' घटा दें और 'd' से भाग कर दें तो सहसम्बन्ध-गुणांक पर संकेतीकरण का कोई प्रभाव नहीं पड़ता है अर्थात् संकेतित प्रेक्षणों द्वारा परिकलित r का मान वही होता है जो कि मूल प्रेक्षणों द्वारा परिकलित करने पर प्राप्त होता है। यही नियम किसी स्वेच्छ प्रचर को जोड़ने या गुणा करने के लिए भी सत्य है।

संकेतीकरण का विशेष लाभ यह है कि यदि परिकलन बिना गणना यन्त्र के करना हो तो इसकी सहायता से r का परिकलन सुगमता से किया जा सकता है।

उपर्युक्त कथन को इस प्रकार सिद्ध कर सकते हैं :—

माना कि

$$u_i = \frac{X_i - a}{c}; \quad v_i = \frac{Y_i - b}{d}$$

जहाँ $i = 1, 2, 3, \ldots, n$

$$\therefore \quad X_i = a + cu_i, \quad Y_i = b + dv_i$$

$$\text{या} \quad \overline{X} = a + c\overline{u}, \quad \overline{Y} = b + d\overline{v}$$

सूत्र (14 1 2) में X_i, Y_i और $\overline{X}$, $\overline{Y}$ के मानों को u व v के पदों में प्रतिस्थापित करने पर यदि $r_{XY} = r_{uv}$ प्राप्त हो जावे तो इसका अर्थ है कि संकेतीकरण का सहसम्बन्ध-गुणांक पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता है अर्थात् प्रतिस्थापन के बाद संकेतीकरण में लिए गए मानों का प्रभाव निष्फल हो जाता है —

प्रमाण —

$$r_{XY} = \frac{\sum_i (X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})}{\sqrt{\sum_i (X_i - \overline{X})^2 \sum_i (Y_i - \overline{Y})^2}}$$

$$= \frac{\sum_i \{(a + c u_i) - (a + c\overline{u})\}\{(b + dv_i) - (b + d\overline{v})\}}{\sqrt{\sum_i \{(a + c u_i) - (a + c\overline{u})\}^2 \sum_i \{(b + dv_i) - (b + d\overline{v})\}^2}}$$

$$= \frac{c\, d \sum_i (u_i - \overline{u})(v_i - \overline{v})}{\sqrt{c^2 \sum_i (u_i - \overline{u})^2\, d^2 \sum_i (v_i - \overline{v})^2}}$$

$$= \frac{cd}{\sqrt{c^2 d^2}} \quad \frac{\sum_i (u_i - \overline{u})(v_i - \overline{v})}{\sqrt{\sum_i (u_i - \overline{u})^2 \sum_i (v_i - \overline{v})^2}}$$

$$= r_{uv}$$

उपर्युक्त विवरण से यह निष्कर्ष निकलता है कि चरों के लिए पैमाना (Scale) बदलने का सहसम्बन्ध गुणांक r पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता है। स्वेच्छ चरों a, b, c, d के मान एक समान भी हो सकते हैं।

उदाहरण 14.3 एक विद्यालय में नवीं कक्षा के विद्यार्थियों की सेंटी० ऊँचाई और छाती की परिधि निम्न थी —

ऊँचाई (सें० मी०) (X) 125, 135, 130, 130, 141 5 132 5, 133, 134 5

छाती की परिधि (सें० मी०) (Y) 62, 65, 57, 63 5, 63, 60, 59, 58

यहाँ विद्यार्थियों की ऊँचाई तथा छाती की परिधि के सहसम्बन्ध-गुणांक संकेतीकरण की सहायता से सुगमता से परिकलित किया जा सकता है।

X के प्रत्येक मान से 130 घटाकर और Y के प्रत्येक मान से 60 घटाकर, संकेतित प्रेक्षण तथा परिकलन सारणी निम्न प्रकार है —

(X–130) =X'	(Y–60) =Y'	X²	Y²	X'Y'
–5	2	25 00	4 00	–10 00
5	5	25 00	25 00	25 00
0	–3	0 00	9 00	0 00
0	3 5	0 00	12 25	0 00
11·5	3	132 25	9 00	34 50
2 5	0	6 25	0 00	0 00
3 0	–1	9 00	1 00	–3 00
4 5	–2	20 25	4 00	–9 00
21 5	7 5	217 75	64 25	37 50

सूत्र (14 1 3) द्वारा,

$$r = \frac{37\ 5 - \frac{21\ 5 \times 7\ 5}{8}}{\sqrt{\left\{217\ 75 - \frac{(21\ 5)^2}{8}\right\}\left\{64\ 25 - \frac{(7\ 5)^2}{8}\right\}}}$$

$$= \frac{17\ 35}{\sqrt{159\ 97 \times 57\ 22}} = \frac{17\ 35}{95\ 67}$$

$$= 0\ 181$$

सहसम्बन्ध-गुणाक की सार्थकता-परीक्षा

प्रतिदर्श के n स्वतन्त्र युगल प्रेक्षणों द्वारा परिकलित सहसम्बन्ध-गुणाक का मान कुछ भी हो बहुधा द्विचर प्रसामान्य समष्टि म दोनों चरों के स्वतन्त्र होने की सम्भावना रहती है या सहसम्बन्ध-गुणाक का कोई विशेष मान होने की आशा की जाती है। इसका कारण यह है कि सम्भवतः प्रतिदर्श मे ऐसे एककों का चयन हो गया हो जिन पर प्रेक्षणों द्वारा प्राप्त सहसम्बन्ध-गुणाक का मान, समष्टि मे सहसम्बन्ध गुणाक से सर्वाधिक भिन्न हो। इसके अतिरिक्त r का बटन प्रतिदर्श परिमाण n पर भी निर्भर रहता है अत सहसम्बन्ध-गुणाक की सार्थकता परीक्षा करने मे इसका 0 से सार्थक रूप से भिन्न होने या न होने का पता चल जाता है। सहसम्बन्ध-गुणाक के शून्य होने की परिकल्पना की परीक्षा निम्न रूप में की जाती है। यहाँ

H_0 $\rho = 0$, को H_1 $\rho \neq 0$ के विरुद्ध परीक्षा की जाती है

माना कि प्रतिदर्श में n युगल प्रेक्षण

$$(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), (X_3, Y_3) \ldots\ldots (X_n, Y_n)$$

हैं और इनसे प्राप्त सहसम्बन्ध गुणांक का मान r है। H_0 की परीक्षा प्रतिदर्शज t द्वारा की जाती है। यहाँ प्रतिदर्शज

$$t_{n-2} = \frac{r}{s_r} \quad \ldots(14.13)$$

जबकि यहाँ s_r r का मानक विचलन है

जब $\rho = 0$ हो तो $s_r^2 = \frac{1-r^2}{n-2}$

$$\therefore \quad t_{n-2} = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}} \quad \ldots(14.13.1)$$

परिकलित t के मान को, α सा० स्त० तथा (n−2) स्व० को० पर सारणीबद्ध t के मान से तुलना करके परिकल्पना H_0 के विषय में निर्णय कर लिया जाता है। यदि परिकलित $t > t_{\alpha,\, n-2}$ हो तो H_0 को अस्वीकार कर दिया जाता है। जिसका अभिप्राय है कि चरों X और Y में सार्थक सम्बन्ध है। यदि $t < t_\alpha$ हो तो H_0 को स्वीकार कर लिया जाता है जिसका अभिप्राय है कि चर स्वतन्त्र हैं।

उदाहरण 14.4 r का परिकलित मान उदाहरण (14.1) के अनुसार −·62 है और प्रतिदर्श परिमाण 12 है। *परिकल्पना H_0: $\rho = 0$ की H_1: $\rho \neq 0$ के विरुद्ध परीक्षा प्रतिदर्शज (14.13.1) द्वारा इस प्रकार कर सकते हैं —*

$$t = \frac{-\cdot62 \times \sqrt{12-2}}{\sqrt{1-(-\cdot62)^2}}$$

$$= \frac{-\cdot62 \times 3.162}{\sqrt{1-0.3844}}$$

$$= \frac{-1.960}{\cdot784}$$

$$= -2.5$$

सारणी (परि० प–3) द्वारा 5% सा० स्त० और 10 स्व० को० के लिए t का मान 2.228 है। यह मान t के परिकलित मान से कम है, अतः H_0 को अस्वीकार कर दिया जाता है। इससे यह निष्कर्ष निकलता है कि कारपतवारों की संख्या और उपज में सार्थक ऋणात्मक सहसम्बन्ध है।

(ख) यदि किसी विशिष्ट जानकारी के अनुसार किन्हीं दो चरों में एक निश्चित सहसम्बन्ध गुणांक होने की आशा हो तो परिकल्पना H_0: $\rho = \rho_0$ की H_1: $\rho \neq \rho_0$

के विरुद्ध परीक्षा की जाती है। यहाँ ρ_0 वह अचर मान है जिसके होने की आशा की गई है। इस परिकल्पना की परीक्षा (14.13 1) मे दिये गये प्रतिदर्शज से नही की जा सकती है क्योंकि $(r - \rho_0)/s_r$ का बटन स्टूडेन्ट–t नही होता है जब तक कि ρ_0 का मान 0 न हो। अत H_0 की परीक्षा करने से पूर्व फिशर–Z रूपान्तरण (Fisher's–Z transformation) का प्रयोग करना होता है जो कि इस प्रकार है —

$$Z_r = \frac{1}{2} \log_e \frac{(1+r)}{(1-r)} = \text{Tan h}^{-1} r \qquad ....(14\ 14)$$

$$= \tfrac{1}{2} \{ \log_e (1+r) - \log_e (1-r) \}$$

$$= \tfrac{1}{2} \log_e 10 \{ \log_{10} (1+r) - \log_{10} (1-r) \}$$

$$= 1 \cdot 1513 \{ \log_{10} (1+r) - \log_{10} (1-r) \}$$

इसी प्रकार,

$$Z_{\rho_0} = \frac{1}{2} \log_e \frac{(1+\rho_0)}{1-\rho_0} = \text{Tan h}^{-1} \rho_0 \qquad ....(14\ 14\ 1)$$

$$= 1\ 1513 \{ \log_{10} (1+\rho_0) - \log_{10} (1-\rho_0) \}$$

Z से r मे रूपान्तरण के लिए दी गई सारणी (परि० प–16) की सहायता से Z_r व Z_{ρ_0} के मानो को ज्ञात कर सकते हैं। फिशर ने बताया कि Z_r लगभग एक प्रसामान्य चर है जिसका माध्य Z_{ρ_0} और प्रसरण $\frac{1}{n-3}$ के सन्निकट होता है। उन्होंने इस ओर भी ध्यान आकर्षित किया कि Z_r का माध्य, n लघु होने की स्थिति मे, कुछ अभिनत है। इसके लिए सशोधन पद $\frac{\rho_0}{2(n-1)}$ का प्रयोग करने का सुझाव दिया। इसका अर्थ है कि n लघु होने की स्थिति मे $(Z_r - Z_{\rho_0})$ का माध्य $\frac{\rho_0}{2\ (n-1)}$ होता है।

यदि n बृहत् हो तो प्रसामान्य विचर,

$$Z = \frac{Z_r - Z_{\rho_0}}{1/\sqrt{n-3}} \qquad ....(14\ 15)$$

$$= (Z_r - Z_{\rho_0}) \sqrt{n-3} \qquad ....(14.15\ 1)$$

यदि n बृहत् न हो तो,

$$Z_{\rho_0} = \frac{1}{2} \log_e \left(\frac{1+\rho_0}{1-\rho_0}\right) + \frac{\rho_0}{2\ (n-1)} \qquad ....(14.16)$$

के है। परिकल्पना H_0 की परीक्षा के लिए n के मान के अनुसार Z के मान का परिकलन, सूत्र (14 15) या (14 16) द्वारा कर लिया जाता है। इसके पश्चात् प्रसामान्य वक्र

के क्षेत्र वाली सारणी द्वारा अस्वीकृति क्षेत्र की प्रायिकता ज्ञात कर ली जाती है या α सा० स्त० के लिए उस सारणी द्वारा Z का मान ज्ञात कर लिया जाता है। यदि प्राप्त अस्वीकृति क्षेत्र पूर्व निर्धारित सा० स्त० से कम हो तो H_0 को अस्वीकार कर दिया जाता है अर्थात् H_1 स्वीकृत है।

यदि परिकलित Z के मान की सारणीबद्ध Z के मान Z_α से तुलना की गई हो तो $Z > Z_\alpha$ होने की स्थिति में परिकल्पना H_0 का अस्वीकार कर दिया जाता है और $Z < Z_\alpha$ होने पर H_0 का स्वीकार कर लिया जाता है।

समग्र सहसम्बन्ध-गुणांक ρ की विश्वास्यता सीमाएं

ρ की विश्वास्यता सीमाएं सूत्र (9 9) के समरूप निम्न सूत्र द्वारा ज्ञात कर सकते हैं α सा० स्त० पर Z_ρ की उपरि व निम्न सीमाओं के लिए सूत्र निम्न हैं —

$$\left.\begin{matrix} Z_u \\ Z_l \end{matrix}\right\} = Z_r \pm Z_{(1-\alpha/2)} \quad \sigma(Z_r) \qquad \text{....(14 17)}$$

$$= Z_r \pm Z_{(1-\alpha/2)} \frac{1}{\sqrt{n-3}} \qquad \text{....(14 17 1)}$$

Z की उपरि सीमा तथा निम्न सीमा को, क्रमशः बीच का $(+)$ व $(-)$ चिह्न लेकर, ज्ञात कर लिया जाता है। फिर सारणी द्वारा Z-मानों के तदनुसार r के मान ज्ञात कर लिए जाते हैं जो कि ρ की उपरि तथा निम्न सीमाओं को निरूपित करते हैं।

उदाहरण 14 5 ज्यामितीय निरूपण भाग (3) में $r = 452$ है और युगल प्रेक्षणों की संख्या $n = 12$ है।

माना कि चर X और Y में किसी पूर्व जानकारी के आधार पर सहसम्बन्ध-गुणांक 0 5 होने की आशा है। तो यह जानने के लिए, कि इन युगल प्रेक्षणों में सहसम्बन्ध-गुणांक पिछले विचार में सहमति प्रकट करता है परिकल्पना $H_0 : \rho = 0 5$ की $H_1 \quad \rho \neq 0 5$ के विरुद्ध परीक्षा करनी है।

इस परिकल्पना की परीक्षा करने के लिए फिशर के Z-रूपान्तरण का प्रयोग करना आवश्यक है। अतः सारणी (परि० थ-16) की सहायता से

$r = 452$ के लिए

$Z_r = 487$

$\rho_0 = 0 5$ के लिए,

सूत्र (14 8) द्वारा,

$$Z_{\rho_0} = 549 + \frac{+5}{2 \times 11} = 572$$

अतः सूत्र (14·15.1) द्वारा प्रतिदर्शज,

$$Z=(\cdot 452-\cdot 572)\sqrt{(12-3)}$$
$$=-0\cdot 120\times 3=-0\cdot 36$$

$\alpha=\cdot 05$ सा० स्त० के लिए Z का मान 1·96 है जो कि Z के परिकलित मान ·36 से अधिक है। अतः परिकल्पना H_0 को स्वीकार कर लिया जाता है।

इसी निर्णय को संशय अन्तराल का क्षेत्र ज्ञात करके भी लिया जा सकता है।

0 से ·36 का क्षेत्र ·1406 है। Z पर कोटि से बाहर का क्षेत्र$=(\cdot 5-1406)$ $=0\cdot 3594$ है जो कि ·025 से अधिक है अतः H_0 को स्वीकार कर लिया जाता है।

दो द्विचर प्रसामान्य समग्रों के सहसम्बन्ध-गुणांकों की समानता की परीक्षा

यहाँ परिकल्पना $H_0 \quad \rho_1=\rho_2$ को $H_1 \quad \rho_1\neq\rho_2$ के विरुद्ध परीक्षा करनी है।

माना कि दो प्रतिदर्शों का चयन दोनों समग्रों से स्वतन्त्र रूप से किया गया है और इनके परिमाण क्रमशः n_1 और n_2 हैं। इन प्रतिदर्शों द्वारा परिकलित सहसम्बन्ध-गुणांक क्रमशः r_1 और r_2 हैं। इन आगणित सहसम्बन्ध गुणांकों के आधार पर H_0 की परीक्षा करनी है।

इस परिकल्पना की परीक्षा के लिए भी फिशर के Z-रूपान्तरण का प्रयोग करना होता है।

माना कि

$$Z_1=\frac{1}{2}\log_e\left(\frac{1+r_1}{1-r_1}\right)=\text{Tan h}^{-1}\,r_1 \qquad \ldots(14.18)$$

$$Z_2=\frac{1}{2}\log_e\left(\frac{1+r_2}{1-r_2}\right)=\text{Tan h}^{-1}\,r_2 \qquad \ldots(14.19)$$

(Z_1-Z_2) का बंटन प्रसामान्य होता है जिसका माध्य

$$\left\{\frac{\rho}{2(n_1-1)}-\frac{\rho}{2(n_2-1)}\right\}$$

है (जहाँ ρ सामान्य सहसम्बन्ध गुणांक है) और प्रसरण,

$$\left\{\frac{1}{(n_1-3)}+\frac{1}{(n_2-3)}\right\}$$

है।

यदि प्रतिदर्श परिमाण लघु न हो और n_1 व n_2 के मान में अन्तर अधिक न हो तो,

$$Z=\frac{Z_1-Z_2}{\sqrt{\frac{1}{n_1-3}+\frac{1}{n_2-3}}} \qquad \ldots(14.20)$$

एक मानक प्रसामान्य विचर N (0,1) होता है।

पिछले खण्ड में दिये विवरण की भाँति प्रसामान्य वक्र के क्षेत्र वाली सारणी (परि० प-2) द्वारा प्रायिकता ज्ञात करके या α सा०स्त० के लिए सारणी द्वारा $Z_{(1-\alpha/2)}$ का मान ज्ञात करके H_0 के विषय में निर्णय कर लिया जाता है।

उदाहरण 14.6 एक स्कूल में सोलह वर्ष के 32 बच्चों की ऊँचाई सेंटीमीटर में और भार किलोग्राम में नापे गये। इन भारों तथा ऊँचाई में परिकलित सहसम्बन्ध गुणांक $r_1 = .776$ है।

इसी प्रकार सत्रह वर्ष के 30 बच्चों के भार तथा ऊँचाई में सहसम्बन्ध-गुणांक $r_2 = .534$ है।

इस परिकल्पना की परीक्षा करनी है कि सोलह वर्ष की आयु के व सत्रह वर्ष की आयु के बच्चों के भार तथा ऊँचाई में सहसम्बन्ध वही रहता है अर्थात् $H_0 : \rho_1 = \rho_2$ की $H_1 : \rho_1 \neq \rho_2$ के विरुद्ध परीक्षा करनी है।

$r_1 = .776$ व $r_2 = .534$ के लिए सारणी (परि० प-16) द्वारा प्राप्त Z के मान क्रमशः $Z_1 = 1.035$ और $Z_2 = .596$ हैं।

सूत्र (14.20) द्वारा,

$$Z = \frac{1.035 - .596}{\sqrt{\frac{1}{29} + \frac{1}{27}}}$$

$$= (.439)/\sqrt{.0715}$$

$$= \frac{.439}{.2265}$$

$$= 1.938$$

$\alpha = .05$ के लिए सारणीबद्ध $Z = 1.96$ है जो कि 1.938 से अधिक है। अतः H_0 को स्वीकार कर लिया जाता है। इससे निष्कर्ष निकलता है कि सोलह और सत्रह वर्ष की आयु के बच्चों की ऊँचाई व भार में समान सहसम्बन्ध है।

K समष्टि सहसम्बन्ध गुणांकों की समांगीयता की परीक्षा जब कि $K > 2$

यहाँ परिकल्पना $H_0 : \rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \ldots = \rho_k$ की, H_1 : कम से कम कोई दो सहसम्बन्ध गुणांक समान नहीं हैं, के विरुद्ध परीक्षा करनी है।

माना कि K समष्टियों से K स्वतन्त्र प्रतिदर्शों का चयन किया गया है जिनके परिमाण क्रमशः $n_1, n_2, n_3, \ldots n_k$ हैं। किन्हीं दो चरों X और Y में इन प्रतिदर्शों द्वारा परिकलित सहसम्बन्ध गुणांक क्रमशः $r_1, r_2, r_3, \ldots r_k$ हैं। यदि प्रतिदर्श लघु हैं और इनकी उपेक्षा की जा सकती है तो सहसम्बन्ध गुणांकों की समांगीयता की परीक्षा, Z मानों की समानता के तुल्य होती है। इस परिकल्पना की परीक्षा में भी फिशर Z-रूपान्तरण का प्रयोग करना

होता है और यहां H_0 की χ^2–परीक्षा की जाती है। प्रतिदर्शज χ^2 का परिकलन निम्न सारणी बनाकर सुगमता से कर सकते है :—

प्रतिदर्श संख्या	प्रतिदर्श परिमाण	सहसम्बन्ध गुणांक	$\tanh^{-1} r = Z$	प्रसरण के व्युत्क्रम $(n-3)$	गुणनफल $(n-3) Z$	संख्या $(n-3) Z^2$
1	n_1	r_1	Z_1	(n_1-3)	$(n_1-3) Z_1$	$(n_1-3) Z_1^2$
2	n_2	r_2	Z_2	(n_2-3)	$(n_2-3) Z_2$	$(n_2-3) Z_2^2$
3	n_3	r_3	Z_3	(n_3-3)	$(n_3-3) Z_3$	$(n_3-3) Z_3^2$
⋮	⋮	⋮	⋮		⋮	⋮
k	n_k	r_k	Z_k	(n_k-3)	$(n_k-3) Z_k$	$(n_k-3) Z_k^2$
योग				$\sum_i (n_i-3)$	$\sum_i (n_i-3) Z_i$	$\sum_i (n_i-3) Z_i^2$

उपर्युक्त सारणी मे परिकलित संख्याओं का प्रयोग करके प्रतिदर्शज χ^2 का मान निम्न सूत्र की सहायता से ज्ञात कर सकते हैं —

$$\chi^2_{k-1} = \sum_{i=1}^{k} (n_i - 3) Z_i^2 - \frac{\left\{\sum_{i=1}^{k} (n_i - 3) Z_i\right\}^2}{\sum_{i=1}^{k} (n_i - 3)} \qquad \text{....(14 21)}$$

सारणी द्वारा α सा० स्त० और $(k-1)$ स्व० को० के लिए सारणीबद्ध χ^2 का मान ज्ञात कर लिया जाता है और यदि परिकलित $\chi^2 > \chi^2_{k-1}$ हो तो H_0 को अस्वीकार कर दिया जाता है अर्थात् सहसम्बन्ध गुणांको मे सजातीयता नही है या H_1 स्वीकृत है।

इसी प्रकार यदि $\chi^2 < \chi^2_\alpha$ हो तो H_0 को स्वीकार कर लिया जाता है अर्थात् सहसम्बन्ध गुणांक $\rho_1, \rho_2, \rho_3, ..., \rho_k$ सजातीय हैं अर्थात् H_1 अस्वीकृत है।

टिप्पणी : यदि अभिनति के लिए संशोधन करना हो तो ρ का सर्वोत्तम आगणक $\hat{\rho}$ ज्ञात कर लिया जाता है। इस स्थिति मे प्रतिदर्शज,

$$\chi^2_{k-1} = \sum_{i=1}^{k} (n_i - 3) \left\{ Z_i - \tfrac{1}{2} \log_e \left(\frac{1+\hat{\rho}}{1-\hat{\rho}}\right) - \frac{\hat{\rho}}{2 (n_i - 1)} \right\}^2 \qquad \text{....(14 22)}$$

होता है। यहाँ भी परिकल्पना H_0 के विषय मे निर्णय ऊपर की भाँति ही कर लिया जाता है।

उदाहरण 14.7 एक क्षेत्रीय सारणिक सर्वेक्षण के अन्तर्गत विभिन्न आयु के बच्चों के भार (किलोग्राम) और ऊँचाई (सेन्टीमीटर) में सहसम्बन्ध गुणांक परिकलित किये गये। बच्चों की आयु, प्रतिदर्श परिमाण और सहसम्बन्ध गुणांक निम्न प्रकार थे —

चौदह वर्ष : $n_1 = 30,\quad r_1 = 878$

सोलह वर्ष $n_2 = 32,\quad r_2 = 776$

सत्रह वर्ष $n_3 = 30,\quad r_3 = 534$

अठारह वर्ष $n_4 = 14,\quad r_4 = 763$

तो परिकल्पना H_0 $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \rho_4$ की H_1 कम से कम कोई दो ρ समान नहीं हैं के विरुद्ध परीक्षा निम्न सारणी बनाकर प्रतिदर्शज χ^2 द्वारा इस प्रकार कर सकते हैं —

n	r	z	(n − 3)	(n − 3) Z	(n − 3) Z²
30	876	1 37	27	36 99	50 68
32	776	1 03	29	29 87	30 78
30	534	0 60	27	16 20	9 72
14	763	1 00	11	11 00	11 00
			94	94 06	102 18

माना कि अभिनति उपेक्षणीय है। अतः प्रतिदर्शज,

$$\chi_3^2 = 102\ 18 - \frac{(94\ 06)^2}{94}$$

$$= 102\ 18 - 94\ 12$$

$$= 8\ 06$$

सारणी (परि० ग-4) द्वारा $\chi^2_{05,\ 3} = 7\ 815$

परिकलित $\chi^2 > \chi^2_{05\ 3}$ अतः H_0 को अस्वीकार कर दिया। जिसका अभिप्राय है कि चारों समय सहसम्बन्ध गुणांक समान नहीं हैं। इस स्थिति में H_1 स्वीकृत है।

कोटि सहसम्बन्ध

माना कि प्रतिदर्श, n यूनिटों का समूह है जिन्हें 1 से n तक अंकित कर दिया जाता है और इस समूह के सदस्यों को किन्हीं दो लक्षणों के अनुसार कोटिकृत कर दिया गया है। इन दोनों लक्षणों में सम्बन्ध की मात्रा जानने के लिए कोटि सहसम्बन्ध-गुणांक ज्ञात करना होता है।

माना कि समूह के n अंशों की कोटियाँ लक्षण A के अनुसार क्रमश: $X_1, X_2, X_3 \ldots X_n$ हैं और लक्षण B के अनुसार क्रमश: $Y_1, Y_2, Y_3 \ldots Y_n$ है। यह कोटियाँ केवल पूर्ण-संख्या हो सकती हैं जो कि 1 से n तक हो सकती हैं। इसके साथ यह भी कल्पना करली जाती है कि किन्ही दो अंशों की कोटि समान नहीं है। इस स्थिति में कोटि सह-सम्बन्ध गुणांक r_s को निम्न सूत्र से ज्ञात कर सकते हैं। इसका आविष्कार स्पियरमैन (Spearman) ने किया था अतः इसे स्पियरमैन का कोटि सहसम्बन्ध-गुणांक भी कहते हैं। r का अनुलग्न s, स्पियरमैन के नाम के प्रथम अक्षर का प्रतीक है।

माना कि iवें एकक की कोटियों का अन्तर d_i है अर्थात्

$$X_i - Y_i = d_i$$

कोटि सहसम्बन्ध-गुणांक

$$r_s = 1 - \frac{6 \sum_{i=1}^{n} d_i^2}{n(n^2-1)} \qquad \ldots(14\,23)$$

इस सूत्र को व्यंजक (14 1 4) की सहायता से सुगमता से निम्न प्रकार व्युत्पन्न किया जा सकता है।

व्युत्पत्ति :—

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n} Y_i = (1+2+3+\ldots+n)$$

$$= \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\overline{X} = \overline{Y} \quad (\because \sum_i X_i = \sum_i Y_i)$$

माना कि $X_i - \overline{X} = x_i$, $Y_i - \overline{Y} = y_i$

और $$\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \overline{Y})^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i^2$$

यह ज्ञात है कि

$$\sum_i X_i^2 = \sum_i Y_i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

d_i को निम्न रूप में लिखा जा सकता है।

$$d_i = \{(X_i - \overline{X}) - (Y_i - \overline{Y})\}$$

$$\therefore \quad \sum_i d_i^2 = \sum_i \{(X_i - \overline{X}) - (Y_i - \overline{Y})\}^2$$

$$= \sum_i (x_i - y_i)^2$$

$$= \sum_i x_i^2 + \sum_i y_i^2 - 2 \sum_i x_i y_i$$

$$\sum_i x_i y_i = \tfrac{1}{2} \left(\sum_i x_i^2 + \sum_i y_i^2 - \sum_i d_i^2 \right)$$

$$= \tfrac{1}{2} \left(\frac{n^3 - n}{6} - \sum_i d_i^2 \right)$$

और

$$\sqrt{\sum x_i^2 \times \sum y_i^2} = \tfrac{1}{12} (n^3 - n)$$

$$\therefore \quad r_s = \frac{\tfrac{1}{2}\left(\frac{n^3 - n}{6} - \sum_i d_i^2 \right)}{\tfrac{1}{12} (n^3 - n)}$$

$$= 1 - \frac{6 \sum_i d_i^2}{n^3 - n}$$

r_s का परिसर -1 से $+1$ तक है। यदि $r_s = 1$ हो तो इसका अभिप्राय: है कि दोनों लक्षणों की कोटियों में पूर्ण सहमति है या कोई अन्तर नहीं है। r_s का मान -1 कोटियों में पूर्ण असहमति बताता है।

r_s की सार्थकता-परीक्षा

स्पियरमैन सहसम्बन्ध गुणांक r_s की सार्थकता-परीक्षा इस प्रकार कर सकते हैं।

यदि $n > 20$ हो तो r_s का बंटन प्रसामान्य होता है। अतः r_s के सार्थक होने की Z–परीक्षा की जा सकती है।

यदि n का मान 10 से 20 हो तो $r_s \sqrt{\frac{n-2}{1-r_s^2}}$ का बंटन लगभग स्टूडेंट –t होता है जिसकी स्व० को० $(n-2)$ है। यह परीक्षा उसी प्रकार कर सकते हैं जैसा कि H_0 . $\rho = 0$ की परीक्षा में किया गया है।

यदि $n < 10$ हो तो इस स्थिति में r_s के बंटन का व्युत्पन्न करना होता है। इस स्थिति में परीक्षा[1] का वर्णन इस पुस्तक के स्तर के बाहर है।

उदाहरण 14.8 : एक सुन्दरता प्रतियोगिता में भाग लेने वाली 10 सुन्दरियों का दो निर्णायकों द्वारा निम्न क्रम में कोटियाँ प्रदान की गई।

प्रथम निर्णायक :	1	6	5	10	3	4	2	9	7	8
द्वितीय निर्णायक	6	4	9	8	2	3	1	10	5	7

1. इस परीक्षा के हेतु पुस्तक "Rank Correlation methods" by M. G. Kendall को पढ़िये।

यह जानने के लिए कि दोनों निर्णायकों में सुन्दरता के प्रति कितनी एक सी अभिरुचि है, कोटि सहसम्बन्ध द्वारा निम्न प्रकार ज्ञात कर सकते हैं :—

प्रथम निर्णायक द्वारा कोटि (X)	द्वितीय निर्णायक द्वारा कोटि (Y)	कोटि अन्तर $(X-Y)=d$	d^2
1	6	-5	25
6	4	$+2$	4
5	9	-4	16
10	8	$+2$	4
3	2	$+1$	1
4	3	$+1$	1
2	1	$+1$	1
9	10	-1	1
7	5	$+2$	4
8	7	$+1$	1
योग		0	58

उपर्युक्त न्यास के लिए,

$$n=10,\ \sum_i d_i=0,\ \sum_i d_i^2=58$$

अतः सूत्र (14.23) द्वारा कोटि सहसम्बन्ध-गुणांक,

$$r_S=1-\frac{6\times 58}{10(10^2-1)}$$

$$=1-\frac{348}{10\times 99}$$

$$=1-0{\cdot}35$$

$$=0{\cdot}65$$

r_S की सार्थकता-परीक्षा के लिए प्रतिदर्शज,

$$t_{n-2}=r_s\sqrt{\frac{n-2}{1-r_s^2}}$$

$$=\frac{{\cdot}65\times\sqrt{8}}{\sqrt{1-({\cdot}65)^2}}$$

$$= \frac{65 \times 2.83}{76}$$

$$= 2.42$$

α = .05 सा० स्त० व 8 स्व०मा० के लिए t का सारणीबद्ध मान (परि० प–3) द्वारा प्राप्त 2.306 है जो कि t के परिकलित मान से कम है। अत: r_S की सार्थकता सिद्ध होती है। अब यह कह सकते हैं कि निर्णायकों द्वारा दी गई कोटियों में उच्च कम का सहसम्बन्ध है। इसका अभिप्राय है कि निर्णायकों में सुन्दरता के प्रति पर्याप्त एक सी अभिरुचि है।

सामंजस्य गुणांक

कभी-कभी ऐसी स्थिति भी उत्पन्न होती है कि n एककों की कोटि p निर्णायकों द्वारा स्वतन्त्र रूप से निश्चित की जाती है इस स्थिति में यह जानना आवश्यक हो जाता है कि एक ही एकक की कोटियों में सामंजस्य है या नहीं अर्थात् निर्णायकों में सामंजस्य है या नहीं। इस जानकारी को प्राप्त करने के लिए केन्डाल और स्मिथ (Kendall and Smith) ने एक माप 'W' का आविष्कार किया जिसे सामंजस्य-गुणांक कहते हैं। माना कि W का आगणक w है। w का परिकलन निम्न सूत्र की सहायता से किया जाता है :—

$$w = \frac{12S}{p^2 \ (n^3 - n)} \qquad ....(14.24)$$

उपर्युक्त सूत्र में S प्रत्येक निर्णायक द्वारा निर्धारित कोटियों के योगों का $p(n+1)/2$ से विचलन का वर्ग-योग है। यहाँ $p \ (n+1)/2$ कोटियों के योग का माध्य है।

W का मान 0 से 1 तक विचरण कर सकता है। यदि W=0 हो, तो इससे यह निष्कर्ष निकलता है कि निर्णायकों में लक्षणों के प्रति एक-सी अभिरुचि नहीं है। यदि W=1 हो तो इसका अर्थ है कि उनमें पूर्णतया एक-सी अभिरुचि है।

परिकल्पना H_0 : W=0 की H_1 : W≠0 के विरुद्ध परीक्षा, χ^2 द्वारा की जाती है। यहाँ n का मान 7 से अधिक होना आवश्यक है अर्थात् $n > 7$ होना चाहिये।

यहाँ प्रतिदर्शज,

$$\chi^2_{n-1} = p \ (n-1) \ w \qquad ....(14.25)$$

$$= \frac{12S}{pn \ (n+1)} \qquad ....(14.25.1)$$

के है। यह बंटन लगभग χ^2 होता है और χ^2 को स्व० को० $(n-1)$ है। α सा० स्त० पर, नियमानुसार H_0 के विषय में निर्णय कर लिया जाता है।

यदि W सार्थक हो तो n वस्तुओं की वास्तविक कोटि का आगणन करना चाहिये अन्यथा नहीं करना चाहिये। क्योंकि W सार्थक न होने की स्थिति में यह कहना कठिन है कि वास्तविक कोटियों का अस्तित्व है या नहीं।

यदि p=2 हो तो कोटि सहसम्बन्ध-गुणांक का प्रयोग करना ही उचित है।

उदाहरण 14.9 : एक पद के लिए, तीन विशेषज्ञों ने नौ अभ्यर्थियों का साक्षात्कार किया और निम्न सारणी में दिये हुए क्रम से अभ्यर्थियों को कोटिकृत किया :—

व्यक्ति संख्या	विशेषज्ञ द्वारा कोटियाँ			
	क	ख	ग	योग
1	2	1	2	5
2	4	3	4	11
3	8	6	5	19
4	9	9	7	25
5	3	2	1	6
6	5	8	6	19
7	7	5	9	21
8	1	4	3	8
9	6	7	8	21

अब यह ज्ञात करने के लिए कि विशेषज्ञों में साक्षात्कार के पश्चात् अभ्यर्थियों की कोटियों के प्रति सहमति है या नहीं, सामंजस्य गुणांक का प्रयोग करना उचित है। साथ ही इस गुणांक की सार्थकता-परीक्षा भी की गई है।

यहाँ $p=3$, $n=9$ अतः कोटियों के योग का माध्य,

$$\frac{p\times(n+1)}{1}=\frac{3\times 10}{2}=15$$

और अभ्यर्थियों की कोटियों के योग का माध्य से विचलन के वर्गों का योग,

$$S=(5-15)^2+(11-15)^2+(19-15)^2+(25-15)^2+(6-15)^2+(19-15)^2 +(21-15)^2+(8-15)^2+(21-15)^2$$

$$=100+16+16+100+81+16+36+49+36$$

$$=450$$

सूत्र (14.24) द्वारा,

$$w=\frac{12\times 450}{9\times(729-9)}=\frac{5}{6}=\cdot 833$$

$H_0 : W=0$ को $H_1 : W\neq 0$ के विरुद्ध सार्थकता परीक्षा सूत्र (14.25) के द्वारा कर सकते हैं।

$$\chi^2=3(9-1)\times\frac{5}{6}=20.00$$

माना कि पूर्व निर्धारित सा० स्त० $\alpha = .05$ है। (परि० ग-4) द्वारा $\alpha = .05$ व 8 स्व० को० के लिए सारणीबद्ध $\chi^2 = 15.507$ है जो कि χ^2 के परिकलित मान से कम है। अतः w सार्थक है। इसका अभिप्राय है कि विशेषज्ञों द्वारा दी गई कोटियों में सामंजस्य है।

सहसम्बन्ध अनुपात

माना कि दो सतत बंटित चर X और Y हैं और इनमें फलनीय सम्बन्ध $Y = \phi(X)$ है। यदि चर Y का X पर समाश्रयण रैखिक हो तो सहसम्बन्ध गुणांक ρ ज्ञात करना उचित है। किन्तु चरों X व Y में समाश्रयण रैखिक न होने की स्थिति में सहसम्बन्ध अनुपात η^2 ज्ञात करना उचित है।

चरों X व Y में सहसम्बन्ध अनुपात η^2 निम्न प्रकार ज्ञात कर सकते हैं। सहसम्बन्ध अनुपात ज्ञात करने के लिए यह आवश्यक नहीं है कि X के एक मान के संगत Y का एक ही मान हो। अतः यहाँ η^2 के आकलक E^2 के लिए सूत्र, X के एक मान के संगत चर Y के f_i मान लेकर दिया गया है। माना कि X_i के संगत मान Y_{ij} हैं जहाँ $i = 1, 2, 3, \ldots, l$ और $j = 1, 2, 3, \ldots, f_i$

सहसम्बन्ध अनुपात

$$E^2 = \frac{\text{समूहों में वर्गों का योगफल}}{\text{संशोधित वर्गों का योगफल}} \qquad \ldots(14.26)$$

$$\text{समूहों में वर्गों का योगफल} = \sum_{i=1}^{l} f_i \, (\bar{Y}_i - \bar{Y})^2$$

$$\text{जब कि} \quad \bar{Y}_i = \sum_{j=1}^{f_i} Y_{ij}/f_i \text{ और } \bar{Y} = \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{f_i} Y_{ij} \Bigg/ \sum_{i=1}^{l} f_i$$

$$\sum_{j=1}^{f_i} Y_{ij} = f_i \, \bar{Y}_i = G_i \quad \text{(मान लिया)}$$

$$\sum_{i=1}^{l} f_i \, (\bar{Y}_i - \bar{Y})^2 = \sum_{i=1}^{l} \frac{\left(\sum_{j=1}^{f_i} Y_{ij}\right)^2}{f_i} - \frac{\left(\sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{f_i} Y_{ij}\right)^2}{\sum_{i=1}^{l} f_i}$$

$$\text{और} \quad \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{f_i} Y_{ij} = G \quad \text{(मान लिया)}$$

$$\therefore \quad \sum_{i=1}^{l} f_i(\bar{Y}_i - \bar{Y})^2 = \sum_{i=1}^{l} \frac{G_i^2}{f_i} - \frac{G^2}{n}$$

$$\text{जहाँ} \quad \sum_{i=1}^{l} f_i = n$$

$$\text{संशोधित वर्गों का योग} = \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{f_i} (Y_{ij} - \bar{Y})^2$$

$$= \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{f_i} Y_{ij}^2 - \frac{G^2}{n}$$

$$\therefore \quad E^2 = \frac{\sum_{i=1}^{l} f_i(\bar{Y}_i - \bar{Y})^2}{\sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{f_i} (Y_{ij} - \bar{Y})^2}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{l} \frac{G_i^2}{f_i} - \frac{G^2}{n}}{\sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{f_i} Y_{ij}^2 - \frac{G^2}{n}} \qquad \ldots(14\ 26\ 1)$$

E^2 के लिए व्यञ्जक से स्पष्ट है कि इसका मान समूहो के परिमाण पर अत्यधिक निर्भर है। E^2 का परिसर 0 से 1 है। यदि प्रत्येक समूह मे एक प्रेक्षण हो तो $E^2 = 1$ और सब प्रेक्षण एक ही समूह मे हो तो $E^2 = 0$ अत प्रेक्षणो के समूहीकरण मे विशेष सावधानी बर्तनी चाहिए।

अन्तरवर्ग सहसम्बन्ध

प्राय वर्ग या समूह मे विद्यमान प्रेक्षणो मे साहचर्य की मात्रा ज्ञात करने की आवश्यकता होती है। इस साहचर्य मात्रा को अन्तरवर्ग सहसम्बन्ध गुणाक कहते हैं। कुछ लेखको ने इसे समरूपिक सहसम्बन्ध गुणाक (homotypic correlation coefficient) के नाम से भी लिखा है। इस गुणाक की आवश्यकता जीव विज्ञान मे कभी-कभी पाई गई है। जैसे भाईयो की ऊँचाई मे सहसम्बन्ध या भारो में सहसम्बन्ध ज्ञात करना हो तो एक को चर X और अन्य को आयु के अनुसार या सबसे बडे और सबसे छोटे के अनुसार Y मानने से सहसम्बन्ध मे मिथ्यापन (Spurious element) आ जाता है क्योंकि यहाँ हमारा उद्देश्य एक ही परिवार के उन सब सदस्यो मे सहसम्बन्ध ज्ञात करना है जिनका एक सा स्थान हो। यह अनुभव किया गया है कि अधिकाश रूप से एक ही वर्ग के सदस्य सम्बन्धी

प्रेक्षणों में धनात्मक सहसम्बन्ध होता है कुछ विशेष स्थिति में यह सम्बन्ध ऋणात्मक भी हो सकता है। किन्तु उन स्थितियों की यहाँ उपेक्षा की गई है।

माना कि X_{ij}, i वें वर्ग में j वा प्रेक्षण है व वर्गों की संख्या l है। i वें वर्ग में माना कि प्रेक्षणों की संख्या n_i है। जबकि $i=1, 2, 3, \ldots, l$ और $j=1, 2, 3, \ldots, n_i$

माना कि प्रत्येक X_{ij} का माध्य μ और प्रसरण σ^2 है। एक ही वर्ग के दो सदस्यों में सहसम्बन्ध गुणांक ρ_1 है और इसका आकलक r_1 है। तो

$$r_1 = \frac{\sum_{i=1}^{l} n_i^2(\overline{X}_i-\overline{X})^2 - \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij}-\overline{X})^2}{\sum_{i=1}^{l}(n_{i}-1)\sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij}-\overline{X})^2} \quad \ldots(14.27)$$

यदि $n_1=n_2=n_3=\ldots=n_l=n$ हो, तो

$$r_1 = \frac{n^2\sum_{i=1}^{l}(\overline{X}_i-\overline{X})^2 - \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{n}(X_{ij}-\overline{X})^2}{(n-1)\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{n}(X_{ij}-\overline{X})^2} \quad \ldots(14.27.1)$$

$$= \frac{S_b^2 - S_w^2}{S_b^2+(n-1)S_w^2} \quad \ldots(14.27.2)$$

उपर्युक्त व्यंजक में S_b^2 विभिन्न समूहों में वर्गों का योगफल है और S_w^2 समूहों के अन्दर वर्गों का योगफल है। S_b^2 का प्रत्याशित मान $\{1+(n-1)\rho_1\}\sigma^2$ और S_w^2 का प्रत्याशित मान $(1-\rho_1)\sigma^2$ है।

यदि ρ_1 का मान ऋणात्मक हो तो भी $-\frac{1}{(n-1)}$ से कम नहीं हो सकता है

क्योंकि $\rho_1 < -\frac{1}{n-1}$ हो तो S_b^2 का प्रत्याशित मान ऋणात्मक हो जायेगा जो कि

असम्भव है। यदि $\rho_1 = -\frac{1}{n-1}$ हो तो $S_b^2=0$ हो जाता है जिसका अर्थ है

कि समूह माध्यों में कोई अन्तर नहीं है।

दो सहसम्बन्धित चरों के प्रसरणों की तुलना

माना कि दो चरों X_1 व X_2 के प्रसरण क्रमशः σ_1^2 व σ_2^2 हैं और इनमें सहसम्बन्ध गुणांक ρ है तथा इनके आकलक क्रमशः s_1^2, s_2^2 व r हैं।

माना कि $X_1 - X_2 = D$ और $X_1 + X_2 = S$ है।

चरों D व S में सहप्रसरण,

$$\sigma_{DS} = \text{Cov}\{(X_1 - X_2)(X_1 + X_2)\}$$
$$= E\{(X_1^2 - X_2^2) - (\overline{X}_1^2 - \overline{X}_2^2)\}$$
$$= E(X_1^2 - \overline{X}_1^2) - E(X_2^2 - \overline{X}_2^2)$$
$$= \sigma_1^2 - \sigma_2^2 \qquad \text{....(14 28)}$$

यदि योगों व अन्तरों को प्रतिदर्श प्रेक्षणों के लिए ज्ञात किया गया हो तो σ_{DS} का आकलक,

$$s_{DS} = s_1^2 - s_2^2 \qquad \text{....(14.28 1)}$$

है। यह सुगमता से सिद्ध किया जा सकता है कि,

$$\sigma^2_{X_1+X_2} = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 \qquad \text{...(14 29)}$$

और इसका आकलक,

$$s^2_{X_1+X_2} = s_1^2 + s_2^2 + 2r\, s_1 s_2 \qquad \text{....(14.29 1)}$$

इसी प्रकार,

$$\sigma^2_{X_1-X_2} = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\, \sigma_1\sigma_2 \qquad \text{....(14 30)}$$

और इसका आकलक,

$$s^2_{X_1-X_2} = s_1^2 + s_2^2 - 2r\, s_1 s_2 \qquad \text{....(14 30.1)}$$

परिकल्पना $H_0 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$ को $H_1 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1$ के विरुद्ध परीक्षा इस प्रकार की जाती है।

माना कि D व S में सहसम्बन्ध गुणांक ρ_{DS} है और इसका आकलक r_{DS} है।

सूत्र (14 1.1) के अनुसार

$$r_{DS} = \frac{s_1^2 - s_2^2}{\sqrt{(s_1^2 + s_2^2 + 2r\, s_1 s_2)(s_1^2 + s_2^2 - 2r\, s_1 s_2)}} \qquad \text{....(14 31)}$$

$$= \frac{(s_1^2 - s_2^2)}{\sqrt{(s_1^2 + s_2^2)^2 - 4r^2 s_1^2 s_2^2}}$$

$$= \frac{(s_1^2/s_2^2 - 1)}{\sqrt{\left(\frac{s_1^2}{s_2^2} + 1\right)^2 - 4r^2 \frac{s_1^2}{s_2^2}}} \qquad \text{....(14 31.1)}$$

यदि $\frac{s_1^2}{s_2^2} = F$ रखें,

तो $$r_{DS} = \frac{F-1}{\sqrt{(F+1)^2 - 4r^2 F}} \quad \ldots (14.32)$$

निराकरणीय परिकल्पना के अन्तर्गत $r_{DS} = 0$

यदि $s_1^2 > s_2^2$ हो तो r_{DS} का मान धनात्मक होता है और $s_1^2 < s_2^2$ हो तो r_{DS} का मान ऋणात्मक होता है।

r_{DS} का धनात्मक व सार्थक मान $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$ की सार्थकता को सिद्ध करता है अर्थात् H_1 स्वीकृत है।

इसी प्रकार r_{DS} का ऋणात्मक व सार्थक मान $\sigma_1^2 < \sigma_2^2$ की सार्थकता सिद्ध करता है अर्थात् H_1 स्वीकृत है। यदि r_{DS} का मान सार्थक न हो तो H_0 स्वीकृत होता है, जिसका अर्थ है कि $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$

मिथ्या या निरर्थक सहसम्बन्ध

इस अध्याय में दिये गये विवरण से स्पष्ट है कि किन्हीं दो चरों पर लिए गये प्रेक्षणों द्वारा सहसम्बन्ध-गुणांक का परिकलन करें तो सहसम्बन्ध-गुणांक का कुछ मान अवश्य प्राप्त हो जाता है और यह मान सार्थक भी हो सकता है। किन्तु यह ज्ञात करना पर्याप्त नहीं है। इससे अधिक महत्त्वपूर्ण यह है कि यह देखा जाय कि इस मान का व्यावहारिक दृष्टि से क्या महत्त्व है। यदि दो चर ऐसे हैं कि जिनमें सहसम्बन्ध-गुणांक बनाना मूर्खतापूर्ण है तो उसे सहसम्बन्ध गुणांक को मिथ्या या निरर्थक सहसम्बन्ध गुणांक कहते हैं। जैसे पिछले पन्द्रह वर्षों में प्रति वर्ष लोहे के उत्पादन और जूतों की माँग में सहसम्बन्ध ज्ञात करें और यह सहसम्बन्ध, धनात्मक व सार्थक हो तो यह कहना कि लोहे के उत्पादन बढ़ने से जूतों की माँग बढ़ती है एक मूर्खतापूर्ण निष्कर्ष है। इसका कारण यह है कि r दो चरों में कार्य करण का सम्बन्ध नहीं बताता। दिये हुए उदाहरण में दोनों चरों के मान बढ़े हैं किन्तु इनके लिए कोई अन्य कारण हो सकते हैं न कि जूतों की माँग बढ़ने से लोहे का उत्पादन बढ़ा है। अतः इस प्रकार के चरों में सहसम्बन्ध मिथ्या या निरर्थक है। जिन चरों में सहसम्बन्ध गुणांक ज्ञात करना हो उन चरों की व्यावहारिकता पर अवश्य ध्यान देना चाहिये अन्यथा निरर्थक परिणाम प्राप्त हो सकते हैं।

बहु सहसम्बन्ध

बहु समाश्रयण समीकरण से सम्बन्धित प्रसरण विश्लेषण के अन्तर्गत एक संख्या R^2 का वर्णन किया गया है। यह संख्या R^2 सरल रैखीय समाश्रयण में r^2 के तुल्य है अर्थात् R^2 समाश्रयण द्वारा जनित वर्ग योग और कुल वर्ग योग के अनुपात के समान होता है। R^2 को निर्धारण गुणांक (Coefficient of determination) कहते हैं। इसके अतिरिक्त प्रसरण विश्लेषण सारणी में दिया गया है कि समाश्रयण में विचलन वर्ग योग, $(1-R^2)\Sigma y_i^2$

के समान है। अत. R^2 का परास 0 से 1 तक हो सकता है अर्थात् $0 \leq R^2 \leq 1$. क्योंकि (R^2) ऋणात्मक कदापि नहीं हो सकता है। इसी सन्दर्भ में संख्या R जिसे बहु सहसम्बन्ध-गुणांक कहते है, को इस प्रकार समझ सकते हैं।

बहु सहसम्बन्ध गुणांक R', $\hat{Y}$ और Y में रैखिक साहचर्य की मात्रा है। इसको इस प्रकार भी कह सकते हैं कि बहु सहसम्बन्ध गुणांक, R, समस्त चरों में संयुक्त रैखिक साहचर्य की मात्रा है यदि K चर $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_K$ हैं जो कि स्वतन्त्र या परतन्त्र कैसे भी हों। माना कि इन चरों पर यादृच्छिक प्रेक्षण $(X_{1i}, X_{2i}, X_{3i}, \ldots, X_{Ki})$ हैं, तो सामान्य रूप में चर X_j की चरों $X_1, X_2, X_{j-1}, X_{j+1}, \ldots, X_K$ में सहसम्बन्ध की मात्रा को $R_{j\,12\cdots(j-1)(j+1)\cdots K}$ द्वारा प्रदर्शित करते हैं। यह किसी एक चर का अन्य चरों से संयुक्त रैखिक सम्बन्ध का माप है। R के साथ प्राय अनुलग्न को नहीं लिखते हैं क्योंकि ये लिखने में असुविधाजनक हैं। इस स्थिति में अनुलग्न को इसके साथ स्वयं ही मान लिया जाता है। R का परास 0 से 1 होता है।

K चरों $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_K$ के लिए युगल चरों में सरल सहसम्बन्ध-गुणांक आव्यूह निम्न होता है :—

$$P = \begin{bmatrix} 1 & r_{12} & r_{13}\cdots\cdots r_{1K} \\ & 1 & r_{23}\cdots\cdots r_{2K} \\ & & 1 \;\cdots\cdots r_{3K} \\ & & \vdots \\ & & 1 \end{bmatrix} \quad \ldots(14\,33)$$

यह एक सममित आव्यूह है जिसके विकर्ण के अंग सदैव 1 होते हैं। r के अनुलग्न यह बताते हैं कि किन चरों में सहसम्बन्ध ज्ञात किया गया है।

R के मान का परिकलन निम्न सूत्र की सहायता से कर सकते हैं :—

$$R_{j\,123\ldots(j-1),(j+1)\ldots K} = \left(1 - \frac{|P|}{P_{jj}}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \ldots(14\,34)$$

जबकि $|P|$ सरल सहसम्बन्ध-गुणांक आव्यूह के सारणिक (determinant) का मान है और P_{jj} सहसम्बन्ध गुणांक r_{jj} के सहखण्ड (cofactor) का मान है। यह विदित हो कि सूत्र (14 34) में $|P|$ व P_{jj} मानों का चिह्न सदैव एक-सा होता है अन्यथा $R_{j\,123\ldots(j-1),(j+1)\ldots K}$ का मान एक से अधिक हो जायेगा जोकि असम्भव मान है। साथ ही $|P| \leq P_{jj}$ होता है अन्यथा बहु सहसम्बन्ध गुणांक का मान काल्पनिक हो जायेगा।

यदि तीन चर X_1, X_2, X_3 हों तो

$$R_{1\cdot 23} = \left(1 - \frac{|P|}{P_{11}} \right)^{\frac{1}{2}} \qquad ....(14.35)$$

$$R_{2\cdot 13} = \left(1 - \frac{|P|}{P_{22}} \right)^{\frac{1}{2}} \qquad ....(14.36)$$

$$R_{3\cdot 12} = \left(1 - \frac{|P|}{P_{33}} \right)^{\frac{1}{2}} \qquad ....(14.37)$$

जबकि

$$|P| = \begin{bmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} \\ & 1 & r_{23} \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

और $R_{1\cdot 23}$ चर X_1 का चरों X_2 व X_3 से बहुसहसम्बन्ध है। इस प्रकार अन्य दो की व्याख्या दी जा सकती है।

यदि बहुसहसम्बन्ध-गुणांक का मान 1 हो तो इसका अर्थ है कि किसी एक चर का अन्य चरों से आदर्श बहु सहसम्बन्ध है। यही कारण है कि बहु समाश्रयण रेखा के समंजन में R का मान जितना अधिक होता है उतना ही रैखिक समीकरण के सम्बन्ध को उपयुक्त तथा शुद्ध समझा जाता है।

यदि $R_{j\,12,3\ldots,j-1,\,j+1\ldots,K} = 0$ हो तो इसका अभिप्राय है कि चर X_j का अन्य चरों से कोई सम्बन्ध नहीं है।

यदि तीन चरों X_1, X_2, X_3 में X_1 का X_2, X_3 पर, X_2 का X_1, X_3 पर तथा X_3 का X_1, X_2 पर समाश्रयण ज्ञात किया गया हो तो तीन समाश्रयण-समतलों के संगामी होने के लिए आवश्यक तथा पर्याप्त प्रतिबन्ध,

$$r^2_{12} + r^2_{13} + r^2_{23} - 2r_{12}\, r_{13}\, r_{23} = 1$$

है।

उदाहरण 14.10 चारों चर X_1, X_2, X_3, X_4, जो कि उदाहरण (13 7) में लिए गये हैं, पर दिये गये प्रेक्षणों को लेकर चर X_1 का X_2, X_3, X_4 से बहु सहसम्बन्ध गुणांक निम्न प्रकार ज्ञात कर सकते हैं :—

उदाहरण (13 7) में ज्ञात किये गये चरों के वर्गों के योग और गुणनफलों के योगों को प्रयोग करके सूत्र,

$$r_{ij} = \frac{\Sigma x_i x_j}{\sqrt{\Sigma x_i^2 \, \Sigma x_j^2}}$$

जहाँ $i, j = 1, 2, 3, 4.$

की सहायता से सरल सहसम्बन्ध-गुणांक ज्ञात कर लिए, जो कि निम्न हैं :—

$$r_{12} = \frac{319 \cdot 50}{\sqrt{1411 \cdot 0 \times 324 \cdot 4}} = \cdot 47$$

$$r_{13} = \frac{125 \cdot 60}{\sqrt{1411 \cdot 0 \times 20 \cdot 5}} = \cdot 71$$

$$r_{14} = \frac{427 \cdot 00}{\sqrt{1411 \cdot 0 \times 281 \cdot 24}} = \cdot 68$$

$$r_{23} = \frac{30 \cdot 74}{\sqrt{324 \cdot 44 \times 22 \cdot 05}} = \cdot 36$$

$$r_{24} = \frac{99 \cdot 94}{\sqrt{324 \cdot 44 \times 281 \cdot 24}} = \cdot 33$$

$$r_{34} = \frac{43 \cdot 68}{\sqrt{22 \cdot 05 \times 281 \cdot 24}} = \cdot 55$$

इन परिकलित सहसम्बन्ध-गुणांकों की सहायता से निम्न सहसम्बन्ध-गुणांक आव्यूह प्राप्त होता है।

$$P = \begin{bmatrix} 1 & \cdot 47 & \cdot 71 & \cdot 68 \\ \cdot 47 & 1 & \cdot 36 & \cdot 33 \\ \cdot 71 & \cdot 36 & 1 & \cdot 55 \\ \cdot 68 & \cdot 33 & \cdot 55 & 1 \end{bmatrix}$$

सूत्र (14.34) के अनुसार, बहु सहसम्बन्ध गुणांक

$$R_{1 \cdot 234} = \left(1 - \frac{|P|}{P_{11}} \right)^{\frac{1}{2}}$$

अतः ऊपर दिये आव्यूह का सारणिक $|P|$ तथा सहखण्ड P_{11} ज्ञात करते हैं। लग्राज (Lagrange's) विधि का प्रयोग करके सारणिक का मान ज्ञात किया।

$$|P| = \begin{vmatrix} 1 & \cdot47 & \cdot71 & 68 \\ \cdot47 & 1 & \cdot36 & \cdot33 \\ \cdot71 & \cdot36 & 1 & \cdot55 \\ 68 & 33 & \cdot55 & 1 \end{vmatrix}$$

पहले स्तम्भ के अंशो के पदो मे विस्तार करने,

$$|P| = 1\begin{vmatrix} 1 & \cdot36 & \cdot33 \\ 36 & 1 & 55 \\ 33 & 55 & 1 \end{vmatrix} - 47\begin{vmatrix} \cdot47 & 71 & 68 \\ \cdot36 & 1 & \cdot55 \\ \cdot33 & 55 & 1 \end{vmatrix}$$

$$+\ 71\begin{vmatrix} \cdot47 & \cdot71 & \cdot68 \\ 1 & \cdot36 & 33 \\ 33 & 55 & 1 \end{vmatrix} - \cdot68\begin{vmatrix} \cdot47 & 71 & 68 \\ 1 & 36 & \cdot33 \\ 36 & 1 & 55 \end{vmatrix}$$

$$= 1\{1(6975) - \cdot36(\cdot1785) + \cdot33(-\cdot1320)\}$$
$$- 47\{\cdot47(8185) - \cdot36(3360) + \cdot33(-\cdot4457)\}$$
$$+ 71\{47(1785) - 1(3360) + \cdot33(-0105)\}$$
$$- 68\{47(-1320) - 1(-\cdot2892) + \cdot36(-0105)\}$$
$$= (589680) - 47(116654) - 71(2556) - 68(22338)$$
$$= 589680 - 054827 - \cdot181476 - \cdot151898$$
$$= 201479$$

जबकि सहखण्ड,

$$P_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 36 & \cdot33 \\ 36 & 1 & 55 \\ 33 & 55 & 1 \end{vmatrix} = \cdot589680$$

$$\therefore \quad R_{1.234} = \left(1 - \frac{201497}{589680}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= (1 - \cdot 3417)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{\cdot 6583}$$

$$= \cdot 811$$

चर X_1 का चरों X_2, X_3 व X_4 से उच्च क्रम का बहु सहसम्बन्ध है।

आंशिक सहसम्बन्ध-गुणांक

यह बहुचर बंटन में किन्ही दो चरों में सहसम्बन्ध की मात्रा है जब कि अन्य चरों के रैखिक प्रभाव का इन दोनों चरों से निरसन कर दिया गया हो। यदि त्रिचर बंटन में चर X_1, X_2, X_3 हैं तो X_1 व X_2 में सहसम्बन्ध जबकि X_1 व X_2 से तीसरे चर के रैखिक प्रभाव का निरसन कर लिया गया हो, आंशिक सहसम्बन्ध कहलाता है। इसे $\rho_{12\cdot 3}$ द्वारा निरूपित किया जाता है और $\rho_{12\cdot 3}$ के आकलक को $r_{12\cdot 3}$ से सूचित करते हैं।

यदि त्रिचर बंटन में चर x_1, x_2, x_3 अपने-अपने माध्य से विचलित चर हैं तो x_1 व x_2 में आंशिक सहसम्बन्ध के हेतु x_1 व x_2 के प्रत्येक मान में से x_3 का वह मान घटा दें जो x_1 व x_2 को प्रभावित करता है। माना नये चर $x_{1\cdot 3}$ व $x_{2\cdot 3}$ द्वारा निरूपित किये गये हैं। $x_{1\cdot 3}$ व $x_{2\cdot 3}$ में सहसम्बन्ध गुणांक ही X_1 व X_2 में आंशिक सहसम्बन्ध-गुणांक कहलाता है। $x_{1\cdot 3}$ व $x_{2\cdot 3}$ को निम्न रूप में लिख सकते हैं —

$$x_{1\cdot 3} = x_1 - r_{13}\frac{s_1}{s_3}x_3$$

$$\text{और} \quad x_{2\cdot 3} = x_2 - r_{23}\frac{s_2}{s_3}x_3$$

यहाँ s_1, s_2, s_3 क्रमश: X_1, X_2 व X_3 के आकलित मानक विचलन हैं। सरल सहसम्बन्ध गुणांक की रीति से $x_{1\cdot 3}$ व $x_{2\cdot 3}$ में सहसम्बन्ध गुणांक ज्ञात करें तो

$$r_{12\cdot 3} = \frac{r_{12} - r_{13}\,r_{23}}{\sqrt{(1 - r^2_{13})(1 - r^2_{23})}} \qquad (14.38)$$

है। इसी प्रकार यदि चर X_1, X_2, X_3 व X_4 हैं तो X_1 व X_2 में आंशिक सहसम्बन्ध जबकि X_1 व X_2 से चरों X_3 व X_4 के रैखिक प्रभाव का निरसन कर दिया गया हो, $r_{12\cdot 34}$ द्वारा निरूपित किया जाता है और $r_{12\cdot 34}$ के लिए सूत्र निम्न होता है :—

$$r_{12\cdot 34} = \frac{r_{12\cdot 3} - r_{14\cdot 3}\,r_{24\cdot 3}}{\sqrt{(1 - r^2_{14\cdot 3})(1 - r^2_{24\cdot 3})}} \qquad (14.39)$$

सूत्र (14.39) में $r_{12\cdot 3}$ का मान सूत्र (14.38) द्वारा तथा $r_{14\cdot 3}$ व $r_{24\cdot 3}$ के मान (14.38) के समरूप सूत्रों

$$r_{14.3} = \frac{r_{14} - r_{13}\, r_{43}}{\sqrt{(1 - r^2_{13})(1 - r^2_{43})}}$$

$$r_{24.3} = \frac{r_{24} - r_{23}\, r_{43}}{\sqrt{(1 - r^2_{23})(1 - r^2_{43})}}$$

द्वारा ज्ञात करके प्रतिस्थापित कर दिये जाते हैं और $r_{12.34}$ का मान परिकलित कर लिया जाता है।

यदि चरों की संख्या चार से अधिक हो तो आंशिक सहसम्बन्ध-गुणांक के लिए सूत्र अत्यन्त जटिल हो जाता है। किन्तु इसका मान सहसम्बन्ध गुणांक आव्यूह की सहायता से ज्ञात करना सुगम है। माना कि k चर $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_k$ हैं और सहसम्बन्ध गुणांक आव्यूह $[P]$, (14.13) के अनुसार है तो किन्हीं दो चरों X_j व X_l में आंशिक सहसम्बन्ध गुणांक $r_{jl.123\ldots k}$ जबकि $j \neq l$ और अनुक्रम $1, 2, 3, \ldots k$ में j व l सम्मिलित नहीं हैं निम्न सूत्र द्वारा ज्ञात किया जा सकता है —

$$r_{jl.123\ldots k} = -\frac{P_{jl}}{(P_{jj}\, P_{ll})^{\frac{1}{2}}} \qquad (14.40)$$

जहाँ P_{jl}, P_{jj} व P_{ll} सहसम्बन्ध-गुणांक आव्यूह के सारणिक में क्रमशः r_{jl}, r_{jj}, r_{ll} के सहखण्ड हैं।

आंशिक सहसम्बन्ध-गुणांक का परास -1 से $+1$ होता है अर्थात्

$$-1 \leq r_{jl.123\ldots k} \leq 1$$

टिप्पणी: यह ध्यान रहे कि बहु तथा आंशिक सहसम्बन्ध-गुणांक के लिए जो सूत्र दिये गये हैं वे समष्टि प्राचलों के आकलन हैं। प्राचलों की स्थिति में बहु सहसम्बन्ध गुणांक को $R_{j.12\ldots j-1, j+1, \ldots k}$ व आंशिक सहसम्बन्ध गुणांक को $\rho_{jl.123\ldots k}$ द्वारा निरूपित करते हैं। इनके आकलक को ज्ञात करने के लिए प्रत्येक चर $X_1, X_2, \ldots X_k$ पर n सामान्य प्रेक्षण प्रतिदर्श में लिए जाते हैं जिनके द्वारा क्रमशः

$$r_{j.12\ldots j-1, j+1 \ldots k} \quad \text{व} \quad r_{jl.123\ldots k}$$

का परिकलन किया जाता है।

आंशिक सहसम्बन्ध-गुणांक की सार्थकता-परीक्षा

यदि परिकल्पना,

$$H_0: \rho_{jl.123\ldots k} = 0 \quad \text{को} \quad H_1: \rho_{jl.123\ldots k} \neq 0$$

के विरुद्ध परीक्षा करनी हो तो t-परीक्षा का प्रयोग करते हैं। यह परीक्षा $H_0: \rho = 0$ की परीक्षा के अनुरूप है। यदि प्रतिदर्श में k चरों पर n स्वतन्त्र प्रेक्षण लिए गये हों तो प्रतिदर्शज,

$$t_{n-k} = \frac{r_{1\cdot 23\ldots k}\sqrt{n-k}}{\sqrt{1-r^2_{1\cdot 23\ldots k}}} \qquad \ldots(14.41)$$

यदि t का परिकलित मान पूर्वनिर्धारित α सा० स्त० व $(n-k)$ स्व० को० के लिए सारणीबद्ध मान से अधिक हो तो H_0 को अस्वीकार कर दिया जाता है जिसका अर्थ है कि आंशिक सहसम्बन्ध-गुणांक का मान सार्थक है। इसके विपरीत स्थिति में H_0 को स्वीकार कर लिया जाता है जिसका अभिप्राय है कि H_0 निरर्थक है।

उदाहरण 14.11 उदाहरण (14.10) में दिए गये चरों X_1, X_2, X_3, X_4 के सरल सहसम्बन्ध-गुणांकों को प्रयोग करके आंशिक सहसम्बन्ध-गुणांक $r_{12\cdot 34}$ का परिकलन तथा इसकी सार्थकता परीक्षा निम्न प्रकार कर सकते हैं —

सरल सहसम्बन्ध-गुणांक हैं,

$r_{12} = \cdot 47,\ r_{13} = \cdot 71,\ r_{14} = \cdot 68$

$r_{23} = \cdot 36,\ r_{24} = \cdot 33,\ r_{34} = \cdot 55$ व $n = 20$

सूत्र (14.38) व तत्सम सूत्रों द्वारा $r_{12\cdot 3}$, $r_{14\cdot 3}$ व $r_{24\cdot 3}$ के मान ज्ञात करके सूत्र (14.39) में रखने पर $r_{12\cdot 34}$ का मान ज्ञात कर लिया गया है।

$$r_{12\cdot 3} = \frac{\cdot 47 - (\cdot 71)(\cdot 36)}{\sqrt{(1-\cdot 71^2)(1-\cdot 36^2)}}$$

$$= \frac{\cdot 2144}{\sqrt{\cdot 4959 \times \cdot 8704}}$$

$$= \cdot 3263$$

$$r_{14\cdot 3} = \frac{\cdot 68 - (\cdot 71)(\cdot 55)}{\sqrt{(1-\cdot 71^2)(1-\cdot 55^2)}}$$

$$= \frac{\cdot 2895}{\sqrt{\cdot 4959 \times \cdot 6975}}$$

$$= \cdot 4923$$

$$r_{24\cdot 3} = \frac{\cdot 33 - (\cdot 36)(\cdot 55)}{\sqrt{(1-\cdot 36^2)(1-\cdot 55^2)}}$$

$$= \frac{\cdot 1320}{\sqrt{\cdot 8704 \times \cdot 6975}}$$

$$= \cdot 1694$$

$$\therefore\ r_{12\cdot 34} = \frac{\cdot 3263 - (\cdot 4923)(\cdot 1694)}{\sqrt{(1-\cdot 4923^2)(1-\cdot 1694^2)}}$$

$$= \frac{2429}{\sqrt{(7576)(9713)}}$$

$$= 283$$

परिकल्पना,

$$H_0 : \; \rho_{12.34} = 0 \quad \text{को} \quad H_1 \quad \rho_{12.34} \neq 0$$

के विरुद्ध परीक्षा प्रतिदर्शज (14 41) के द्वारा इस प्रकार कर सकते हैं —

$$t = \frac{283\sqrt{20-4}}{\sqrt{1-{\cdot}283^2}}$$

$$= \frac{283 \times 4}{959}$$

$$= 1\ 18$$

सारणी (परि० घ–3) द्वारा $\alpha = 05$ और 16 स्व० को० के लिए $t = 2\ 120$ जो कि परिकलित t के मान से अधिक है। अतः H_0 स्वीकृत है।

इसका अभिप्राय है कि $r_{12.34}$ निरर्थक है। आंशिक सहसम्बन्ध गुणांक $r_{12.34}$ का परिकलन सूत्र (14 40) की सहायता से निम्न प्रकार कर सकते हैं। यहाँ

$$r_{12.34} = \frac{P_{12}}{(P_{11}\,P_{22})^{\frac{1}{2}}}$$

उदाहरण (14 10) में किये परिकलन की सहायता से,

$$P_{12} = -\begin{vmatrix} 47 & 36 & 33 \\ 71 & 1 & {\cdot}55 \\ 68 & {\cdot}55 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= +\ 116654$$

$$P_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 36 & 33 \\ 36 & 1 & 55 \\ {\cdot}33 & 55 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= {\cdot}589680$$

$$P_{22} = \begin{vmatrix} 1 & \cdot71 & \cdot68 \\ \cdot71 & 1 & 55 \\ \cdot68 & \cdot55 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1\ (\cdot6975) - \cdot71\ (\cdot3360) + \cdot68\ (-\cdot2895)$$
$$= \cdot6975 - \cdot238560 - \cdot196860$$
$$= \cdot262080$$

$$r_{12\cdot34} = \frac{\cdot116654}{(589680 \times 262080)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{\cdot116654}{(\cdot154543)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{116654}{\cdot393}$$

$$= 296$$

यह बात ध्यान देने योग्य है कि $r_{12\cdot34}$ का मान दोनों सूत्रों द्वारा वही है जो थोड़ा-सा अन्तर है वह संख्याओं के निकटन के कारण है।

कुछ सम्बन्ध

आंशिक सहसम्बन्ध-गुणाक तथा आंशिक समाश्रयण गुणाकों में निम्न सम्बन्ध होता है,

$$r^2_{jl\cdot12....k} = b_{jl.12....k} \quad b_{lj.12....k} \qquad ....(14.42)$$

यदि केवल तीन चर X_1, X_2, X_3 हों तो

$$r^2_{12\cdot3} = b_{12\cdot3}\ b_{21\cdot3} \qquad ....(14.42.1)$$

यदि k चर $X_1, X_2, X_3, ... X_K$ हैं और चर X_1 का $X_2, X_3, X_3, ... X_K$ से बहु सहसम्बन्ध-गुणाक $R_{1\cdot23....K}$ है तो इसका अन्य आंशिक सहसम्बन्ध-गुणाकों से सम्बन्ध निम्न होता है :—

$$1 - R^2_{123\cdots K} = (1-r^2_{12})(1-r^2_{13\cdot2})....(1-r^2_{1K\cdot23\cdots K-1}) \quad ....(14.43)$$

प्रश्नावली

1. क्या सहसम्बन्ध-गुणाक एक से अधिक हो सकता है ? अपने उत्तर की तथ्यों द्वारा पुष्टि कीजिये।
2. यदि σ_X^2 और σ_Y^2 दो स्वतन्त्र चरों X व Y के प्रसरण हैं तो सिद्ध कीजिये कि $(aX+\beta Y)$ का प्रसरण $(a^2\sigma_X^2+\beta^2\sigma_Y^2)$ है।

3. निम्न सहसम्बन्ध-गुणांकों का ज्यामितीय निरूपण कीजिये :—

(i) $r=0{\cdot}68$ (ii) $r=-{\cdot}50$ (iii) $r={\cdot}02$ (iv) $r=1$

3 यदि दो चरों X व Y में सहसम्बन्ध धनात्मक है तो बताइये कि चरों $-X$ और $-Y$ में सहसम्बन्ध धनात्मक होगा या ऋणात्मक ?

5. (अ) यदि x और y दो चर हैं जिनके माध्य शून्य हैं व समान प्रसरण σ^2 है और इनमें सहसम्बन्ध भी शून्य है तो सिद्ध कीजिये कि

$$u = x\cos\alpha + y\sin\alpha$$

और $$v = x\sin\alpha - y\cos\alpha$$

का समान प्रसरण σ^2 है और सहसम्बन्ध शून्य है।

(बी० ए०, देहली 1952)

6. सिद्ध कीजिये कि सहसम्बन्ध मूल बिन्दु और पैमाने में परिवर्तन के प्रभाव से मुक्त है। (आइ० सी० ए० डब्लू, 1964)

7. सहसम्बन्ध के अर्थ तथा सार्थकता की अवधारणा को स्पष्ट कीजिये।

(बी० काम०, मैसूर, 1966)

8 निम्न प्रेक्षणों के लिए कार्ल पियर्सन सहसम्बन्ध-गुणांक का परिकलन कीजिये।

X :	22	35	23	19	33	58	31	22	29
Y :	27	34	32	24	33	48	29	25	29

(केरल, 1969)

(उत्तर $r=0{\cdot}953$)

9. एक फूल प्रदर्शनी में तीन निर्णायकों ने एक प्रकार के 10 मुख्य फूलों को निम्न कोटियाँ प्रदान कीं :—

निर्णायक	फूल A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
P	8	7	5	3	6	2	9	10	1	4
Q	9	10	3	1	5	4	7	6	2	8
R	10	5	4	2	7	3	8	9	1	6

उपर्युक्त कोटियों द्वारा सामञ्जस्य गुणांक ज्ञात कीजिये और इसकी सार्थकता की परीक्षा कीजिये।

10. एक गणक द्वारा सहसम्बन्ध-गुणांक का परिकलन करने पर निम्न योग मान प्राप्त हुए,

$$n=25,\ \Sigma XY=516,\ \Sigma X=125,\ \Sigma Y=100$$
$$\Sigma X^2=650,\ \Sigma Y^2=480$$

कुछ समय पश्चात् जांच करने पर पता चला कि उसने दो युगल

X	Y
6	14
8	6

लिख लिये थे जबकि ये

X	Y
8	12
6	8

थे। सहसम्बन्ध-गुणांक का शुद्ध मान ज्ञात कीजिये।

(बी० एस० सी०, मद्रास, 1964)

(उत्तर $r=0.4133$)

11. निम्न सारणी में कुछ वर्षों में बैंकों के बचत खाते में जमा धन (करोड़ डालर) और ताला बन्दी व हड़तालों की संख्या (हजारों में) दी गई है। सहसम्बन्ध-गुणांक का परिकलन कीजिये और इस पर टिप्पणी लिखिए।

बचत खाते में जमा :	5·1	5·4	5·5	5·9	6·5	6·0	7·2
तालाबन्दी और हड़तालें	3·8	4·4	3·3	3·6	3·3	2·3	1·0

(आई० सी० डब्लू० ए०, 1966)

(उत्तर : $r=-0.822$, मिथ्या सहसम्बन्ध है)

12. विभिन्न चरों में सहसम्बन्ध आव्यूह निम्न दिया गया है।

	तमाकू की उपज (X_1)	प्रति पुंज (Clump) प्रभावी डंठियों की संख्या (X_2)	मेखों (Spikes) की संख्या (X_3)	प्रतिस्पाइकलेट कर्नलों की संख्या (X_4)
X_1	1·00	0·712	·789	·714
X_2		1·00	·789	·730
X_3			1·00	·791
X_4				1·00

(i) बहु सहसम्बन्ध-गुणांक $R_{1.234}$ का परिकलन कीजिये।

(ii) आंशिक सहसम्बन्ध-गुणांक $r_{13.24}$ का परिकलन कीजिये और इसका सार्थकता-परीक्षा कीजिये जबकि प्रतिदर्श में चरों पर 15 संगत प्रेक्षण थे।

13. गायों पर किये गये एक प्रयोग में 127 गाय सूखी तथा 35 गाय दूध देने वाली थीं। इन सूखी तथा दूध देने वाली गायों के मूत्र पोटासियम तथा पचनशील पोटासियम में सहसम्बन्ध-गुणांक क्रमश 0·832 और 0·972 थे। परीक्षा कीजिये कि सूखी तथा दूध देने वाली गायों के समग्र में मूत्र पोटासियम तथा पचनीय पोटासियम में सहसम्बन्ध-गुणांक समान है।

14. निम्न सारणी में गायों की संख्या, अन्तर्गृहीत सोडियम तथा पचनीय सोडियम सम्बन्धी प्रेक्षण दिये गये हैं जो कि विभिन्न रूपों में दिये गये थे।

गायों की संख्या	अन्तर्गृहीत सोडियम	पचनीय सोडियम
5	8 5	6 1
4	12 5	9 5
1	4 2	3 1
6	6 0	1 5
3	23 0	8 5
3	23 0	6 8
1	5 1	4 1

(1) अन्तर्गृहीत सोडियम तथा पचनीय सोडियम में सहसम्बन्ध गुणांक ज्ञात कीजिये।

(2) परिकलित सहसम्बन्ध गुणांक की सार्थकता-परीक्षा कीजिये।

(3) इस न्यास द्वारा सहसम्बन्ध गुणांक ρ की 99 प्रतिशत विश्वास्यता सीमाएँ ज्ञात कीजिये।

15. 12 शोधनों के अन्तर्गत उर्वर दोजियों (fertile tillers) की संख्या और अनुर्वर दोजियों (sterile tillers) की संख्या निम्न प्रकार है —

शोधन क्रमांक	उर्वर दोजियों की संख्या	अनुर्वर दोजियों की संख्या
1	378	818
2	598	943
3	382	1135
4	377	1171
5	388	727
6	611	1660
7	242	884
8	442	1274
9	409	862
10	368	1030
11	583	834
12	330	1020

उर्वर दोजियों की संख्या व अनुर्वर दोजियों की संख्या में सहसम्बन्ध-गुणांक ज्ञात कीजिये।

16. 6 मुर्गों पर प्रयोग द्वारा शारीरिक भार (ग्राम) X और कैल्सियम की मात्रा (ग्राम) Y में परिकलित सहसम्बन्ध-गुणांक 0·98 है। परिकल्पना शारीरिक भार और कैल्सियम की मात्रा में परिपूर्ण सहसम्बन्ध है, की परीक्षा कीजिये।

17. चूहों पर पाँच विभिन्न परीक्षणों के अन्तर्गत कुल भार वृद्धि और कुल लाईसीन की मात्रा में सहसम्बन्ध-गुणांक और चूहों की संख्या निम्न प्रकार थी :—

चूहों की संख्या प्रति भोजन (n)	सहसम्बन्ध-गुणांक (r)
5	0 975
6	0 990
9	0·926
5	0·865
6	0 891

समग्र में इन सहसम्बन्ध-गुणांकों की सजातीयता की परीक्षा कीजिये।

18. 16 विद्यार्थियों की गणित तथा भौतिक विज्ञान के आधार पर कोटियाँ निम्न पायी गयी :—

गणित :	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,
	9,	10,	11,	12,	13,	14,	15,	16,
भौतिक विज्ञान	1,	10,	3,	4	5,	7,	2,	6,
	8,	11,	15,	9,	14,	12,	16,	13.

गणित तथा भौतिक विज्ञान में कुशलता के प्रति इस समूह का कोटि सहसम्बन्ध-गुणांक ज्ञात कीजिये।

(आगरा, 1952)

19. यदि चर Y की चर X पर और X की Y पर समाश्रयण रेखाएँ क्रमशः $Y=a_0+a_1 X$ और $X=b_0+b_1 Y$ है तो सिद्ध कीजिये कि $a_1b_1=r^2$.

(बी० ए०, मद्रास, 1967)

20. अध्याय 12 की प्रश्नावली के प्रश्न 12 में दिये गये न्यास के लिए,

(i) चर Y का चरों X_1, X_2, X_3 से बहु सहसम्बन्ध-गुणांक ज्ञात कीजिये।

(ii) आंशिक सहसम्बन्ध-गुणांक $r_{Y1.23}$ का परिकलन कीजिये और इसकी सार्थकता-परीक्षा कीजिये।

टिप्पणी : प्रश्नावली में विश्वविद्यालयों के दिये गये प्रश्न मूल रूप में आंग्ल भाषा में थे जिनका यहाँ हिन्दी अनुवाद दिया गया है।

□□□

15 सूचकांक

सूचकांक वह संख्या है जो एक चर के लिए किसी समय, स्थान या स्थिति में परिमाण और अन्य समय, स्थान या स्थिति में परिमाण के अनुपात को निरूपित करती है। सूचकांक के द्वारा समय-समय पर या एक स्थान से दूसरे स्थान में आपेक्षिक परिवर्तन ज्ञात किये जाते हैं। जैसे–आवश्यक वस्तुओं के वर्तमान मूल्यों और पिछले किसी अन्य वर्ष के मूल्यों के अनुपात को सूचकांक के रूप में ज्ञात करते हैं या दिल्ली व बम्बई के, समान वस्तुओं के, मूल्यों में अनुपात को सूचकांक के रूप में ज्ञात करते हैं जिससे कि यह पता चलता है कि दिल्ली की अपेक्षा बम्बई में रहन-सहन के व्यय में कितना अन्तर पड़ता है। इस माप का प्रयोग सरकार द्वारा मूल्य एवं वेतन निर्धारण सम्बन्धी नियम बनाने के हेतु भी किया जाता है। मिलों के मालिक भी कर्मचारियों के वेतन रहन-सहन के खर्चों के आधार पर निर्धारित करते हैं और जो समय-समय पर मूल्यों में परिवर्तन होते हैं उनके अनुसार वेतनों में भी परिवर्तन कर दिये जाते हैं। इसके अतिरिक्त सूचकांक द्वारा स्फीति (Inflation) या अपस्फीति (deflation) की स्थिति का भी ज्ञान होता है। सर्वप्रथम सूचकांक का प्रयोग ड्यूलट (Dulot) ने सन् 1938 में दो भिन्न समयों पर मूल्यों के योग की तुलना करके किया था।

बीसवीं शताब्दी में मूल्य सूचकांक के अतिरिक्त वस्तुओं के उत्पादन या उपभोग मात्राओं में समय या स्थान के अनुसार परिवर्तन जानना भी अत्यधिक प्रचलित है। अतः सूचकांक द्वारा सदैव दो स्थितियों की तुलना की जाती है चाहे वह दो विभिन्न समय हों या दो विभिन्न स्थान।

तुलना के हेतु किसी एक निश्चित समय पर किन्हीं वस्तुओं के मूल्यों व मात्राओं के प्रति आँकड़े सर्वेक्षण द्वारा या अन्य किसी स्रोत से संग्रहीत करने होते हैं। इस समय को आधार काल (Base period) कहते हैं। अन्य समय पर, जिस समय पर सूचकांक जानना हो, उन्हीं वस्तुओं के मूल्य व मात्राओं सम्बन्धी आँकड़े एकत्रित किये जाते हैं। आधार समय व अन्य समय की तदनुसार वस्तुओं के मूल्य व मात्राओं के गुणनफल के योग का अलग अलग परिकलन कर लिया जाता है। निर्दिष्ट समय की संख्या को आधार समय की संख्या से भाग देने पर सूचकांक ज्ञात हो जाता है। यहाँ यह विधि केवल मूल सिद्धान्त के रूप में दी गई है अन्यथा सूचकांक ज्ञात करने की विभिन्न विधियों का वर्णन आगे पाठ्यक्रम में दिया गया है, इस अनुपात के हेतु एक सर्व साधारण सूत्र निम्न सूत्र के रूप में दिया जा सकता है क्योंकि किसी भी अध्ययन में अधिकतर मूल्य और मात्रा दो घटकों का प्रयोग होता है। अतः कुल मूल्य प्रभाव (Total price influence) और कुल मात्रा प्रभाव का सूत्रीकरण सम्भव है और इसके द्वारा हम मान अनुपात (Value ratio) ज्ञात कर सकते हैं।

$$V = P \times Q \quad \text{....(151)}$$

जबकि $P-V$ में कुल मूल्य प्रभाव का माप है।
$Q-V$ में कुल मात्रा प्रभाव का माप है।

सूत्र (15 1) का प्रयोग आधार के रूप में ही किया जायेगा।

सूचकांक ज्ञात करने की विधियों एवं सूत्रों को जानने से पहले प्रथम पद्धति को समझना लाभप्रद होगा जो कि निम्न प्रकार है —

I_{01} यह समय 1 (निर्दिष्ट काल) के लिए समय 0 (आधार काल) की अपेक्षा सूचकांक है।

P_{01} केवल मूल्य के लिए 0 काल की अपेक्षा काल 1 का सूचकांक है।

Q_{01} केवल मात्रा के लिए 0 काल की अपेक्षा काल 1 का सूचकांक है।

N_0 समय 0 (आधार काल) पर पदार्थों की संख्या है।

N_1 समय 1 (निर्दिष्ट काल) पर पदार्थों की संख्या है।

N_{01} उन पदार्थों की संख्या है जो दोनों समयों में सार्व (Common) हैं। इन पदार्थों को द्विवर्गी पदार्थ (binary commodities) कहते हैं।

अत वे पदार्थ जो केवल एक काल में पाये जाते हैं अद्वितीय पदार्थ कहलाते हैं क्योंकि कुछ नये पदार्थों की उत्पत्ति हो जाती है और कुछ पदार्थों का उत्पादन समाप्त हो जाता है। इसके अतिरिक्त वस्तुओं का प्रयोग सामाजिक परिवर्तनों, वैज्ञानिक आविष्कारों आदि के कारण बदलता रहता है अर्थात् कुछ वस्तुएँ जो चलन में हैं कुछ वर्षों बाद उत्पादित नहीं की जाती हैं क्योंकि उनका स्थान नई वस्तुएँ ग्रहण कर लेती हैं। फैशन के अनुसार भी आवश्यकताएँ बदलती रहती हैं अत अद्वितीय पदार्थों की संख्या

$$=(N_0-N_{01})+(N_1-N_{01})$$
$$=(N_0+N_1-2N_{01}) \quad \text{....}(15\ 2)$$

है।

इसी प्रकार प्रतिदर्श के लिए सभी संकेतनों को छोटे अक्षरों द्वारा निरूपित करते हैं। जैसे अद्वितीय पदार्थों की संख्या को काल 0 व 1 में n_0 व n_1 तथा द्विवर्गी पदार्थों की संख्या को n_{01} द्वारा निरूपित करते हैं। 0, 1, 2 आदि समयों में मूल्यों को p_0, p_1, p_2 आदि द्वारा और मात्राओं को q_0, q_1, q_2 द्वारा निरूपित करते हैं। इन समयों पर प्रतिदर्श के लिए कुल मूल्य क्रमश निम्न होते हैं —

$$\sum^{n_0} p_0 q_0, \quad \sum^{n_1} p_1 q_1, \quad \sum^{n_2} p_2 q_2$$

इसी प्रकार द्विवर्गी पदार्थों के कुल मूल्य हैं,

$$\sum^{n_{01}} p_0 q_0 \quad \sum^{n_{01}} p_1 q_1, \quad \sum^{n_{02}} p_2 q_2$$

सूचकांक रचना की विधियाँ

सूचकांक ज्ञात करने की अनेकों विधियाँ हैं। सदैव ही सूचकांक ज्ञात करते समय कई प्रकार की कठिनाइयाँ सामने आती हैं। फिर भी कुछ विधियाँ अधिकतर उपयुक्त पाई जाती हैं। ऐसी ही कुछ विधियों का वर्णन यहाँ किया गया है।

किसी भी विधि द्वारा सूचकांक ज्ञात करने में आधार वर्ष के मान को 100 के तुल्य मान लिया जाता है और अन्य वर्ष के मान को 100 की तुलना में दिया जाता है अर्थात् किसी विधि द्वारा जो मान प्राप्त होता है उसे 100 से गुणा कर दिया जाता है। इसी प्रकार प्राप्त संख्या को सूचकांक कहते हैं।

मूल्यों के योग के अनुपात द्वारा

माना कि प्रतिदर्श में n पदार्थों के मूल्यों का वर्षों 1 व 0 के लिए ज्ञात किया गया है। वर्ष 1 में वर्ष 0 की अपेक्षा मूल्य सूचकांक है।

$$P_{01}=\frac{\sum_{i} p_{1i}}{\sum_{i} p_{0i}} \qquad \text{.(15 3)}$$

यह विधि सबसे सुगम है। किन्तु इसमें यह दोष है कि विभिन्न पदार्थों को समान महत्त्व दिया गया है जो कि व्यावहारिक दृष्टि से उचित नहीं है।

उदाहरण 15.1 दुग्ध वितरण योजना, कृषि महाविद्यालय, उदयपुर से दूध और दूध के पदार्थों के भाव सन् 1965 व 1972 में निम्न थे—

दूध और दूध के पदार्थ	1965 मूल्य रु० प्रति किलो	1972 मूल्य रु० प्रति किलो
दूध	0·80	1·20
घी	8 25	11·00
मक्खन	8 00	12·00
आईसक्रीम	8·00	9 60
क्रीम (40% चर्बी)	9 00	13·00
कुल	34 05	46·80

वर्ष 1965 की अपेक्षा 1972 के लिए मूल्य सूचकांक निम्न प्रकार ज्ञात कर सकते हैं—

सूत्र (15 3) की सहायता से मूल्य सूचकांक,

$$P_{01}=\frac{46\ 80}{34\ 05}\times 100$$

$$=137\ 4$$

अतः वर्ष 1972 के लिए मूल्य सूचकांक 137·4 है।

सापेक्ष मूल्यों के माध्य द्वारा

यदि n पदार्थों के लिए समय 0 तथा 1 पर क्रमश मूल्य p_{0i} व p_{1i} हो तो,

$$P_{01}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{p_{1i}}{p_{0i}} \qquad \text{...(15.4)}$$

इस सूत्र का प्रयोग सर्वप्रथम कार्ली (Carli) ने सन् 1764 में किया। किन्तु सन् 1863 में जेवान्स (Jevons) ने बताया कि समान्तर माध्य की अपेक्षा गुणोत्तर माध्य द्वारा अधिक उत्तम सूचकांक ज्ञात किये जा सकते हैं।

$$P_{01} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} \frac{p_{1i}}{p_{0i}}} \qquad \ldots(15.5)$$

इसी प्रकार के सूत्र समग्र मात्रा-सूचकांक ज्ञात करने के हेतु दिये जा सकते हैं। इस स्थिति में सूत्रों में p के स्थान पर q का प्रयोग करना होता है। इस विधि का एक लाभ यह है कि पृथक्-पृथक् पदार्थों के सूचकांक भी ज्ञात हो जाते हैं।

उदाहरण 15.2 दूध व दूध के पदार्थों सम्बन्धी उदाहरण 15.1 में दिये आँकड़ों के लिए वर्ष 1965 की अपेक्षा वर्ष 1972 के मूल्य सूचकांक सापेक्ष मूल्यों के माध्य द्वारा निम्न प्रकार ज्ञात कर सकते हैं—

सूत्र (15.4) द्वारा सूचकांक,

$$P_{01} = \frac{1}{5}\left(\frac{1.20}{0.80} + \frac{11.0}{8.25} + \frac{12.00}{8.00} + \frac{4.80}{4.00} + \frac{13.00}{9.00}\right) \times 100$$

$$= \tfrac{1}{5}(1.50 + 1.33 + 1.50 + 1.20 + 1.44) \times 100$$

$$= 139.4$$

सूत्र (15.5) द्वारा सूचकांक,

$$P_{01} = \left(\frac{1.20}{0.80} \times \frac{11.00}{8.25} \times \frac{12.00}{8.00} \times \frac{4.80}{4.00} \times \frac{13.00}{9.00}\right)^{1/5}$$

$$= (1.50 \times 1.33 \times 1.50 \times 1.20 \times 1.44)^{1/5}$$

$$\therefore \log_{10} P_{01} = \tfrac{1}{5}\{\log_{10} 1.50 + \log_{10} 1.33 + \log_{10} 1.50 + \log_{10} 1.20 + \log_{10} 1.44\}$$

$$= \tfrac{1}{5}(.1761 + .1239 + .1761 + .0792 + .1584)$$

$$= \tfrac{1}{5}(.7137)$$

$$= .1427$$

$$P_{01} = 1.389$$

100 से गुणा करने पर सूचकांक $P_{01} = 138.9$

भारित सापेक्ष द्वारा मूल्य सूचकांक

उपर्युक्त विधियों में एक सबसे बड़ा दोष यह है कि प्रत्येक पदार्थ को समान महत्व दिया गया है। किन्तु यह उचित नहीं है क्योंकि उपभोक्ता सब वस्तुओं का प्रयोग समान मात्रा में नहीं करता है और न ही उनकी आवश्यकता समान होती है। जैसे उदाहरण (15.1) में दूध व मक्खन को समान महत्व का माना गया है, जबकि वास्तविकता यह

है कि दूध एक आवश्यक पदार्थ है और इसका प्रयोग लगभग सभी परिवारों में होता है और इसके विपरीत मक्खन का प्रयोग केवल कुछ ही परिवार करते हैं। सर्वविदित है कि दूध का उपभोग मक्खन की अपेक्षा कहीं अधिक होता है। अतः उपभोग की मात्रा से पदार्थों के मूल्यों को भारित करना अत्यन्त आवश्यक हो जाता है।

मूल्यों को, उपभोग की मात्रा द्वारा भारित न करने के दुष्परिणामों का इस रूप में समझा जा सकता है। यदि सूचकांक को स्थिर रखने के हेतु यदि दूध के मूल्यों को बढ़ाते जाँय और मक्खन के मूल्य को घटाते जाँय तो अधिकांश व्यक्तियों पर दूध के मूल्य का प्रभाव पड़ेगा और उनका व्यय बढ़ जायगा जबकि मक्खन के भाव घटने का कुछ परिवारों को ही लाभ होगा। किन्तु मूल्यों को मात्रा से भारित करने पर इस प्रकार का विभ्रम सम्भव नहीं है।

मूल्यों को मात्रा द्वारा भारित करके काल 0 (आधार) की अपेक्षा अन्य काल 1 का मूल्य सूचकांक निम्न सूत्र द्वारा ज्ञात कर सकते हैं—

$$P_{01}=\frac{\sum_i p_{1i}\, q_{1i}}{\sum_i p_{0i}\, q_{0i}} \qquad \text{....(15.6)}$$

जबकि $i=1, 2, 3, \ldots, n$

(15 6) द्वारा प्राप्त सूचकांक का कोई अर्थ नहीं है क्योंकि इसके द्वारा यह जानना लगभग असम्भव है कि यह सूचकांक मूल्यों में परिवर्तन के कारण है या उपभोग वस्तुओं की मात्रा में परिवर्तन के कारण है। अत अब यह प्रश्न उठता है कि भार संख्या क्या होनी चाहिए? इस भार संख्या को इस प्रकार ज्ञात कर सकते हैं। यदि दिये हुए वर्ष में आधार वर्ष 1 के सापेक्ष परिवर्तन $\sum_1 p_{1i}/p_0$ है और इसे संख्या $p_{0i}\, q_{0i}$ अर्थात् आधार वर्ष के कुल मान से भारित कर दें तो दिये हुए वर्ष में भारित मान निम्न होगा—

$$\sum \frac{p_{1i}}{p_{0i}}\times p_0\ q_{0i}=\sum_1 p_{1i}\, q_0$$

इस संख्या का आधार वर्ष के भारित मान $\sum_1 p_{0i}\, q_0$ से अनुपात लेने पर सूचकांक P_{01} ज्ञात हो जाता है।

$$P_{01}=\sum_1 p_{1i}\, q_{0i}\Big/\sum_1 p_{0i}\, q_{0i} \qquad \text{....(15.7)}$$

मात्रा सूचकांक के लिए इसी प्रकार का सूत्र निम्न रूप में दिया जा सकता है।

$$Q_{01}=\sum q_{1i}\, p_{0i}\Big/\sum_1 q_{0i}\, p_{0i} \qquad \text{....(15 8)}$$

(15 7) द्वारा दिया गया सूचकांक सुदृढ़ एवं विश्वसनीय है क्योंकि इसके द्वारा काल के अन्तर के कारण मूल्य परिवर्तन उन्हीं पदार्थों की समान मात्रा के लिए ज्ञात किया गया है। इसी बात को इस प्रकार समझ सकते हैं। इस सूचकांक द्वारा यह पता चलता है कि

वर्ष 1 में आधार वर्ष (0) की अपेक्षा उन्हीं वस्तुओं की उतनी मात्रा प्राप्त करने के लिए कितना अधिक या कम धन लगाना पड़ेगा ।

सूत्र (15.7) को लैसपीयर्स (Laspeyres) सूत्र भी कहते हैं और इसे L द्वारा निर्दिष्ट करते हैं । इस सूत्र द्वारा उपभोक्ता के लिए आधार वर्ष की अपेक्षा मूल्य वृद्धि का अधिक आकलन होता है ।

उपर्युक्त दोष को दूर करने यदि दिये हुए वर्ष (1) की मात्राओं द्वारा भारित कर लिया जाता है और इस प्रकार मूल्य सूचकांक के लिए सूत्र,

$$P_{01} = \sum_{1} p_{1i} q_{1i} \Big/ \sum_{1} p_{0i} q_{1i} \qquad \text{....(15.9)}$$

सूत्र (15.9) द्वारा पता चलता है कि दिये हुए वर्ष में पदार्थों की मात्रा के लिए आधार वर्ष की अपेक्षा उन्हीं वस्तुओं की उतनी ही मात्रा के लिए कितना अधिक या कम धन व्यय करना होता है । सूत्र (15.9) को पाशे (Paasche) का सूत्र कहते हैं । इस सूत्र द्वारा उपभोक्ता के लिए मूल्य में परिवर्तन का न्यून आकलन होता है ।

इसी प्रकार भारित मात्रा सापेक्ष सूचकांक को निम्न सूत्र द्वारा ज्ञात कर सकते हैं—

$$Q_{01} = \sum_{1} q_{1i} p_{1i} \Big/ \sum_{1} q_{0i} p_{1i} \qquad \text{....(15.10)}$$

मूल्य सूचकांक के लिए दिये गये सूत्र (15.9) को P द्वारा निर्दिष्ट करते हैं ।

सूत्रों L व P के द्वारा प्राप्त सूचकांक का क्रमशः अधिक व न्यून आकलन होने के कारण को निम्न प्रकार समझ सकते हैं—सूचकांक L मूल्यों में परिवर्तन के कारण प्रतिशत परिवर्तन का मान प्रदर्शित करता है । यह प्रतिशत मान अधिक है क्योंकि स्वतन्त्र बाजार की स्थिति में कोई भी व्यक्ति जिसके पास धन $\sum_{1} p_{1i} q_{0i}$ है अपनी खरीद को इस प्रकार करेगा कि जिससे उसकी स्थिति सुधर जाये । इसका अर्थ है कि किसी चीज के भाव बढ़ जाने पर उपभोक्ता उस चीज को साधारणतया कम प्रयोग करता है और इसके स्थान पर अन्य वस्तुओं का प्रयोग करना प्रारम्भ कर देता है । किन्तु L में उतनी ही मात्रा q_0 का प्रयोग करने से p_{01} का मान वास्तविक मान से अधिक हो जाता है । इसी प्रकार का स्पष्टीकरण p द्वारा न्यून आकलन के लिए दे सकते हैं ।

L व P द्वारा अधिक व न्यून आकलन होना आवश्यक नहीं है । ऐसी भी स्थिति हो सकती है कि जिसमें L का मान P से कम हो इसके अतिरिक्त इन सूत्रों द्वारा शुद्ध सूचकांक ज्ञात न होने का कारण यह भी है कि इनमें से कोई भी सूत्र पूर्ण ध्यान का प्रयोग नहीं करता है । अतः इन दोनों सूत्रों का समन्वय कर देने से एक यथार्थ सूचकांक ज्ञात होने की आशा की जाती है ।

L व P का समन्वय करने की एक सरल व अच्छी विधि L व P का समान्तर माध्य लेकर सूचकांक ज्ञात करना है । अतः,

$$\tfrac{1}{2}(L+P) = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\sum_{1} p_{1i} q_{0i}}{\sum_{1} p_{0i} q_{0i}} + \frac{\sum_{1} p_{1i} q_{1i}}{\sum_{1} p_{0i} q_{1i}}\right) \qquad \text{....(15.11)}$$

समान्तर माध्य द्वारा सूचकांक का परिकलन सरल है। किन्तु गुणोत्तर माध्य भी प्राय उचित सूचकांक बताता है। इसका नाम गुणोत्तर क्रास (Geometric cross) फिशर ने सन् 1920 में दिया।

$$\sqrt{L.P} = \sqrt{\frac{\sum_i p_{1i} q_{0i}}{\sum_i p_{0i} q_{0i}} \times \frac{\sum_i p_{1i} q_{1i}}{\sum_i p_{0i} q_{1i}}} \qquad ...(15.12)$$

गुणोत्तर क्रास को फिशर का आदर्श सूत्र (Fisher's ideal formula) भी कहते हैं। इसका कारण यह है कि उनका विचार था कि यह सम्भव है कि किसी काल में मूल्यों में परिवर्तन का पूर्ण यथार्थता से माप किया जा सकता है। इस बात को सिद्ध करने के हेतु उन्होंने बताया कि उनका सूत्र, सूत्र-त्रुटि से मुक्त है। अतः फिशर ने दो सूत्र त्रुटियों की परीक्षाओं का वर्णन किया और यह सिद्ध किया कि सूत्र (15 12) इन त्रुटियों से मुक्त है। ये दो परीक्षाएँ निम्न प्रकार हैं—

(1) कालोत्क्रमण परीक्षा

फिशर ने विचार व्यक्त किया कि मूल्य सूचकांक के लिए दिया गया कोई सूत्र तब परिशुद्ध कहा जायेगा जबकि यह काल सामंजस्य को बनाये रक्खे अर्थात् निम्न सम्बन्ध को सन्तुष्ट करे—

$$P_{01} \ P_{10} = 1 \qquad ....(15\ 13)$$

यदि यह सूत्र सन्तुष्ट नहीं हो तो फिशर ने इसे सम्मिलित त्रुटि बताया क्योंकि इस सूत्र त्रुटि को P_{01} या P_{10} में से किसी एक के साथ सम्बद्ध नहीं किया जा सकता है। अतः सम्मिलित त्रुटि

$$E_1 = P_{01} \ P_{10} - 1 \qquad ....(15\ 13\ 1)$$

यदि $\qquad P_{01} = 80, \ P_{10} = 125$

तो $\qquad P_{01} \times P_{10} = \frac{80}{100} \times \frac{125}{100}$

$$= 1$$

और $\qquad E_1 = 0$

सम्बन्ध (15 13) को निम्न प्रकार से भी सिद्ध कर सकते हैं—

$$P_{01} = \sqrt{\frac{\sum_i p_{1i} q_{0i}}{\sum_i p_{0i} q_{0i}} \times \frac{\sum_i p_{1i} q_{1i}}{\sum_i p_{0i} q_1}}$$

$$P_{10} = \sqrt{\frac{\sum_i p_{0i} q_{1i}}{\sum_i p_{1i} q_{1i}} \times \frac{\sum_i p_0 \ q_{0i}}{\sum_i p_{1i} q_{0i}}}$$

निम्न सूत्रों में अक्षर i को अनुलग्न के रूप में स्वयं समझ लिया गया है।

$$\therefore \quad P_{01} \times P_{10} = \sqrt{\frac{\sum_i p_0 q_1}{\sum_i p_1 q_1} \times \frac{\sum_i p_0 q_0}{\sum_i p_1 q_0} \times \frac{\sum_i p_1 q_0}{\sum_i p_0 q_0} \times \frac{\sum_i p_1 q_1}{\sum_i p_0 q_1}}$$

$$= \sqrt{1}$$

$$= 1$$

(2) उपादान-उत्क्रमण परीक्षा

इस परीक्षा की उत्पत्ति फिशर ने इस विचार को ध्यान में रखते हुए की कि एक सूत्र जो पदार्थों के मूल्यों के लिए सत्य है उसे पदार्थों की मात्रा के लिए भी सत्य होना चाहिये। अतः,

$$P_{01}\, Q_{01} = V_{01} \qquad \text{....(15 14)}$$

या

$$\frac{P_{01}\, Q_{01}}{V_{01}} = 1 \qquad \text{....(15.14.1)}$$

जबकि V_{01} निश्चित पदार्थों के मूल्य अनुपात को निरूपित करता है अर्थात्,

$$V_{01} = \frac{\sum_i p_1 q_1}{\sum_i p_0 q_0} \qquad \text{(15.14 2)}$$

यदि कोई सूत्र सम्बन्ध *(15 14)* को सन्तुष्ट नहीं करता है तो उस सूत्र में सम्मिलित त्रुटि विद्यमान समझी जाती है। यहाँ इस त्रुटि को सम्मिलित त्रुटि इस कारण कहा गया है कि यह कहना सम्भव नहीं है कि त्रुटि मूल्य घटक से सम्बद्ध है या मात्रा घटक से सम्बद्ध है, अतः सम्मिलित त्रुटि, जो कि धनात्मक या ऋणात्मक प्रतिशत त्रुटि के रूप में दी गई है, निम्न प्रकार है—

$$E_3 = \frac{P_{01}\; Q_{01}}{V_{01}} - 1 \qquad \text{....(15 15)}$$

फिशर ने कहा कि वह सूत्र जो इन त्रुटियों से मुक्त हो या ये त्रुटियाँ अत्यन्त सूक्ष्म हों तो सूचकांक के लिए सूत्र को अन्य की अपेक्षा उत्तम समझा जाता है। फिशर का सूत्र उपादान-उत्क्रमण परीक्षा में सत्य होता है। इसे निम्न प्रकार सिद्ध किया जा सकता है—

$$P_{01} = \sqrt{\frac{\sum_i p_1 q_0}{\sum_i p_0 q_0} \times \frac{\sum_i p_1 q_1}{\sum_i p_0 q_1}}$$

$$Q_{01} = \sqrt{\frac{\sum_i q_1 p_0}{\sum_i q_0 p_0} \times \frac{\sum_i q_1 p_1}{\sum_i q_0 p_1}}$$

इन सूत्रों मे अनुलग्न 1 को प्रत्येक अक्षर के साथ स्वय समझ लिया गया है ।

$$P_{01} \cdot Q_{01} = \sqrt{\frac{\sum\limits_1 p_1 q_0}{\sum\limits_1 p_0 q_0} \times \frac{\sum\limits_1 p_1 q_1}{\sum\limits_1 p_0 q_1} \times \frac{\sum\limits_1 q_1 p_0}{\sum\limits_1 p_0 q_0} \times \frac{\sum\limits_1 q_1 p_1}{\sum\limits_1 q_0 p_1}}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\sum\limits_1 p_1 q_1}{\sum\limits_1 p_0 q_0}\right)^2}$$

$$= \frac{\sum\limits_1 p_1 q_1}{\sum\limits_1 p_0 q_0}$$

$$= V_{01}$$

इन गुणों के अतिरिक्त फिशर ने गुणोत्तर-ह्रास सूत्र को इस आधार पर भी प्रवर (Superior) बताया कि यह मूल्य तथा मात्रा में परिवर्तन का माप करने में दो कालों (आधार व अन्य काल) के सम्पूर्ण व्यास को प्रयोग में लाता है ।

कुछ अनुसंधानकर्त्ताओं ने इस सूत्र के आदर्श होने का अनुमोदन किया । इनमें मुख्यतया पीगू (Pigou) और बाउले (Bowley) हैं । किन्तु कुछ अन्य व्यक्तियों ने गुणोत्तर-ह्रास को आदर्श सूत्र मानने से असहमति व्यक्त की, क्योंकि फिशर का सूत्र वृत्तीय परीक्षा (नीचे दी गई है) में पूरा नहीं उतरता है । फिर भी आजकल गुणोत्तर-ह्रास का आदर्श सूत्र के रूप में प्रयोग किया जाता है ।

वृत्तीय परीक्षा

इस परीक्षा के अन्तर्गत सूचकांक एक काल को आधार मानकर उससे अगले काल के लिए ज्ञात करते हैं । यह क्रम तब तक चलता रहता है जब तक कि अन्तिम सूचकांक प्रारम्भिक वर्ष के लिए, अन्तिम काल को आधार मानकर ज्ञात न हो जाय । अतः K वर्षों के लिए वृत्तीय परीक्षा निम्न प्रकार है—

$$P_{01} \cdot P_{12} \cdot P_{23} \ldots P_{(k-1)k} \cdot P_{k0} = 1 \qquad \ldots (15.16)$$

सूत्र (15.16) इस प्रकार भी लिख सकते है—

$$P_{01} \cdot P_{12} \cdot P_{23} \ldots P_{(k-1)k} = P_{0k} \qquad \ldots (15.16.1)$$

सूत्र (15.16.1) से स्पष्ट है कि काल 0 से K तक के शृंखलिक सूचकांकों का गुणनफल, सूचकांक P_{0k} के समान होता है । इस सूत्र को अगले पृष्ठ में शृंखला सूचकांक के अन्तर्गत सिद्ध भी किया गया है ।

वृत्तीय परीक्षा मे केवल एक या दो सूत्र ही पूरे उतरते हैं और ये वे सूत्र हैं जो बहुत कम प्रयोग मे आते है क्योंकि ये सैद्धान्तिक रूप से अच्छे नहीं हैं । यही कारण है कि फिशर ने वृत्तीय परीक्षा को दोषपूर्ण कहा है और साथ ही यह भी सिद्ध किया कि कोई भी उच्च श्रेणी का सूत्र वृत्तीय परीक्षा के हेतु दिये गये प्रतिबन्ध को सन्तुष्ट नहीं करता है ।

L व P में सामंजस्य

L व P में सामंजस्य संख्या D इस प्रकार है,

$$D = L - P \qquad ...(15.17)$$

यदि $D < 2$ हो तो L व P दोनों सन्तोषजनक माने जाते हैं और यदि $D > 2$ हो तो यह समझा जाता है कि दोनों सूचकांक-मानों में से कोई भी सन्तोषजनक नहीं है।

समान्तर भार संकरित सूत्र

समान्तर भार संकरित सूत्र में मूल्यों p_{1i} व p_{0i} को काल 0 व 1 की मात्राओं के माध्य से भारित करते हैं। इस सूत्र द्वारा एक अच्छा मूल्य सूचकांक ज्ञात हो जाता है।

$$P_{01} = \frac{\sum_i (q_{1i} + q_{0i})\, p_{1i}}{\sum_i (q_{1i} + q_{0i})\, p_{0i}} \qquad ...(15.18)$$

गुणोत्तर भार संकरित सूत्र (Geometric-crossed weight formula)

यह सूत्र निम्न होता है —

$$P_{01} = \frac{\sum_i \sqrt{p_{1i}\, q_{1i}\, q_{0i}}}{\sum_i \sqrt{p_{0i}\, q_{1i}\, q_{0i}}} \qquad ....(15.19)$$

गुणोत्तर भार संकरित सूचकांक परिकलन में कठिन है। अतः जब तक इसकी गणना करने की आवश्यकता स्पष्ट न हो, तब तक इसका प्रयोग नहीं करना चाहिये।

(टिप्पणी मात्रा सम्बन्धी सूचकांक सूत्र p के स्थान पर q और q के स्थान पर p का प्रयोग करके प्राप्त हो जाते हैं।)

मिचल (Mitchell) ने थोक मूल्यों के सूचकांक के लिए मूल्यों को आधार वर्ष से दिए हुए वर्ष के बीच खरीदी हुई या बेची हुई वस्तुओं की मात्रा के माध्य q_i द्वारा भारित करने का सुझाव रखा और इसके लिए निम्न सूत्र दिया —

$$P_{01} = \sum_i p_{1i}\, q_i \Big/ \sum_i p_{0i}\, q_i \qquad ....(15.20)$$

इस सूत्र को विभिन्न लोगों ने स्वीकार किया किन्तु अनेक वर्षों की खरीद व बिक्री सम्बन्धी आँकड़े एकत्र करना अत्यधिक असुविधाजनक होने के कारण यह सूत्र प्रचलन में नहीं है।

किसी भी स्थिति में सूचकांक ज्ञात करने में भार एक प्रमुख महत्त्व रखते हैं। यथोचित अनुसंधान करने के बाद भी एक निश्चित भार को सर्वोत्तम भार कहना कठिन है क्योंकि यह भार, काल व उस काल की परिस्थितियाँ एवं आँकड़े जो उपलब्ध हों उस पर बहुत निर्भर करते हैं। अतः भारों का चयन कार्यकर्ता के अनुभव एवं कुशलता पर निर्भर रहता है।

उदाहरण 15 3 : निम्न सारणी में 10 पदार्थों के लिए यूरोपियन आर्थिक समुदाय (European economic community) द्वारा किये गये आयात सम्बन्धी आँकड़े वर्ष 1961 व 1967 के लिए निम्न सारणी में दिये गये हैं —

पदार्थ	वर्ष 1961 पदार्थ का भाव (p_0) (लाख डालर प्रति हजार मीटरी टन)	वर्ष 1961 पदार्थ की मात्रा (q_0) (हजार मीटरी टन)	वर्ष 1967 पदार्थ का भाव (p_1) (लाख डालर प्रति हजार मीटरी टन)	वर्ष 1967 पदार्थ की मात्रा (q_1) (हजार मीटरी टन)
1	2	3	4	5
दूध व क्रीम	1·875	152·5	2·551	532 7
मक्खन	0·902	65 4	1·013	70 5
गेहूँ	0 788	5026·9	0 822	4483 6
चावल	1 406	356·4	1·763	335 7
मक्का	0 562	6683 4	0 659	9797 1
मेवा	3 000	173 5	3 633	148·1
शक्कर	1·605	468·6	1·323	535·9
तम्बाकू	11·625	273·2	12 605	301·0
मूँगफली (हरा)	1·964	787 5	1·973	842·4
कच्ची कपास	6·551	920 5	6·136	961·2

(i) यूरोपियन आर्थिक समुदाय द्वारा किये गये आयात सम्बन्धी 1967 का 1961 के आधार पर मूल्य सूचकांक (क) लैस्पियरिज सूत्र द्वारा (ख) पाशे सूत्र द्वारा, निम्न प्रकार ज्ञात कर सकते हैं।

(ii) फिशर के आदर्श सूत्र द्वारा मूल्य सूचकांक ज्ञात करके दिखाया गया है।

(iii) फिशर के आदर्श सूत्र द्वारा मूल्य सूचकांक की कालोत्क्रमण परीक्षा निम्न प्रकार की जाती है।

(iv) समान्तर माध्य भारित सूत्र द्वारा मूल्य सूचकांक निम्न प्रकार ज्ञात कर सकते हैं।

(i) सूत्र (15.7) द्वारा सूचकांक निम्न प्रकार ज्ञात कर सकते हैं। यहाँ पदार्थों की संख्या 10 है। अतः पहले निम्न संख्या का परिकलन किया।

$$\sum_{i=1}^{10} p_{1i}\, q_{0i} = (2.551 \times 152.5 + 1.013 \times 65.4 + \dots + 1.973 \times 787.5 + 6.136 \times 920.5)$$
$$= 21515.9781$$

$$\sum_{i=1}^{10} p_{0i}\, q_{0i} = (1.875 \times 152.5 + 0.902 \times 65.4 + \dots + 1.964 \times 787.5 + 6.551 \times 920.5)$$
$$= 20588.6932$$

अतः लैस्पियरिज सूत्र द्वारा सूचकांक,

$$P_{01} = \frac{21515.9781}{20588.6932} \times 100$$
$$= 104.50$$

पाशे—सूत्र (15.9) द्वारा सूचकांक ज्ञात करने के लिए निम्न संख्या का परिकलन किया।

$$\sum_{i=1}^{10} p_{1i}\, q_{1i} = (2.551 \times 532.7 + 1.031 \times 70.5 + \dots + 1.973 \times 842.4 + 6.136 \times 961.2)$$
$$= 24765.1078$$

और

$$\sum_{i=1}^{10} p_{0i}\, q_{1i} = (1.875 \times 532.7 + 0.902 \times 70.5 + \dots + 1.964 \times 842.4 + 6.551 \times 961.2)$$
$$= 23328.2840$$

$$P_{01} = \frac{23765.1078}{23328.2840}$$
$$= 106.15$$

सूत्र (15 12) द्वारा, सूचकांक

$$P_{01}=\sqrt{LP}$$
$$=\sqrt{104\ 50\times106\ 15}$$
$$=\sqrt{11092\ 6750}$$
$$=105\ 32$$

(iii) कालोत्क्रमण परीक्षा के लिए सूचकांक P_{10} को और ज्ञात करना होगा।

$$P_{10}=\sqrt{\frac{\sum_i p_{0i}\ q_{1i}}{\sum_i p_{1i}\ q_{1i}}\times\frac{\sum_i p_{0i}\ q_0}{\sum_i p_{1i}\ q_{0i}}}$$

$$=\sqrt{\frac{23328\ 2840}{24765\ 1878}\times\frac{20588\ 6932}{21515\ 9781}}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{106\ 15}\times\frac{1}{104\ 50}}$$

$$P_{10}\times P_{01}=\sqrt{\frac{106\ 15\times104\ 50}{106\ 15\times104\ 50}}$$
$$=1$$

टिप्पणी उपर्युक्त परिणामो मे एक विशेष बात सामने आती है कि L<P इसका कारण यह दिया जा सकता है कि आयात मे निर्यात की मात्रा मे वृद्धि अधिक हुई और वस्तुओं के मूल्यों मे कम वृद्धि हुई है। L>P का नियम मुख्यतया उपभोक्ता द्वारा ली गई मात्राओ के लिए लगभग सदैव सत्य रहता है।

(iv) सूत्र (15.18) के द्वारा समान्तर भार सकरित मूल्य सूचकांक ज्ञात कर सकते है। इस सूचकांक का निम्न सारणी बनाकर सुगमता से, परिकलन कर सकते है :—

$(q_{1i}+q_0)$	$p_{1i}\ (q_{1i}+q_{0i})$	$p_{0i}\ (q_{1i}+q_{0i})$
685 2	1747 9452	1284·7500
135 9	137 6667	122 5818
9510 5	7817 6310	7494 2740
692 1	1220 1723	973 0926
16480 5	10860 6495	9262 0410
321 6	1168 3728	964 8000
1004 5	1328 9535	1612 2225
574·2	7237·7910	6675 0750
1629 9	3215 7927	3201 1236
1881 7	11546 1112	12327 0167
योग	46281 0859	43916 9772

अतः मूल्य सूचकांक,

$$P_{01} = \frac{46281.0859}{43916.9772} \times 100$$

$$= 105.38$$

यह बात ध्यान देने योग्य है कि फिशर के आदर्श सूत्र तथा समान्तर ह्रास भारित सूत्र द्वारा मूल्य सूचकांक लगभग समान हैं।

उदाहरण 15.4 उत्तर प्रदेश में चावल व गेहूँ के उत्पादन तथा थोक भाव सम्बन्धी आँकड़े सन् 1953 और 1960 के लिए इस प्रकार हैं —

वर्ष	थोक भाव $(2.5 \times 10^8 \times p^*)$ प्रति दस लाख टन		उत्पादन (दस लाख टन)	
	चावल	गेहूँ	चावल	गेहूँ
1953	22.14	18.60	1.9	2.9
1960	20.47	16.12	2.5	3.3

$p^* \rightarrow$ सारणी में दिये हुए भाव को निरूपित करता है।

लेसपियरीज के सूत्र (15.8) द्वारा 1960 के लिए 1953 की अपेक्षा, मात्रा सूचकांक,

$$Q_{01} = \frac{2.5 \times 22.14 + 3.3 \times 18.60}{1.9 \times 22.14 + 2.9 \times 18.60} \times 100$$

$$= \frac{116.730}{96.006} \times 100 = 121.58$$

सूचकांक की रचना में त्रुटियाँ

मूल्यों के या मात्राओं के प्रति सूचकांक, जो कि द्विवर्णी पदार्थों पर आधारित हैं, की रचना करते समय प्रायः तीन प्रकार की त्रुटि होने की सम्भावना रहती है।

(1) सूत्र त्रुटि

किसी भी एक सूत्र को किन्हीं पदार्थों के लिए मूल्य या मात्रा सूचकांक ज्ञात करने के लिए सर्वोत्तम कहना कठिन है क्योंकि प्रत्येक सूत्र के दोष एवं गुण दोनों ही विद्यमान हैं। अतः एक उपयुक्त सूत्र का चयन, व्यास के स्वरूप, काल एवं सूचकांक के उद्देश्य को ध्यान में रख कर किया जाता है।

(2) प्रतिचयन-त्रुटि :

यदि सम्पूर्ण पदार्थों 'N' को सम्मिलित न करके, इनमें से केवल n पदार्थों का यादृच्छिक प्रतिदर्श लेकर, द्विवर्णी पदार्थों के द्वारा $P_{01}(n)$ या $Q_{01}(n)$ की रचना की जाती है तो इनके मान सम्पूर्ण पदार्थों (N) के लिए रचित सूचकांक $P_{01}(N)$ या $Q_{01}(N)$ से भिन्न होगा। अतः $P_{01}(n)$ व $P_{01}(N)$ में अन्तर को प्रतिचयन त्रुटि कहते हैं। इस त्रुटि का निर्धारित विधियों द्वारा आकलन कर सकते हैं।

(3) सजातीयता त्रुटि :

यह त्रुटि सूचकांक की रचना में $P_{01}(1)$ व $P_{01}(N)$ के अन्तर के समान होती है। जबकि $P_{01}(T)$ दिये हुए वर्ष (1) व आधार वर्ष (0) में विद्यमान सब पदार्थों के मूल्य तथा भारों द्वारा रचित सूचकांक हैं और $P_{01}(N)$ इस त्रुटि के मापन के लिए कोई द्विवर्णी N पदार्थों द्वारा रचित सूचकांक है। निश्चित सूत्र तो उपलब्ध नहीं है किन्तु फिर भी R परीक्षा द्वारा सजातीयता का परिमाण ज्ञात कर सकते हैं। सजातीयता-गुणांक 'R' के लिए निम्न सूत्र है —

$$R = \frac{\text{अद्वितीय पदार्थों की संख्या}}{\text{काल 1 व 0 में कुल पदार्थों की संख्या}}$$

$$= \frac{N_0 + N_1 - 2N_{01}}{N_0 + N_1} \qquad ....(15\ 21)$$

जबकि N_1 काल 1 (दिये हुए वर्ष) में और N_0, काल 0 (आधार वर्ष) में कुल पदार्थों की संख्या है।

यदि $R=0$ हो तो इसका अर्थ है कि पूर्ण सजातीयता है अर्थात् दोनों कालों में एक समान पदार्थ हैं। यदि $R=1$ हो तो इसका अर्थ है कि पूर्ण विजातीयता है अर्थात् जो पदार्थ काल 1 में है उनमें से कोई भी पदार्थ काल 0 में नहीं था या $N_{01}=0$ इस प्रकार R का परास 0 से 1 है या $0 \leq R \leq 1$ किसी सूचकांक की रचना के साथ-साथ R के मान का भी परिकलन करके सजातीयता का पता लगाया जा सकता है। R का मान जितना शून्य के निकट होता है उतनी ही सजातीयता अधिक मानी जाती है। सजातीयता अधिक होने की स्थिति में सूचकांक अधिक विश्वसनीय होता है। यह ध्यान रहे कि R केवल सूचक मात्र है।

उदाहरण 15 5 एक शहर में वर्ष 1960 में एक सर्वेक्षण द्वारा 40 आवश्यक वस्तुओं की दर तथा उपभोग की मात्रा सम्बन्धी आँकड़े एकत्र किये गये। 1970 में फिर एक सर्वेक्षण, 50 वस्तुओं की दर एवं उपभोग की मात्रा ज्ञात करने के हेतु, किया गया। इन दो वर्षों में केवल 30 वस्तुएँ वही थी जो व्यास की सजातीयता की परीक्षा निम्न प्रकार कर सकते हैं —

सूत्र (15 21) द्वारा R का मान ज्ञात किया,

यहाँ $N_0 = 40$, $N_1 = 50$, $N_{01} = 30$

$$R = \frac{40 + 50 - 60}{40 + 50}$$

$$= \frac{30}{90} = 1/3$$

R का मान लगभग 33 है अतः व्यास में उच्च क्रम की विजातीयता नहीं है।

शृंखला सूचकांक और इसका स्थिर आधार सूचकांक से सम्बन्ध :

इसमें पूर्व दी हुई विधियों द्वारा स्थिर आधार काल की अपेक्षा किसी अन्य वर्ष में घटित मूल्यों के स्तर में प्रतिशत परिवर्तन ज्ञात किया गया। इस प्रकार का सूचकांक अमेरिका में अधिक प्रचलित है। किन्तु शृंखला सूचकांक में, जिस काल से अन्य काल तक का सूचकांक ज्ञात करना हो तो किसी भी वर्ष के पिछले वर्ष को आधार मानते हैं और इस सूचकांक को पिछले वर्ष के सूचकांक से गुणा करके, दिये हुए वर्ष के लिए शृंखला सूचकांक ज्ञात हो जाता है। इस क्रिया में आधार वर्ष के अगले वर्ष से प्रारम्भ करके दिये हुए वर्ष तक प्रत्येक सूचकांक का परिकलन करना होता है।

माना कि आधार वर्ष को 0 और इसके बाद में आने वाले वर्षों को 1,2,3,......, k द्वारा निरूपित किया गया है तो वर्षों 1,2,3,........, k के लिए स्थिर आधार मूल्य सूचकांक $P_{01}, P_{02}, P_{03}, \ldots\ldots P_{0k}$ हैं। j वें वर्ष का मूल्य सूचकांक आधार 0 की अपेक्षा निम्न सूत्रों द्वारा दिया जा सकता है।

लैसपीयरेज़ सूत्र,

$$P_{0j}=\frac{\sum_i p_{ji}\, q_{0i}}{\sum_i p_{0i}\, q_{0i}} \qquad \ldots(15.22)$$

जहाँ $i=1,2,\ldots\ldots, n$

और $j=1,2,3,\ldots\ldots, k$

पाशे सूत्र,

$$P_{0j}=\frac{\sum_i p_{ji}\, q_{ji}}{\sum_i p_{0i}\, q_{ji}} \qquad \ldots(15.23)$$

जहाँ $i=1,2,\ldots\ldots, n$

और $j=1,2,3,\ldots\ldots, k$

किन्तु ऊपर दी हुई विधि के अनुसार लैसपीयरेज़ सूत्र द्वारा शृंखला सूचकांक निम्न प्रकार ज्ञात कर सकते हैं —

$$P_{01}=\frac{\sum_i p_{1i}\, q_{0i}}{\sum_i p_{0i}\, q_{0i}}$$ यह शृंखला सूचकांक भी प्रदान करती है।

$$P_{02}=\frac{\sum_i p_{2i}\, q_{1i}}{\sum_i p_{1i}\, q_{1i}}\times\frac{\sum_i p_{1i}\, q_{0i}}{\sum_i p_{0i}\, q_{0i}}$$

$$=P_{12}\cdot P_{01}$$

इसी प्रकार,

$$P_{03}=\frac{\sum_i p_{3i}\, q_{2i}}{\sum p_{2i}\, q_{2i}}\times\frac{\sum_i p_{2i}\cdot q_{1i}}{\sum p_{1i}\, q_{1i}}\times\frac{\sum_i p_{1i}\, q_{0i}}{\sum_i p_{0i}\, q_{0i}}$$

$$= P_{23} \cdot P_{12} \cdot P_{01}$$
$$= P_{23} \cdot P_{02}$$

और

$$P_{04} = P_{34} \cdot P_{23} \cdot P_{12} \cdot P_{01}$$
$$= P_{34} \cdot P_{03}$$

....

$$P_{0k} = P_{(k-1)\ k} \cdots\cdots P_{23} \cdot P_{12} \cdot P_{01} \qquad \ldots(15.24)$$
$$= P_{(k-1)\ k} \cdot P_{0(k-1)}$$

शृंखला सूचकांक का एक लाभ यह है कि यदि किसी बीच के वर्ष का पिछले वर्ष की अपेक्षा सूचकांक ज्ञात करना हो तो अगले वर्ष के सूचकांक को पिछले वर्ष के सूचकांक से भाग करके ज्ञात कर सकते हैं, जैसे—

$$P_{34} = \frac{P_{04}}{P_{03}}$$

यदि शृंखला मूल्य सूचकांक में प्रत्येक वर्ष के लिए पिछले वर्ष की अपेक्षा सूचकांक ज्ञात करने में निश्चित q का प्रयोग करें तो शृंखला आधार और स्थिर आधार मूल्य सूचकांक में कोई अन्तर नहीं रहता है।

उदाहरणार्थ,

मूल्य सूचकांक	स्थिर आधार सूचकांक	निश्चित मात्रा शृंखला सूचकांक
P_{01}	$\frac{\sum_i p_{1i}\, q_{0i}}{\sum_i p_{0i}\, q_{0i}}$	$\frac{\sum_i p_{1i}\, q_{0i}}{\sum_i p_{0i}\, q_{0i}} = P_{01}$
P_{02}	$\frac{\sum_i p_{2i}\, q_i}{\sum_i p_{0i}\, q_i}$	$\frac{\sum_i p_{2i}\, q_i}{\sum_i p_{1i}\, q_i} \times \frac{\sum_i p_{1i}\, q_i}{\sum_i p_{0i}\, q_i} = \frac{\sum_i p_{2i}\, q_i}{\sum_i p_{0i}\, q_i} = P_{02}$
P_{03}	$\frac{\sum_i p_{3i}\, q_i}{\sum_i p_{0i}\, q_i}$	$\frac{\sum_i p_{3i}\, q_i}{\sum_i p_{2i}\, q_i} \times \frac{\sum_i p_{2i}\, q_i}{\sum_i p_{1i}\, q_i} \times \frac{\sum_i p_{1i}\, q_i}{\sum_i p_{0i}\, q_i} = \frac{\sum_i p_{3i}\, q_i}{\sum_i p_{0i}\, q_i} = P_{03}$

इसी प्रकार अन्य किसी भी वर्ष के लिए समान भार प्रयोग करने की स्थिति में स्थिर आधार व शृंखला मूल्य सूचकांक की समानता को सिद्ध कर सकते हैं।

शृंखला आधार सूचकांक, पाशे सूत्र के लिए भी ऊपर की भाँति व्युत्पन्न किये जा सकते हैं।

टिप्पणी मात्रा शृंखला सूचकांक के लिए सभी सूत्र, उपर्युक्त सूत्रों में p को q से और q को p से बदल कर ज्ञात किये जा सकते हैं।

स्थिर आधार व शृंखला मूल्य सूचकांक के गुण एवं दोष

स्थिर आधार सूचकांक का परिकलन सरल है तथा इनका निर्वचन भी स्पष्टत किया जा सकता है किन्तु शृंखला सूचकांक की दशा में ऐसा करना सम्भव नहीं है। उपर्युक्त सूत्रों द्वारा स्पष्ट है कि शृंखला सूचकांक की रचना में आधार वर्ष से लेकर अन्त के वर्ष तक, केवल अन्त के वर्ष में पदार्थों की मात्राओं को छोड़कर सभी ज्ञात का प्रयोग हो जाता है जबकि स्थिर आधार सूचकांक में दिये हुए वर्ष व आधार वर्ष के बीच के काल में होने वाले परिवर्तनों से कोई सम्बन्ध नहीं रहता है। मध्य काल में घटित परिवर्तनों को व्यावहारिक दृष्टि से सम्मिलित करना प्राय: आवश्यक प्रतीत होता है।

यदि आधार वर्ष तथा दिये हुए वर्ष में अन्तर अधिक हो तो इन दो वर्षों में उभयनिष्ठ पदार्थों की संख्या बहुत कम हो जाती है अर्थात् R लगभग 1 के समान हो जाता है। इस स्थिति में स्थिर आधार सूचकांक विश्वसनीय नहीं होता है। सारांश में यह कह सकते हैं कि P_{02} या इसके बाद के वर्षों के लिए सूचकांक की अपेक्षा P_{01} अधिक परिशुद्ध है। इसी प्रकार P_{03} या P_{0k} $(K>3)$ की अपेक्षा P_{02} अधिक परिशुद्ध सूचकांक है।

शृंखला सूचकांक का एक मुख्य दोष यह बताया जाता है कि इसमें संचयी त्रुटि होती है। इस बात को महत्व नहीं दिया जा सकता है जब तक यह सिद्ध न हो जाये कि स्थिर आधार सूचकांक शुद्ध है। इसका अनुमान, D व R के मान ज्ञात करके, लगाया जा सकता है। यदि D व R के मान स्थिर आधार सूचकांक की अशुद्धता को सूचित करते हों तो ऐसी स्थिति में शृंखला सूचकांक, स्थिर आधार सूचकांक से उत्तम है।

उदाहरण 15.5 : सीलोन में 1950 से 1955 तक राशन के चावल व गेहूँ के आटे का बटन, भाव एवं मात्रा के अनुसार, निम्न सारणी में दिया गया है :—

वर्ष	चावल		गेहूँ का आटा	
	प्रति व्यक्ति वार्षिक मात्रा (किलोग्राम में)	बिक्री की दर (रु० प्रति किलो०)	प्रति व्यक्ति वार्षिक मात्रा (किलोग्राम में)	बिक्री की दर (रु० प्रति किलो०)
1	2	3	4	5
1950	57 9	0 34	21 8	0·54
1951	50 5	0 25	25 4	0·46
1952	54 2	0 25	28 9	0 46
1953	57·7	0 42	32·5	0 46
1954	66 9	0 55	26 6	0 46
1955	94 3	0 44	23 1	0 46

वर्ष 1950 को आधार मानकर, 1955 के लिए शृंखला मूल्य सूचकांक, लेसपियरिज सूत्र (15 7) का प्रयोग करके, निम्न प्रकार ज्ञात कर सकते हैं :—

$$P_{01} = \frac{57\ 9 \times 25 + 21\ 8 \times 46}{57\ 9 \times 34 + 21\ 8 \times 54} = \frac{24\ 503}{31\ 458}$$

$$= \cdot 779$$

$$P_{12} = \frac{50\ 5 \times 25 + 25\ 4 \times 46}{50\ 5 \times 25 + 25\ 4 \times 46} = 1\ 000$$

इसी प्रकार,

$$P_{23} = \frac{36\ 058}{26\ 844} = 1\ 343$$

$$P_{34} = \frac{46\ 685}{39\ 184} = 1\ 19$$

$$P_{45} = \frac{41 \cdot 672}{49\ 031} = 0\ 850$$

शृंखला आधार विधि द्वारा मूल्य सूचकांक सूत्र (15 24) का प्रयोग करने पर निम्न है —

$$P_{05} = P_{45} \times P_{34} \times P_{23} \times P_{12} \times P_{01} \times 100$$

$$= 105\ 91$$

टिप्पणी उपर्युक्त उदाहरण म केवल दो पदार्थों को ही लिया गया है। यदि अनेक पदार्थों को लिया गया हो तो उनके लिए भी इसी प्रकार सूचकांक का परिकलन किया जा सकता है अंश व हर में संख्या दो पदार्थों पर आधारित न होकर, जो भी पदार्थ हो उन सब के लिए परिकलित कर ली जाती है।

सूचकांक रचना में सावधानियाँ

(1) मूल्य या मात्रा सूचकांक की रचना के उद्देश्य का स्पष्ट वर्णन दिया जाना चाहिये क्योंकि इनके आधार पर कई अन्य निर्णय लिए जाते हैं। यदि राष्ट्रीय नीति (policy), मूल्यों या उत्पादन के प्रति सूचकांक पर, निर्भर है तो इनकी रचना में सतर्कता एव शुद्धि अत्यन्त आवश्यक है।

(2) पदार्थों की संख्या के विषय म निर्णय, सूचकांक ज्ञात करने के उद्देश्य के अनुसार सावधानी से करना चाहिये। जैसे यदि निर्वाह-व्यय (cost of living) के हेतु सूचकांक ज्ञात करना है तो केवल उन वस्तुओं को सम्मिलित करना चाहिये जिनका प्रयोग या उपभोग अधिकांश जन समुदाय करता है। इन वस्तुओं के मूल्य सम्बन्धी आँकडे केवल फुटकर भाव (retail price) पर आधारित होने चाहिये क्योंकि फुटकर भावों म परिवर्तन,

थोक भावों की अपेक्षा अधिक और शीघ्र होता है। वस्त्रों के भावों को लेते समय विशेष ध्यान देना चाहिये क्योंकि ये कपड़े के गुण (प्रकार) पर आधारित होते हैं। यदि कपड़े के भाव व गुण समानता से बढ़ें तो इस प्रकार से भावों में परिवर्तन नहीं कहा जा सकता है। अतः सूचकांक में सम्मिलित किये जाने वाले पदार्थों की सूची बहुत विचार कर बनानी चाहिये।

(3) पदार्थों के मूल्यों को भारित करना अत्यन्त आवश्यक है जिससे प्रत्येक पदार्थ का सूचकांक पर प्रभाव उनके महत्व के अनुसार ही पड़े। यही कारण है कि लगभग सदैव भारों का प्रयोग किया जाता है। अतः व्यवहार में मूल्य सूचकांक ज्ञात करने के लिए बेची गई वस्तुओं की मात्रा को भार के रूप में प्रयोग करते हैं और मात्रा सम्बन्धी सूचकांक की रचना में पदार्थों के मूल्यों को भार के रूप में प्रयोग करते हैं। इसका वर्णन सूत्रों में भार के प्रयोग के साथ स्पष्ट किया गया है।

(4) निर्धारित पदार्थों के मूल्य तथा उपभोग सम्बन्धी आँकड़ों का संचय करना एक कठिन कार्य है। फिर भी एक उचित प्रतिदर्श का चयन करके दक्ष व्यक्तियों द्वारा आँकड़े पर्याप्त विश्वसनीय प्राप्त किये जा सकते हैं। इस प्रकार के आँकड़े स्पष्टतया विक्रेता या उपभोक्ता के द्वारा ज्ञात करना कठिन होने के कारण सरकार प्रायः सूचकांक थोक भाव या उत्पादक द्वारा प्राप्त भावों के आधार पर ज्ञात करती है। ये सूचकांक अधिक शुद्ध होते हैं।

(5) आधार काल का निर्णय करना भी एक कठिन समस्या है। परिभाषा के अनुसार, आधार वर्ष वही होना चाहिये जिसकी तुलना में सूचकांक ज्ञात करना है फिर भी यह ध्यान रखना चाहिये कि आधार वर्ष कोई असाधारण वर्ष न हो जैसे युद्ध के वर्ष या देश में भूकम्प या बाढ़ आदि अधिक आई हो तो ऐसे वर्ष को आधार नहीं मानना चाहिये।

(6) उपर्युक्त बातों को ध्यान में रखते हुए इस अध्याय में दिये गये सूत्रों में से उचित सूत्र का चयन करना होता है। इसके लिए कोई नियम बनाना तो असम्भव प्रतीत होता है। उचित सूत्र का चयन सूचकांक ज्ञात करने के उद्देश्य एवं सर्वथा व्यक्ति के अनुभव और ज्ञान पर निर्भर है।

मुख्य टिप्पणी

यह आवश्यक नहीं है कि काल का अन्तर केवल वर्षों में ही हो। सूचकांक प्रति मास या प्रति सप्ताह मूल्यों या मात्राओं में परिवर्तन के हेतु भी ज्ञात किये जाते हैं। ऐसी स्थिति में काल का मास या सप्ताह के रूप में प्रयोग करना होता है।

अन्त में यह भी कह सकते हैं कि किसी भी परिपूर्ण (perfect) सूचकांक का ज्ञान नहीं किया जा सका है। अतः दिन प्रति दिन अनुसंधान द्वारा नये-नये सूत्रों की उत्पत्ति होती रहती है और विषय का क्षेत्र विकसित होता रहता है।

प्रश्नावली

1. सूचकांक से आप क्या समझते हैं, स्पष्ट शब्दों में लिखिए। यह भी बताइए कि इसकी उपयोगिता क्या है ?
2. एक सूचकांक, एक प्रकार का औसत है, इस विचार की तथ्यों के आधार पर पुष्टि कीजिये।
3. एक सूचकांक के लिए दी गई तीन परीक्षाओं का वर्णन कीजिये और इनकी तुलना भी कीजिये।
4. किसी सूचकांक के लिए आधार काल का चयन करते समय किन किन बातों का ध्यान रखना चाहिए।
5. 'लेसपियरिज सूत्र द्वारा अधिक आकलन और पाशे सूत्र द्वारा न्यून आकलन होता है।' इस कथन की पुष्टि कीजिये।
6. गुणोत्तर ह्रास सूचकांक को फिशर का आदर्श सूत्र क्यों कहते हैं ? इसके कारण बताइए।
7. निम्न के लिए सूचकांक का उपयोग बताइए :—
   (1) व्यापारिक स्थिति के विश्लेषण मे, (2) धार्मिक क्रिया के सूचक में, (3) वास्तविक वेतन मान का परिकलन करने में।

   (आई० ए० एस० 1964)
8. निम्न आँकड़ों के आधार पर लेसपियरिज, पाशे और फिशर के आदर्श सूत्र द्वारा, सूचकांक ज्ञात कीजिये —

		गेहूँ	चावल	मक्का
मात्रा	1959	15	5	10
	1964	12	4	5
मूल्य (रु०)	1959	15	20	4
	1964	22	27	7

(बी० काम० मैसूर 1967)

[उत्तर : तीनो सूत्रों द्वारा एक ही उत्तर है
P_{01} = 146 6]

9. निर्वाह व्यय सम्बन्धी सूचकांक की रचना मे निम्न समूह सूचकांक प्राप्त हुए। निर्वाह व्यय सूचकांक द्वारा ज्ञात कीजिये, जब कि
   (1) भारित समान्तर माध्य, (2) गुणोत्तर भारित माध्य, का प्रयोग किया गया हो।

	समूह	सूचकांक	भार
1	खाद्य	350	5
2	ईंधन और बिजली	200	1
3.	कपड़े	240	1
4.	मकान किराया	160	1
5.	अन्य	250	2

(बी० काम०, बम्बई, 1968)

[उत्तर . भारित समान्तर माध्य सूचकांक
=285
भारित गुणोत्तर माध्य सूचकांक
=275 4]

10 निम्न सारणी द्वारा 1960 को आधार मानकर, वर्षों 1961, 1962, 1963, के लिए शृंखला आधार विधि द्वारा सूचकांक ज्ञात कीजिये :—

वर्ष	1960	1961	1962	1963
शृंखलिक सूचकांक	100	110	95·5	109 5

(आई० सी० डब्लू० ए० 1969)

[उत्तर : शृंखला सूचकांक
1961=110, 1962=105 05, 1963=115 03]

□ □ □

16 काल-श्रेणी विश्लेषण

काल अन्तर के साथ विभिन्न परिवर्तन होना स्वाभाविक या प्राकृतिक है। किसी न्यास के विश्लेषण माप अध्याय 4 में दिये जा चुके हैं। किन्तु इस अध्याय में यह अध्ययन करेंगे कि काल अन्तर के साथ-साथ न्यास में किस प्रकार का परिवर्तन हो रहा है। इस प्रकार के अध्ययन अधिकतर अर्थशास्त्र में उत्पादन, उपभोग, व्यापार में बिक्री की स्थिति या मूल्यों में उतार-चढ़ाव आदि के लिए काल अन्तर के अनुसार उपनति (trend) जानने के हेतु किये जाते हैं। इस प्रकार की जानकारी अत्यन्त उपयोगी है क्योंकि इससे भूत में हुए या वर्तमान में विद्यमान परिवर्तनों के साथ साथ भविष्य में होने वाले परिवर्तनों का भी अनुमान लगाया जाता है। इस जानकारी का व्यापारी या उत्पादक पूरा-पूरा लाभ उठा सकते हैं। जैसे यदि उत्पादित वस्तुओं की मांग लगातार बढ़ रही है तो उत्पादक अपनी फैक्ट्री की उत्पादन क्षमता बढ़ाने के हेतु साधन जुटा सकते हैं। ये साधन हैं, अधिक धन का इकट्ठा करना, इनके लिए प्रशिक्षित व्यक्तियों को तैयार करना या कच्चे माल का प्रबन्ध करना इत्यादि। यदि उत्पादित वस्तु की मांग घट रही हो तो आने वाली स्थिति के लिए उपाय किये जा सकते हैं अतः काल श्रेणी विश्लेषण अर्थशास्त्र में एक महत्वपूर्ण विषय है।

काल-श्रेणी की परिभाषा

घटित समय के अनुसार क्रम में व्यवस्थित परिमाणात्मक न्यास को काल श्रेणी कहते हैं।

यह न्यास प्रति दिन, साप्ताहिक, मासिक, या वार्षिक आदि अभिलेख पर आधारित होता है। काल श्रेणी पर अनेक कारकों (Factors) का प्रभाव पड़ता है। कुछ प्रभाव नियमित प्रकार के और कुछ प्रभाव अनियमित प्रकार के या आकस्मिक होते हैं। किसी भी न्यास को विभाजित करके प्रभावी कारकों के पृथक्-पृथक् अध्ययन व इन सबके सम्मिलित प्रभाव के विश्लेषण को काल श्रेणी विश्लेषण कहते हैं।

काल-श्रेणी में विद्यमान परिवर्तनों को चार प्रमुख वर्गों में विभाजित कर सकते हैं जो कि इस प्रकार हैं —

(1) दीर्घ कालिक उपनति (Secular Trend),
(2) ऋतुनिष्ठ विचरण (Seasonal variations),
(3) चक्रीय विचरण (Cyclical variations),
(4) अनियमित विचरण (Irregular variations)

इन्ही चार परिवर्तन-वर्गों का वर्णन इस अध्याय में दिया गया है।

(1) दीर्घकालिक उपनति

निरन्तर परिवर्तन जो कि एक लम्बे समय तक होता रहे, दीर्घकालिक परिवर्तन कहा जाता है। यह एक काल-श्रेणी में लम्बे समय तक होने वाली सतत वृद्धि, अपवृद्धि या

निश्चेष्ट स्थिति का सूचक है। काल-श्रेणी विश्लेषण द्वारा या तो दीर्घकालीन उपनति की मात्रा का माप करते हैं या व्यास से इस प्रभाव का निरसन करते हैं। दीर्घकालीन उपनति एक घात (रेखीय) या नैकघाती (Non-Linear) हो सकती है। रेखीय उपनति का समझना सरल है अतः रेखीय उपनति मापने की विधियों का वर्णन पहले दिया गया है। यह ज्ञात है कि किसी भी सरल रेखा का समीकरण

$$Y=a+bX$$

के रूप में दिया जा सकता है। इसी समीकरण का प्रयोग निम्न विधियों में आवश्यकता पड़ने पर किया गया है।

रेखनी या धागे से

यदि ग्राफ पेपर पर आलेखित बिन्दु स्पष्ट उपनति को बताते हों तो हाथ से ही उपनति रेखा को खींच सकते हैं किन्तु ऐसी स्थिति कम ही होती है। इस कार्य के लिए व्यक्ति अनुभवी होना चाहिये। व्यवहार में पारदर्शक रेखनी की सहायता से उपनति रेखा खींची जाती है जिसकी विधि इस प्रकार है।

एक ग्राफ-पेपर पर बिन्दुओं का आलेख करके इन बिन्दुओं को काल के क्रम में मिला दो। फिर पारदर्शक रेखनी को धीरे-धीरे पेपर पर इतना सरकाओ कि उसके ऊपर का किनारा आलेखित व्यास को लगभग दो समान भागों में विभाजित कर दे। इस किनारे पर रेखा खींच दो। यही रेखा उपनति रेखा होती है। इस रेखा द्वारा प्रारम्भ, मध्य या अन्त या अन्य काल के लिए मान ज्ञात कर सकते हैं।

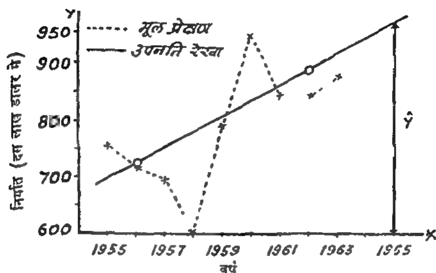
रेखनी के स्थान पर धागा भी प्रयोग कर सकते हैं। क्योंकि इसके दोनों ओर का क्षेत्र भी स्पष्ट दिखाई देता रहता है। किन्तु धागा मुलायम होने के कारण ठीक स्थिति में रोकना कठिन है। अतः धागे की अपेक्षा रेखनी का प्रयोग करना अधिक उपयुक्त है। इस विधि का मुख्य दोष यह है कि प्रत्येक व्यक्ति अपनी इच्छा के अनुसार रेखा खींच सकता है और उसके द्वारा प्राप्त उसी वर्ष के लिए आकलक का मान भी भिन्न हो सकता है।

उदाहरण 16.1 : मलाया (Malaya) द्वारा किये गये निर्यात सम्बन्धी आँकड़े 1955 से 1963 तक निम्न सारणी में दिये गये हैं :—

वर्ष	1955	1956	1957	1958	
कुल निर्यात (दस लाख, डालरों में)	755	722	697	704	
वर्ष	1959	1960	1961	1962	1963
कुल निर्यात (दस लाख, डालरों में)	792	947	842	840	877

मलाया द्वारा किये निर्यात के लिए उपनति रेखा, पारदर्शक रेखनी की सहायता से निम्न प्रकार खींच सकते हैं। उपनति रेखा द्वारा वर्ष 1965 के लिए निर्यात की प्रागुक्ति

भी की गई है। इन बिन्दुओं को ग्राफ पर आलेखित कर, रेखनी द्वारा उपनति रेखा खींच दी जैसा कि चित्र 16–1 में दिखाया गया है। 1965 में प्राक्कलित निर्यात $\hat{Y}=962$ दस लाख डालर



चित्र 16–1 रेखनी द्वारा समंजित उपनति रेखा

अर्ध-माध्य विधि

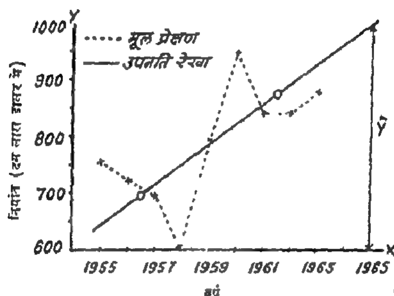
इस विधि के अन्तर्गत न्यास के प्रारम्भ के आधे प्रेक्षणों व अन्त के आधे प्रेक्षणों के माध्य ज्ञात कर लिए जाते हैं और इन माध्य मानों को प्रारम्भ के आधे वर्षों के मध्य में व अन्त के आधे वर्षों के मध्य में क्रमशः रख दिया जाता है। इन दो बिन्दुओं को ग्राफ पर आलेखित करके मिला देने पर उपनति रेखा ज्ञात हो जाती है। यदि न्यास में उतार व चढ़ाव अधिक न हो तो इस विधि द्वारा पर्याप्त सतोषजनक परिणाम प्राप्त होते हैं।

उदाहरण 16.2. अर्ध-माध्य विधि द्वारा उदाहरण 16.1 में दिए गए न्यास के लिए उपनति रेखा निम्न प्रकार ज्ञात कर सकते हैं और इस रेखा द्वारा 1965 के लिए प्रागुक्ति की गई है।

वर्ष	कुल निर्यात (दस लाख डालर में)	माध्य मान
1955	755	
1956	722	694.5
1957	697	
1958	604	
1959	792	
1960	947	
1961	842	876·5
1962	840	
1963	877	

इस उदाहरण में वर्षों की संख्या 9 है। अतः बीच के वर्ष 1959 को न प्रारम्भिक आधे वर्षों में और न अन्तिम आधे वर्षों में सम्मिलित किया गया है। साथ ही माध्य मानों को 1956 व 1957 और 1961 व 1962 के मध्य में रखता गया है। इन बिन्दुओं को आलेखित करके मिलाने पर उपनति रेखा को चित्र 16.2 में प्रदर्शित किया गया है।

वर्ष 1965 के लिए आकलित मान $\hat{Y}=1000$ दस लाख डालर



चित्र 16–2 अर्ध-माध्य विधि द्वारा समंजित उपनति रेखा

माध्य विधि

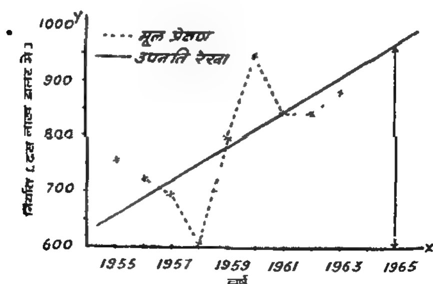
इस विधि में प्रारम्भ तथा अन्त के आधे वर्षों के माध्य ज्ञात न करके, प्रथम तीन व अन्तिम तीन वर्षों (मानों) के माध्य पृथक्-पृथक् ज्ञात कर लिए जाते हैं और इन माध्य मानों के तीन वर्षों के मध्य के वर्ष के सम्मुख क्रमशः रख दिया जाता है। इस प्रकार दो बिन्दु ज्ञात हो जाते हैं। यदि चाहें तो प्रारम्भ व अन्त में तीन-तीन वर्ष न लेकर, वर्षों की कोई अन्य संख्या भी ले सकते हैं। किन्तु प्रारम्भ व अन्त के वर्षों की विषम संख्या लेना अधिक सुविधाजनक है क्योंकि इन वर्षों के माध्य का वर्ष लेना सुगम है। इन दो बिन्दुओं को ग्राफ पर आलेखित करके मिला देने पर उपनति रेखा प्राप्त हो जाती है।

उदाहरण 16.3 . माध्य विधि द्वारा उदाहरण 16.1 में दिये न्यास के लिए उपनति रेखा तथा 1965 के लिए प्रागुक्ति निम्न प्रकार कर सकते हैं :—

वर्ष	कुल निर्यात (दस लाख डालर में)	माध्य मान
1955	755	
1956	722	724 7
1957	697	
1958	604	
1959	792	
1960	947	
1961	942	
1962	840	886 3
1963	877	

वर्ष 1956 व 1962 के तदनुसार मानों को आलेखित करके मिला देने पर प्राप्त उपनति रेखा चित्र (16–3) में दिखाई गई है।

1965 के लिए आकलित मान $\hat{Y}=933$ दस लाख डालर



चित्र 16–3 माध्य विधि द्वारा समंजित उपनति रेखा

गतिमान माध्य विधि

गतिमान माध्य विधि को जानने से पूर्व गतिमान माध्य की परिभाषा जानना आवश्यक है जो कि इस प्रकार है। किसी चर का गतिमान माध्य, कालों (units of time) की एक निर्धारित संख्या के समान्तर माध्यों की श्रेणी है।

जैसे-जैसे समय बीतता जाता है, निर्धारित कालों की संख्या में से प्रारम्भ के एक काल के मान को छोड़ दिया जाता है और अनुवर्ती (succeeding) काल के मान को इसमें सम्मिलित करके समान्तर माध्य परिकलित कर लिया जाता है। इस प्रकार प्राप्त क्रमिक समान्तर माध्यों की श्रेणी ही गतिमान माध्य (moving average) कहलाती है।

अब मुख्य समस्या यह है कि कितने कालों को गतिमान माध्य ज्ञात करने के लिए लिया जाये जिससे कि उपनति रेखा लगभग सरल हो। सैद्धान्तिक दृष्टि से यह कहा जा सकता है कि कालों की कम से कम संख्या जिस पर साथ लेकर गतिमान माध्य विधि द्वारा सरल रेखा प्राप्त हो, सर्वोत्तम है। इस संख्या को जानने के लिए अल्पकालिक उतार-चढ़ाव (short time fluctuations) का विस्तारपूर्वक अध्ययन करना चाहिये। इन उतार-चढ़ाव का पता प्रायः ग्राफ बनाकर कर लिया जाता है। यह कालों की संख्या प्रायः एक या एक से अधिक व्यवसाय चक्रों के समान होती है। इस प्रकार कालों की संख्या का निश्चय करने के पश्चात् गतिमान माध्य विधि निम्न प्रकार है —

इस विधि का प्रयोग करने का उद्देश्य अल्पकालीन उतार-चढ़ाव का निरसन करना है। इस विधि का प्रयोग रेखीय तथा वक्र रेखीय उपनति के समंजन के हेतु किया जाता है। इस विधि द्वारा उपनति रेखा ज्ञात करने के लिए निश्चित वर्षों (कालों) की संख्या का माध्य ज्ञात कर लिया जाता है और इस माध्य मान का इन लिए गये वर्षों के मध्य वर्ष के सम्मुख रख दिया जाता है। इसके पश्चात् प्रारम्भ के एक वर्ष के मान को छोड़ दिया जाता है और इन वर्षों के अगले वर्ष को सम्मिलित करके फिर इन वर्षों के लिए दिये *मानों का माध्य ज्ञात कर लिया जाता है और इन वर्षों के मध्य वर्ष के सम्मुख इस मान को रख दिया जाता है। यही क्रम चलता रहता है जब तक कि श्रेणी का अन्तिम वर्ष (काल) सम्मिलित न हो जावे। वर्षों को भुजा अक्ष पर और इन वर्षों के तदनुसार माध्य मानों को कोटि अक्ष पर लेकर सब बिन्दुओं को ग्राफ पेपर पर आलेखित करके मिला देने पर, समंजित उपनति रेखा या वक्र प्राप्त हो जाता है।*

टिप्पणी : (वर्षों के अतिरिक्त काल की इकाई कोई अन्य भी हो सकती है)। प्रायः वर्षों की विषम संख्या लेना सुविधाजनक है क्योंकि माध्य का वर्ष स्पष्ट ज्ञात हो जाता है।

गतिमान माध्य विधि के गुण तथा दोष

इस विधि का मुख्य गुण यह है कि इसमें वर्षों के चरम मानों का प्रभाव पर्याप्त कम हो जाता है।

किन्तु इस विधि में अनेक दोष भी हैं जो निम्न प्रकार हैं —

(1) एक मुख्य दोष यह है कि प्रारम्भ व अन्त के कुछ वर्षों के लिए माध्य आलेखित *चित्र में सम्मिलित नहीं होते हैं, अतः यह विधि वर्तमान समय के हेतु विश्लेषण या उपनति मानों के बहिर्वेशन (Projections) के लिए उपयुक्त नहीं है।*

(2) इसमें अवगुण यह है कि व्यवसाय चक्र निश्चित नहीं होता है। अतः एक चक्र में वर्षों को सदैव समान संख्या मानना भी तर्क संगत नहीं है।

(3) यदि एक चक्र में अधिक वर्ष सम्मिलित हों तो प्रारम्भ व अन्त के अनेक वर्षों के लिए बिन्दु सम्मिलित नहीं होते हैं।

(4) यदि श्रेणी में उतार-चढ़ाव अनियमित हों तो इस विधि द्वारा चक्रीय विचरण का भी निरसन नहीं होता है।

यदि न्यास को देखने व अन्य सूचना के आधार पर उपर्युक्त दोष प्रतीत नहीं होते हों तो गतिमान माध्य विधि द्वारा एक उत्तम उपनति रेखा या वक्र प्राप्त होता है।

यदि गतिमान माध्य विधि सम वर्षों के माध्य पर आधारित हो तो इस माध्य को किस वर्ष के सम्मुख रखा जाये यह समस्या उत्पन्न होती है क्योंकि यह गतिमान माध्य *एक मध्य वर्ष के सम्मुख न आकर दो वर्षों के मध्य में आता है। अतः इन माध्यों को दो* वर्षों के बीच के स्थान पर रख दिया जाता है। फिर इन माध्यों के जोड़े बनाकर, उनका माध्य परिकलित करते है। यह माध्य दिये गये वर्षों में से एक के सम्मुख आ जाता है। *इस प्रकार प्राप्त वर्ष तथा गतिमान माध्य के अनुसार बिन्दुओं को आलेखित करके उपनति* रेखा ज्ञात हो जाती है। यहाँ इस विधि के प्रयोग के लिए दो उदाहरणों, एक में वर्षों की संख्या विषम लेकर और दूसरे में वर्षों की संख्या सम लेकर, को दिया गया है :—

उदाहरण 16.4 1951 से 1961 तक उत्तर प्रदेश में हुई चावल की माध्य उपज (क्वीटल प्रति हैक्टर) निम्न सारणी में दी गई है। 3 वर्ष के गतिमान माध्य विधि द्वारा उपनति निम्न प्रकार ज्ञात कर सकते हैं —

वर्ष	चावल की माध्य उपज (क्वीटल प्रति हैक्टर)	तीन वर्षीय गतिमान माध्य
1951	5 43	—
1952	4 51	5·14
1953	5 47	5·54
1954	6 65	6·05
1955	6 04	6·70
1956	7·40	6·61
1957	6·40	6 73
1958	6 38	6 91
1959	7·96	6·90
1960	6·33	7·49
1961	8·18	—

तीन वर्षों के गतिमान माध्यों को निम्न प्रकार परिकलित करके तीन वर्षों के मध्य वर्ष के सम्मुख रख दिया गया है।

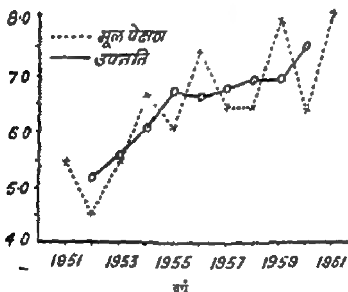
पहला गतिमान माध्य $=\frac{1}{3}(5.43+4.51+5.47)=5.14$

माध्य 5.14 को वर्ष 1952 के सम्मुख रखा गया है।

दूसरा गतिमान माध्य $=\frac{1}{3}(4.51+5.47+6.65)$

$=5.54$

माध्य 5.54 को वर्ष 1953 के सम्मुख रख दिया। इसी प्रकार अन्य गतिमान माध्यों को परिकलित करके तदनुसार मध्य वर्षों के सम्मुख रख दिया गया है। वर्षों को भुजा अक्ष पर और गतिमान माध्यों को कोटि अक्ष पर लेकर, बिन्दुओं को आलेखित करके मिला देने पर उपनति ज्ञात हो जाती है जैसा कि चित्र (16-4) में दिखाया गया है।



चित्र 16-4 गतिमान माध्य विधि द्वारा प्राप्त उपनति रेखा का निरूपण

उदाहरण 16.5 रहमानखेड़ा जिला लखनऊ द्वारा प्रस्तुत अभिलेख के अनुसार 1951 से 1960 तक प्रत्येक वर्ष में वर्षा होने वाले दिनों की संख्या निम्न प्रकार है :—

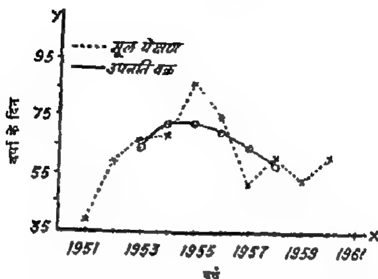
वर्ष	1951	1952	1953	1954	1955
कुल वर्षा के दिन	39	59	67	68	87
वर्ष	1956	1957	1958	1959	1960
कुल वर्षा के दिन	75	51	61	53	61

इस न्यास के लिए उपनति रेखा या वक्र का गतिमान माध्य विधि द्वारा समजन इस प्रकार कर सकते हैं।

1955 में वर्षा के दिनो की संख्या अत्यधिक बढ जाती है। अतः प्रथम चार वर्षों को लेकर गतिमान माध्य ज्ञात किये गये हैं और इनको दूसरे व तीसरे वर्ष के मध्य के सम्मुख रखा गया है।

वर्ष	वर्षा के दिन	चार वर्षों के गतिमान माध्य	युग्म माध्यों के माध्य (केन्द्रित माध्य)
1951	39		
1952	59		
		58 25	
1953	67		64·25
		70·25	
1954	68		72·25
		74·25	
1955	87		72·25
		70·25	
1956	75		69·38
		68·50	
1957	51		64·25
		60 00	
1958	61		58·25
		56·50	
1959	53		
1960	61		

अन्तिम स्तम्भ मे दिये माध्यों व तदनुसार वर्षों को आलेखित करके उपनति आलेख ज्ञात हो जाता है जैसा कि चित्र (16–5) में दिया गया है।



चित्र 16-5 गतिमान माध्य द्वारा समंजित वक्र का प्रदर्शन

दीर्घ कालिक उपनति का न्यूनतम वर्ग विधि द्वारा समंजन

उपर्युक्त दी हुई सभी विधियों द्वारा पूर्णतया परिशुद्ध उपनति रेखा या वक्र का समंजन नहीं होता है। इसका कारण यह है कि प्रत्येक विधि में कुछ दोष विद्यमान हैं। अतः गणितीय सिद्धान्त पर आधारित न्यूनतम वर्ग-विधि सर्वोत्तम है। इस विधि का प्रयोग करने से पूर्व रेखा या वक्र के रूप का निर्णय तो अनुसंधान कर्ता को ही करना होता है। वक्र या रेखा का रूप निश्चित करने के पश्चात् रेखा या वक्र समीकरण का समंजन न्यूनतम वर्ग विधि द्वारा अति उत्तम है। इस विधि का सैद्धान्तिक वर्णन समाश्रयण नामक अध्याय 11 में दिया गया है। यहाँ केवल समंजन करने की क्रिया विधि का विवरण दिया गया है जो कि समाश्रयण से कुछ भिन्न है। उपनति रेखा के समंजन को इस प्रकार समझ सकते हैं।

प्राप्त न्यास का आलेखन करने के पश्चात् अनेकों रेखाओं का समंजन किया जा सकता है। इन सब में सर्वोत्तम रेखा वही मानी जाती है जिसकी समस्त आलेखित बिन्दुओं से दूरी किसी अन्य रेखा की अपेक्षा कम हो। जो बिन्दु इस रेखा पर स्थित नहीं हैं उनमें से कुछ रेखा के ऊपर और कुछ नीचे की ओर स्थित होते हैं। इन सांख्यिक दूरियों को धनात्मक व ऋणात्मक दूरियाँ भी माना जाता है। अब न्यूनतम वर्ग विधि से वह रेखा समीकरण ज्ञात करते हैं जिससे इन सांख्यिक दूरियों के वर्गों का योग न्यूनतम हो जाये।

माना कि आकलित उपनति रेखा,

$$\hat{Y} = a + bX \qquad \text{....(16.1)}$$

है। उपनति रेखा समंजन में सदैव काल (समय) को भुजा अक्ष पर और चर मान के तदनुसार मानो जैसे किसी उत्पादित पदार्थ की मात्रा, उपभोग पदार्थ की मात्रा, प्रतिवर्ष

आयात या निर्यात या प्रतिवर्ष बेरोजगारों की संख्या आदि, को कोटि अक्ष पर लिया जाता है और इन्हें क्रमशः चर X व Y द्वारा निरूपित करते हैं। $\hat{Y}$ चर Y का आकलित मान है। आकलित स्थिरांक a व b के मान, सूत्र (13.8) और (13.9) के अनुसार निम्न हैं—

$$a=(\overline{Y}-b\,\overline{X})$$

माना कि n कालों के लिए न्यादर्श को संगृहीत किया गया है अर्थात् i=1, 2, 3,...., n और,

$$b=\frac{\sum_i X_i Y_i-\frac{(\sum_i X_i)(\sum_i Y_i)}{n}}{\sum_i X_i^2-\frac{(\sum_i X_i)^2}{n}}$$

काल श्रेणी में उपनति रेखा के समंजन की विधि इस प्रकार है। काल श्रेणी में दिये वर्षों के मध्य वर्ष को शून्य और इससे पूर्व के वर्षों को ऋणात्मक मान और बाद के वर्षों को धनात्मक मान, कालान्तर के अनुसार दे दिये जाते हैं। इस प्रकार X के मानों का योग सदैव शून्य रहता है। अर्थात्,

$$\sum_i X_i=0$$

इस स्थिति में,

$$a=\overline{Y};\quad b=\frac{\sum_i X_i Y_i}{\sum_i X_i^2} \qquad ....(16.2)$$

यदि वर्षों की संख्या n विषम हो तो मध्य वर्ष स्पष्टतः उपलब्ध हो जाता है और इसे शून्य मानकर अन्य वर्षों के लिए X के मान दिया जाना सुगम है, किन्तु n सम होने पर कोई एक काल (वर्ष) मध्य काल नहीं होता है। इस कठिनाई को दूर करने के लिए काल के आधे काल को चर X के रूप में मान लिया जाता है जैसे काल-अन्तर एक वर्ष है तो छः महीने के समय का X मान लिया जाता है और मध्य के दो कालों (वर्षों) में से पहले वाले काल को −1 और अगले काल का +1 मान लिया जाता है। इस प्रकार प्रारम्भ की ओर X के मान −3, −5, −7 ... और अन्त की ओर 3, 5, 7 दे दिये जाते हैं।

n का मान सम होने की स्थिति में यदि चाहें तो बीच के काल (वर्षों) में से पहले काल को X का मान −0.5 और अगले काल को +0.5 दे सकते हैं अतः प्रारम्भ काल की ओर X के मान −1.5, −2.5, −3.5 और अन्त की ओर 1.5, 2.5, 3.5 मान दिये जाते हैं। इन मानों का प्रयोग करके सूत्र (16.2) की सहायता से a व b के परिकलित मान ज्ञात कर लिये जाते हैं। a व b के मान का समीकरण $\hat{Y}=a+bX$ में

प्रतिस्थापन करके समंजित उपनति रेखा ज्ञात हो जाती है। इस रेखा द्वारा X के किसी मान के लिए Y का प्राक्कलित मान ज्ञात कर सकते हैं।

उदाहरण 16.6 मलेशिया घरेलू बचत द्वारा प्राप्त धन राशि 1964 से 1970 तक के वर्षों के लिए निम्न प्रकार है—

वर्ष	घरेलू बचत (दस लाख डालर में)
1964	428
1965	527
1966	554
1967	577
1968	598
1969	625
1970	654

घरेलू बचत के लिए उपनति रेखा $\hat{Y}=a+bX$ का न्यूनतम वर्ग-विधि द्वारा समंजन निम्न प्रकार कर सकते हैं—

यहाँ वर्षों की संख्या n=7 है जो कि विषम है। अतः मध्य का वर्ष 1967 है। दी हुई विधि के अनुसार X व Y के मान निम्न हैं जिनका प्रयोग करके a व b के मानों का परिकलन किया गया है।

वर्ष	X	Y	X^2	XY	$\hat{Y}$
1964	−3	428	9	−1284	467·785
1965	−2	527	4	−1054	500 570
1966	−1	554	1	− 554	533 355
1967	0	577	0	000	566 140
1968	1	598	1	598	598 925
1969	2	625	4	1250	631·710
1970	3	654	9	1962	664 495
योग	0	3963	28	918	

$$a=\bar{Y}=\frac{3963}{7}=566\ 14$$

$$b=\frac{918}{28}=32\ 785$$

अत. उपनति रेखा समीकरण है,

$$\hat{Y}=566\ 14+32\ 785\ X$$

X के विभिन्न मान रखने पर Y के आकलित मान ज्ञात हो जाते हैं जिनको कि ऊपर सारणी के अन्तिम स्तम्भ मे ही प्रदर्शित कर दिया गया है। जैसे,

जब $X=-3,\ \hat{Y}=467\ 785$

यदि चाहें तो वर्ष 1973 के लिए आकलित बचत राशि इस प्रकार ज्ञात कर सकते हैं।

इस स्थिति मे $X=6$ और $\hat{Y}=762\ 850$

अर्थात् वर्ष 1973 मे 762 850 मिलियन डालर बचत की मात्रा है।

उदाहरण 16 7 पंजाब की फैक्ट्रियों के प्रतिदिन औसत श्रमिकों की संख्या सन् 1962 से 1969 तक निम्न थी—

वर्ष	1962	1963	1964	1965
प्रति दिन औसत श्रमिकों की संख्या (हजार व्यक्ति)	145	152	168	177
वर्ष	1966	1967	1968	1969
प्रति दिन औसत श्रमिकों की संख्या (हजार व्यक्ति)	104	107	105	107

फैक्ट्रियों मे श्रमिकों की रोजगार के प्रति उपनति रेखा का न्यूनतम वर्ग-विधि द्वारा समजन निम्न प्रकार कर सकते हैं—

विधि 1 : यहाँ वर्षों की संख्या आठ है जोकि सम है अत वर्ष 1965 के लिए X का मान −1 और 1966 के लिए X का मान +1 मान लिया जैसाकि विधि के वर्णन मे दिया गया है। अन्य वर्षों के लिए X के मान तथा परिकलन के लिए अन्य संख्याएँ निम्न सारणी मे दी गई हैं—

वर्ष	चर X	श्रमिकों की संख्या (हजार व्यक्ति) (Y)	X^2	XY	$\hat{Y}$
1962	−7	145	49	−1015	164·667
1963	−5	152	25	− 760	155 655
1964	−3	168	9	− 504	146 643
1965	−1	177	1	− 177	137·631
1966	1	104	1	104	128 619
1967	3	107	9	321	119 607
1968	5	105	25	525	110 595
1969	7	107	49	749	101 583
योग	0	1065	168	− 757	

$$a = \overline{Y} = \frac{1065}{8} = 133{\cdot}125$$

$$b = -\frac{757}{168} = -4{\cdot}506$$

अतः उपनति रेखा,

$$\hat{Y} = 133{\cdot}125 - 4{\cdot}506\,X$$

है। X को विभिन्न मान देने पर Y के प्राक्कलित मान प्राप्त हो जाते हैं। X के दिए गये मानों के तदनुसार Y के प्राक्कलित मान ऊपर सारणी के अन्तिम स्तम्भ में दिए गये हैं।

विधि 2 : वर्ष 1965 के लिए X का मान −0·5 और 1966 को +0·5 रख दें और अन्य वर्षों को भी इसी प्रकार मान दे दें तो उपनति रेखा का समंजन निम्न सारणी बनाकर सुगमता से कर सकते हैं—

वर्ष	चर X	व्यक्तियों की संख्या (हजार व्यक्ति) (Y)	X^2	XY
1962	−3·5	145	12·25	−507·5
1963	−2·5	152	6·25	−380·0
1964	−1·5	168	2·25	−252·0
1965	−0·5	177	0·25	− 88·5
1966	0·5	104	0·25	52·0
1967	1·5	107	2·25	160·5
1968	2·5	105	6·25	262·5
1969	3·5	107	12·25	374·5
योग		1065	42·00	−378·5

$$a = \frac{1065}{8} = 133{\cdot}125$$

$$b = \frac{-378{\cdot}5}{42{\cdot}00}$$

$$= -9{\cdot}012$$

अत. उपनति रेखा,

$$\hat{Y} = 133.125 - 9.012\,X$$

है। यह रेखा विधि 1 द्वारा ज्ञात की गई रेखा के तुल्य है क्योंकि यह X के मान पिछले मानो के आधे और X का गुणांक 'b' पिछले गुणांक का दुगुना है।

ऋतुनिष्ठ विचरण

दीर्घकालिक उपनति द्वारा केवल एक काल से दूसरे काल में परिवर्तन के विषय में ज्ञान होता है। बहुधा एक काल एक वर्ष ही लिया जाता है। अत अधिकतर वर्णन एक काल को एक वर्ष मानकर ही दिया गया है। व्यवहार में यह देखा गया है कि काल श्रेणी के माप जैसे वस्तुओ की बिक्री, उनके मूल्य, उपभोग की मात्रा उत्पादन आदि के लिए मान वर्ष के किन्ही महीनो मे, तिमाही या वर्ष के अन्य किसी भाग मे अधिक या कम होते है। अत यह जानकारी व्यापारी को लाभप्रद है कि प्रति मास या तिमाही उसका उत्पादन या बिक्री, वर्ष के औसत मासिक बिक्री या उत्पादन से कितनी अधिक या कम है, अतः ऋतुनिष्ठ विचरण एक वह लक्षण माप है जो कि न्यास का, वर्ष के बारह महीनों में सचलन प्रदर्शित करता है। ऋतुनिष्ठ विचरण ज्ञात करने का साधारण सिद्धान्त यह है कि काल श्रेणी से दीर्घकालिक प्रभावों का निरसन कर दें और जो शेष विचरण होता है वह ऋतुनिष्ठ विचरण है अर्थात् प्रति मास मानो से जब दीर्घउपनति तथा चक्रीय विचरण के प्रभावों का निरसन कर दें तो ऋतुनिष्ठ सूचकांक ज्ञात हो जाता है। ऋतुनिष्ठ विचरण जानने का लाभ यह है कि ऋतुनिष्ठ परिवर्तनो को व्यापार मे भूल या महत्वपूर्ण आर्थिक परिवर्तन न समझ लिया जाये। साथ ही इसके ज्ञान के अनुसार वस्तुओं का भण्डार करना, पूंजी की व्यवस्था तथा वस्तुओ को समय के अनुसार उचित मूल्य पर बेचने आदि का प्रबन्ध सुचारू रूप से किया जा सकता है।

परिभाषा

ऋतुनिष्ठ सूचकांक, वह कैमिक प्रतिशत माप है जिसका माध्य 100 है और जो वर्ष के प्रतिमास (मास्नाहिक, तिमाही या छमाही) के सापेक्ष स्तर को निरूपित करता है।

न्यास का समायोजन

ऊपर वर्णन में यह कहा गया है कि ऋतुनिष्ठ विचरण अधिकतर प्रति मास के आधार पर ज्ञात किये जाते हैं। किन्तु हम यह जानते है कि वर्ष के प्रत्येक मास में दिनों की सख्या समान नही होती है, कुछ मास 30 दिनों के, कुछ 31 दिनों के और फरवरी 28 दिन का होता है। अत यह ध्यान रखना आवश्यक हो जाता है कि प्रति मास प्राप्त प्रेक्षणों पर मास के दिनो की सख्या का प्रभाव पडता है या नही। जैसे बैंक मे जमा मासिक धन पर मास मे दिनो की सख्या या अन्य छुट्टियो का कोई प्रभाव नहीं पडता है। अत ऐसे न्यास के समायोजन की आवश्यकता नही है। किन्तु यदि आँकडे किसी वस्तु के उत्पादन, उपभोग आदि के हेतु, लिये गये हैं अर्थात् मासिक मान, दिनो के मानों का

योग है तो ऐसी स्थिति में यह उचित है कि प्रत्येक मासिक मान को 30 दिन के लिए परिवर्तित कर दिया जाये। किसी सम्बन्धी न्यास में शुद्धि की जाय या नहीं, यह कहना कठिन है। क्योंकि यह वस्तु जिसके लिए आँकड़े लिये गये हैं उस वस्तु के प्रकार, महत्व या आवश्यकता पर निर्भर है।

ऋतुनिष्ठ विचरण ज्ञात करने की विधियाँ

(1) समान्तर माध्य विधि

इस विधि का प्रयोग उस न्यास की स्थिति में करते हैं जिसमें कि उपनति या चक्रीय विचरण न हो। इसमें अनेक वर्षों के लिए श्रेणी के आँकड़ों को महीनों के अनुसार सारणीबद्ध करके, प्रत्येक मास का माध्य मान ज्ञात कर लेते हैं, इन सब माध्यों का माध्य अर्थात् समस्त माध्य (*over all mean*) ज्ञात कर लिया जाता है। प्रत्येक माह के माध्य का समस्त माध्य से प्रतिशत अनुपात ज्ञात करते हैं। यही प्रतिशत ऋतुनिष्ठ सूचकांक होता है, व्यवहार में अनुपात का पूर्णांकन करके दशमलव हटा देते हैं किन्तु यह ध्यान रखते हैं कि इनका माध्य 100 रहे।

इस विधि का प्रयोग लगभग नहीं किया जाता है क्योंकि ऐसी आदर्श परिस्थितियाँ *जो कि न्यास उपनति या चक्रीय विचरण से मुक्त हों, वास्तव में मिलना कठिन है। अतः अधिकतर न्यास से उपनति या चक्रीय, प्रभाव को दूर करके ही ऋतुनिष्ठ सूचकांक ज्ञात करते हैं।*

(2) उपनति-निरसन विधि

यदि न्यास में दीर्घकालिक उपनति विद्यमान हो तो माध्य विधि द्वारा परिणाम शुद्ध नहीं होते हैं अतः न्यास से उपनति का निरसन करना अत्यन्त आवश्यक है। उपनति का निरसन करने के पश्चात् उपलब्ध आँकड़ों से ऋतुनिष्ठ सूचकांक ज्ञात करते हैं।

यदि न्यास को देखकर स्पष्ट हो कि जनवरी से दिसम्बर तक मूल्य या उत्पादन आदि के प्रति मान *निरन्तर घट या बढ़ रहे हैं तो उपनति के लिए समायोजन निम्न प्रकार* करते हैं—

उपनति के लिए दी हुई विधियों में से किसी एक के द्वारा दीर्घकालीन उपनति रेखा समीकरण ज्ञात कर लेते हैं। पर X का गुणांक प्रति वर्ष होने वाले परिवर्तन का सूचक है। इस सूचकांक को आवश्यक होने पर 12 से (या ऋतुकाल के अनुसार संख्या से) भाग करके प्रति मास (प्रति ऋतुकाल) गुणांक ज्ञात कर लेते हैं।

यदि ऋतुनिष्ठ विचरण अर्धमास काल के आधार पर ज्ञात करना हो तो एक मास के लिए प्राप्त गुणांक का आधा करके अर्धमास के लिए X का गुणांक ज्ञात हो जाता है। वर्ष में महीनों की संख्या 12 है जो कि सम है अतः जून मास के प्रारम्भ से अर्धमास अन्तराल –1 है और मई के प्रारम्भ तक –3, अप्रैल –5, मार्च –7, फरवरी –9, जनवरी –11, अर्धमास अन्तराल दूरी पर है। इसी प्रकार 15 जुलाई से दिसम्बर के अन्त तक अर्धमास अन्तराल दूरियाँ, 1, 3, 5, 7, 9, 11 हैं। माना कि जनवरी से दिसम्बर

तक के माध्य परिमाण आरोही क्रम में हैं तो अर्धमान गुणांक को जनवरी की ओर अर्धमान अन्तराल दूरी से गुणा करके जोड़ लेते हैं और दिसम्बर की ओर प्रेक्षित मानों में से तदनुसार संख्याएँ क्रमश: घटा देते हैं। यदि माध्यों का क्रम अवरोही हो तो जोड़ने व घटाने की क्रिया उलट जाती है। इस प्रकार प्राप्त संशोधित माध्य मानों के लिए समान्तर माध्य विधि द्वारा ऋतुनिष्ठ सूचकांक ज्ञात कर सकते हैं।

टिप्पणी - इस विधि का उपयोग बहुत कम हो पाता है क्योंकि जनवरी से दिसम्बर तक निरन्तर वृद्धि या कमी व्यवहार में न के समान पाई जाती है। यदि किसी स्थान के लिए दिया हुआ प्रतिबन्ध सत्य प्रतीत हो तो इस विधि का प्रयोग अवश्य करना चाहिए।

(3) उपनति से अनुपात विधि

इस विधि के अन्तर्गत वर्ष श्रेणी के प्रत्येक माह के मान का उपनति रेखा द्वारा प्राप्त उस ही वर्ष के माह के लिए कोटि मान से प्रतिशत अनुपात ज्ञात करते हैं। इन अनुपातों को प्रति माह व वर्ष के अनुसार सारणीबद्ध करके प्रत्येक माह का वर्ष श्रेणी के मानों का माध्य ज्ञात कर लिया जाता है। इन माध्यों के माध्य मान ऋतुनिष्ठ सूचकांक प्रदर्शित करते हैं।

इस विधि द्वारा केवल उपनति प्रभाव ही दूर होते हैं और माध्य लेने पर अनियमित प्रभाव दूर हो जाते हैं। किन्तु चक्रीय प्रभाव पूर्णतया दूर नहीं होते हैं। इस विधि का प्रयोग केवल उन श्रेणी के लिए अधिक उपयुक्त है कि जिनमें चक्रीय व अनियमित प्रभाव न हों और उपनति का परिशुद्धता के साथ परिकलित किया जाना सम्भव हो। यदि काल श्रेणी में यह गुण विद्यमान न हो तो किसी अन्य विधि को अपनाना चाहिए।

(4) गतिमान माध्य विधि द्वारा ऋतुनिष्ठ सूचकांक

यह विधि अन्य विधियों की अपेक्षा उत्तम है और इसका सबसे अधिक प्रयोग होता है। ऋतुनिष्ठ सूचकांक ज्ञात करने की यह विधि निम्न प्रकार है—

यदि विभिन्न क्रमिक वर्षों के लिए मासिक व्यास दिया गया है तो श्रेणी के पहले वर्ष के बारह महीनों का माध्य ज्ञात करते हैं। इस माध्य को जून व जुलाई के बीच के स्थान के सम्मुख रख देते हैं। फिर इस वर्ष के प्रथम मान जनवरी के मान को छोड़ देते हैं और अगले वर्ष के प्रथम मास के मान को जोड़कर 12 महीनों का माध्य ज्ञात करके जुलाई व अगस्त के मध्य स्थान के सम्मुख रख देते हैं। यही क्रम चलता रहता है जब तक कि वर्ष श्रेणी के सब मान सम्मिलित न हो जाँय फिर इन माध्यों से दो माध्य लेकर, गतिमान माध्य ज्ञात कर लिए जाते हैं। सबसे पहले माध्य को जुलाई के सम्मुख रख दिया जाता है और इसके पश्चात् के माध्य अगस्त, सितम्बर······आदि के सम्मुख रख दिये जाते हैं।

फिर प्रत्येक मास के मान का उसके सम्मुख गतिमान माध्य से प्रतिशत अनुपात ज्ञात करके इस मान के सम्मुख रख दिया जाता है। प्रत्येक मास के लिए प्रतिशत अनुपात को

माध्यिका ज्ञात करली जाती है। इन माध्यिकाओं का माध्य ज्ञात करके, प्रत्येक मास की माध्यिका को इस माध्य से भाग देकर समायोजित माध्यिका का परिकलन कर लिया जाता है। यह ध्यान रखना होता है कि इनका माध्य 100 हो।

उपर्युक्त विधि साधारणतः प्रयोग में लाई जाती है किन्तु प्रत्येक मास के प्रतिशत अनुपातों की माध्यिका ज्ञात करना ही आवश्यक नहीं है। कुछ व्यक्ति माध्यिका के स्थान पर माध्य का भी प्रयोग करते हैं। इसके अतिरिक्त यह भी आवश्यक नहीं है कि सदैव 12 महीनों का गतिमान माध्य ज्ञात किया जाये। यदि ध्यान द्वारा ऐसा प्रतीत होता है कि चक्र 6 महीने 3 महीने या अन्य किसी काल में पूरा हो जाता है तो इन्हीं महीनों को लेकर गतिमान माध्य ज्ञात करना चाहिये। इस गतिमान माध्य को इस काल के मध्य के मास के सम्मुख रखना होता है।

इस विधि का लाभ यह है कि 12 क्रमिक महीनों का गतिमान माध्य लेने से ऋतुनिष्ठ तथा अनियमित प्रभाव दूर हो जाते हैं और यह भी कि रेखीय तथा वक्ररेखीय उपनति का निरसन हो जाता है। इसके पश्चात् प्रतिशत अनुपातों का सम्मिलित वर्षों के प्रत्येक मास के लिए माध्य या माध्यिका ज्ञात करने पर अनियमित प्रभाव भी दूर हो जाते हैं। इस प्रकार जो सूचकांक प्राप्त होता है वह केवल ऋतुनिष्ठ सूचकांक ही प्रदर्शित करता है।

इस विधि में अन्य विधियों की अपेक्षा अधिक परिकलन करना होता है। किन्तु ऊपर दिये गुणों के कारण इसका प्रयोग करना उचित है।

उदाहरण 16.8 जयपुर में 1958–1961 तक के गेहूँ के फुटकर भाव प्रति माह नीचे दिये गये हैं। इन आँकड़ों के लिए गतिमान माध्य विधि द्वारा ऋतुनिष्ठ सूचकांक निम्न प्रकार ज्ञात कर सकते हैं। इस उदाहरण में दिये गये भाव तथा परिकलित गतिमान माध्य तथा अनुपात एक ही सारणी में दिये गये हैं।

जयपुर में गेहूँ के फुटकर भाव (रुपये प्रति मन)

वर्ष/मास	भाव	12 महीनों का गतिमान माध्य	दो का माध्य	गतिमान माध्य से प्रतिशत अनुपात
1	2	3	4	5
1958				
जनवरी	16.00			
फरवरी	15.00			
मार्च	15.00			
अप्रैल	15.00			
मई	15.25			
जून	16.50			

1	2	3	4	5
		18 04		
जुलाई	17 00		18·11	93 87
		18·18		
अगस्त	19 25		18 42	104·50
		18 65		
सितम्बर	21·46		18 80	114·15
		18·95		
अक्टूबर	21·25		19 08	111·37
		19·21		
नवम्बर	24 75		19·24	128;63
		19·37		
दिसम्बर	20 00		19 50	102·56
1959				
		19·62		
जनवरी	17·60		19·66	89·52
		19 69		
फरवरी	20·80		19·58	106·23
		19·48		
मार्च	18 50		19 38	95·46
		19·29		
अप्रैल	17 50		19·56	89 47
		18·82		
मई	18·37		18·78	97 82
		18 73		
जून	18 50		18 83	98·25
		18 93		
जुलाई	20 00		·8 89	105 88
		18·86		
अगस्त	20 00		18 94	105 60

1	2	3	4	5
		19 03		
सितम्बर	19 00		19 05	99 74
		19 07		
अक्टूबर	19 00		18 98	100 10
		18 88		
नवम्बर	19 00		18 84	100 85
		18 79		
दिसम्बर	19 00		18 70	101 60
1960				
		18 62		
जनवरी	20 00		18 54	107 87
		18 46		
फरवरी	20 00		18 38	106 81
		18 29		
मार्च	20 50		18 24	112 39
		18 18		
अप्रैल	18 00		18 12	99 34
		18 05		
मई	16 00		17 97	89 04
		17 89		
जून	17 50		17 89	97 82
		17 89		
जुलाई	18 00		17 89	100 61
		17 89		
अगस्त	18 00		17 82	101 01
		17 75		
सितम्बर	17 00		17 66	96 26
		17 58		

1	2	3	4	5
अक्टूबर	17 60		17 68	99 55
		17 78		
नवम्बर	17 50		17 84	98 09
		17 90		
दिसम्बर	17 06		17 90	95 31
1961				
		17 89		
जनवरी	20 00		17 86	111·98
		17 83		
फरवरी	20 00		17 79	112 42
		17 75		
मार्च	18 81		17 68	106 39
		17 61		
अप्रैल	16 00		17 55	91 17
		17 49		
मई	18 37		17 53	104 79
		17 57		
जून	19 00			
जुलाई	17 88			
अगस्त	17 25			
सितम्बर	16 00			
अक्टूबर	16 00			
नवम्बर	16 00			
दिसम्बर	18 00			

उपर्युक्त सारणी मे 12 महीनो का माध्य जून व जुलाई माह के बीच स्थित किया गया है। फिर पिछले वर्ष के प्रारम्भ से एक मान घटाकर और अगले वर्ष के प्रारम्भ का एक मान जोडकर गतिमान माध्य ज्ञात कर लिया जाता है। यही क्रम अन्त तक चलता रहता है।

गतिमान माध्य ज्ञात करने तथा केन्द्रित माध्य ज्ञात करने की विधि वही है जो उदाहरण (16.5) में दी गई है। भावों के गतिमान माध्य व प्रतिशत अनुपात अगले स्तम्भ में दिए गए हैं। इन गतिमान माध्य में अनुपात की सहायता से ऋतुनिष्ठ सूचकांक ज्ञात कर सकते हैं। यहाँ इन वर्षों का प्रयोग नहीं किया जा सकता जिनके लिए सब महीनों के अनुपात उपलब्ध नहीं है।

वर्ष	जनवरी	फरवरी	मार्च	अप्रैल	मई	जून
1959	89.52	106.23	95.40	89.47	97.82	98.25
1960	107.87	108.81	112.39	99.34	89.04	97.82
योग	197.39	215.04	207.85	188.81	186.86	196.07
माध्य	98.70	107.52	103.92	94.45	93.43	98.03
ऋतुनिष्ठ सूचकांक	98.84	107.67	104.06	94.58	93.56	98.16

वर्ष	जुलाई	अगस्त	सितम्बर	अक्टूबर	नवम्बर	दिसम्बर
1959	105.88	105.60	99.74	100.10	100.85	101.60
1960	100.61	101.01	96.26	99.55	98.09	95.31
योग	206.49	206.61	196.00	199.65	198.94	196.91
माध्य	103.24	103.30	98.00	99.82	99.47	98.46
ऋतुनिष्ठ सूचकांक	103.38	103.44	98.15	99.97	99.61	98.56

माध्यों का योग=1198.34

इन माध्यों का योग 1200 लाने के लिए प्रत्येक माध्य को $\frac{1200.00}{1198.34}=1.00138$ से गुणा कर दिया जाता है। इस प्रकार जो समायोजित माध्य प्राप्त होते हैं ऋतुनिष्ठ सूचकांक के मान हैं।

टिप्पणी — यहाँ उदाहरण में केवल चार वर्षों का प्रयोग किया गया है वास्तव में अधिक वर्षों को सम्मिलित करके ऋतुनिष्ठ सूचकांक ज्ञात करना चाहिए। यहाँ यह उदाहरण केवल परिकलन विधि को स्पष्ट करने के उद्देश्य से दिया गया है।

शृंखलिक सापेक्ष विधि

इस विधि के अन्तर्गत काल श्रेणी क्रम के प्रत्येक माह के मान को पिछले माह के मान के प्रतिशत के रूप में लिखते हैं। इस प्रकार एक माह के मान को पिछले माह के प्रतिशत के रूप में परिवर्तित करने से उपनति का निरसन करने के लिए अलग से परिकलन नहीं करना होता है। अर्थात् इसका निरसन स्वयं ही हो जाता है और चक्रीय प्रभाव भी न्यूनतम

हो जाते हैं। फिर प्रत्येक मास के लिए श्रेणी मे माध्य लिया जाता है जिससे कि अनियमित प्रभाव भी लगभग दूर हो जाते हैं। इस विधि द्वारा ऋतुनिष्ठ सूचकांक का परिकलन निम्न प्रकार कर सकते हैं। इस विधि के चरणश परिकलन को उदाहरण (16 9) की सहायता से स्पष्ट किया गया है और पूर्ण हल इस विधि के अन्त मे दिया गया है।

उदाहरण 16 9 राजस्थान प्रात मे घरेलू बिजली का उपभोग 1962 से 1964 तक प्रति माह दिया गया है। बिजली के उपभोग के लिए श्रृंखलिक सापेक्ष विधि द्वारा ऋतुनिष्ठ सूचकांक निम्न प्रकार ज्ञात कर सकते हैं।

बिजली का उपभोग (हजार KWH)

वर्ष/माह	उपभोग	प्रतिशत श्रृंखलिक आपेक्षिक
1962		
जनवरी	1640	
फरवरी	1605	98
मार्च	1681	105
अप्रेल	1741	104
मई	1764	101
जून	1777	101
जुलाई	1781	100
अगस्त	1766	99
सितम्बर	1504	85
अक्टूबर	1523	101
नवम्बर	1574	103
दिसम्बर	1543	98
1963		
जनवरी	1875	122
फरवरी	1357	72
मार्च	1377	101
अप्रेल	2086	151
मई	1699	81
जून	1675	98

वर्ष/माह	उपभोग	शृंखलित आपेक्षिक
जुलाई	1699	101
अगस्त	1699	100
सितम्बर	1699	100
अक्टूबर	1699	100
नवम्बर	1889	111
दिसम्बर	2058	109
1964		
जनवरी	1897	92
फरवरी	1911	101
मार्च	1879	98
अप्रैल	1704	91
मई	2024	119
जून	1700	84
जुलाई	1478	87
अगस्त	1417	96
सितम्बर	1912	135
अक्टूबर	1809	95
नवम्बर	1409	78
दिसम्बर	1515	108

शृंखलित आपेक्षिकों का पूर्णांकन करके लिखा गया है क्योंकि इससे सुविधा हो जाती है। अधिक परिशुद्ध परिणाम चाहते हों तो पूर्णांकन न करें।

(1) शृंखलित आपेक्षिक का परिकलन —प्रत्येक माह के प्रेक्षित मान को इसके पिछले माह के मान से भाग करके, 100 से गुणा कर देने पर प्रति मास शृंखलित आपेक्षिक प्राप्त हो जाते हैं। जैसे यदि जनवरी से दिसम्बर तक प्रेक्षित मान क्रमशः

$$X_1, X_2, X_3, \ldots\ldots, X_{12}$$

हैं तो फरवरी माह का प्रतिशत शृंखलित आपेक्षिक (शृं० आ०)

$$\frac{X_2}{X_1} \times 100 = \frac{1605}{1640} \times 100 = 98$$

के समान है, मार्च [redacted] शृं० आ०

$$\frac{X_3}{X_2} \times 100 = \frac{1681}{1605} \times 100 = 105$$

दिसम्बर का शृ० आ०

$$\frac{X_{12}}{X_{11}} \times 100$$

आदि। अगले वर्ष के जनवरी के मान को पिछले वर्ष के दिसम्बर के मान से भाग करके, 100 से गुणा कर देते हैं। इस प्रकार जनवरी का शृंखलित आपेक्षित ज्ञात हो जाता है। जनवरी का शृ० आ०

$$= \frac{1875}{1543} \times 100 = 122$$

यह क्रम तब तक चलता रहता है जब तक कि अन्त के माह के लिए शृंखलिक आपेक्षिक ज्ञात न हो जाये।

(2) माध्यिका ज्ञात करना —इन शृंखलिक आपेक्षिकों को वर्ष श्रेणी के प्रत्येक माह के अनुसार सारणीबद्ध कर लिया जाता है और प्रत्येक माह की अलग-अलग माध्यिका ज्ञात कर लेते हैं। जैसे जनवरी के माध्यिका

$$= \frac{98+122}{2} = 107$$

व फरवरी की 98 है। यह माध्यिकाएँ सूचकांक को निरूपित नहीं करती हैं तथापि केवल शृंखलिक आपेक्षिक की माध्यिकाएँ ही हैं। यह ध्यान रहे कि इस विधि में शृंखलिक आपेक्षिकों के प्रत्येक माह के लिए माध्य नहीं ज्ञात किये जाते हैं अर्थात् केवल माध्यिकाएँ ही ज्ञात की जाती हैं। इन माध्यिकाओं के द्वारा ऋतुनिष्ठ सूचकांक की रचना की जाती है।

(3) शृंखलिक आपेक्षिक मान ज्ञात करना —जनवरी माह की माध्यिका को 100 मान लेते हैं। इससे अगले माह अर्थात् फरवरी माह की माध्यिका को पिछले माह की माध्यिका के परिवर्तित मान से गुणा करके 100 से भाग देने पर इस माह (फरवरी) का शृंखलिक माध्यिका ज्ञात हो जाती है। जैसे यहाँ शृंखलित आपेक्षिक माध्यिका

$$= \frac{(100 \times 98)}{100} = 98$$

इसी प्रकार मार्च माह की माध्यिका को फरवरी माह की शृंखलिक माध्यिका से गुणा करके, 100 से भाग देने पर मार्च की शृंखलिक माध्यिका ज्ञात कर लेते हैं। जैसे शृ० आपेक्षिक माध्यिका

$$= \frac{101 \times 98}{100} = 99$$

है। इसी प्रकार अन्य सभी महीनो के लिए शृंखलिक माध्यिकाएँ ज्ञात कर ली जाती हैं। अन्त मे जनवरी माह के लिए शृंखलिक आपेक्षिक, दिसम्बर माह की शृंखलिक माध्यिका व जनवरी माह की माध्यिका के गुणनफल को 100 से भाग करने पर प्राप्त होता है। जैसे शृ० आपेक्षिक माध्यिका

$$=\frac{112\times 107}{100}=120$$

यह शृंखलिक माध्यिकाएँ सन्निकट ऋतुनिष्ठ विचरण को निरूपित करती हैं जिसका शृंखलिक आपेक्षिक ज्ञात करते समय भाग देने के कारण क्षति हो गई थी। शृंखलिक माध्यिकाओं (जिसे परिवर्तित मान भी कहते हैं) का समायोजन करना होता है जिससे कि जनवरी माह की शृंखलिक माध्यिका (परिवर्तित मान) 100 हो जाये।

समायोजन गुणन खण्ड के परिकलन के लिए सूत्र निम्न प्रकार है —

$$\text{समायोजन गुणन खण्ड}=\frac{(\text{जनवरी का स्वेच्छ मान})-(\text{जनवरी का शृ० आ०})}{12}$$

$$C=\frac{100-(\text{जनवरी का शृंखलिक आपेक्षिक})}{12} \quad ....(16.3)$$

जैसे यहाँ

$$C=\frac{100-120}{12}=-\frac{5}{3}$$

अत जनवरी से दिसम्बर तक समायोजित मान क्रमश. $0\times C,\ 1\times C,\ 2\times C,........,\ 11\times C$ के समान होते हैं। इन समायोजन मानों को क्रमश शृंखलिक महीनों की माध्यिका मे जोड़कर समायोजित शृंखलिक माध्यिकाएँ ज्ञात कर ली जाती हैं। जैसे जनवरी के लिए समायोजन संख्या$=0\times(-\frac{5}{3})=0$, फरवरी के लिए$=1\times(-\frac{5}{3})=-1.7$, मार्च के लिए $2\times(-\frac{5}{3})=-3.3$ आदि।

ऋतुनिष्ठ सूचकांक ज्ञात करना

इन समायोजित माध्यिकाओं का माध्य ज्ञात करके, प्रत्येक समायोजित माध्यिका का माध्य से भाग करके सूचकांक ज्ञात कर लिया जाता है जिससे कि इनका माध्य 100 हो जाये।

टिप्पणी : (1) सूचकांक मे अधिकतर संख्याओं का पूर्णांकन करके लिखते हैं अर्थात् दशमलव को पूर्णांकन करके हटा देते हैं।

(2) यह विधि अन्य विधियों की अपेक्षा सबसे कठिन है। किन्तु शृंखलिक आपेक्षिक ज्ञात करने से चक्रीय या अनियमित उपनति के प्रभावों का निरसन हो जाता है और समायोजन करने से उपनति का निरसन हो जाता है। इन्हीं गुणों के कारण, यह विधि कठिन होते हुए भी अधिक प्रचलित है।

महीनों के अनुसार काल-श्रेणी के आगणित आपेक्षिकों को अवरोही क्रम में निम्न सारणी में व्यवस्थित करके रख दिया और इन आपेक्षिकों की माध्यिका ज्ञात कर ली गई है।

	जनवरी	फरवरी	मार्च	अप्रैल
	122	101	105	151
	92	98	101	104
		72	98	91
माध्यिका	107	98	101	104
शृंखलिक आपेक्षिक माध्यिका	100	98	99	103
समायोजित आपेक्षिक	100.0	96.3	95.7	98.0
ऋतुनिष्ठ सूचकांक	107	103	103	105

	मई	जून	जुलाई	अगस्त
	119	101	101	100
	101	98	100	99
	81	84	87	96
माध्यिका	101	98	100	99
शृंखलिक माध्यिका आपेक्षिक	104	102	102	101
समायोजित आपेक्षिक	97.3	93.7	92.0	89.3
ऋतुनिष्ठ सूचकांक	105	100	99	96

	सितम्बर	अक्टूबर	नवम्बर	दिसम्बर
	135	101	111	109
	100	100	103	108
	85	95	78	98
माध्यिका	100	100	103	108
शृंखलिक माध्यिका आपेक्षिक	101	101	104	112
समायोजित आपेक्षिक	87.7	86.0	87.3	93.7
ऋतुनिष्ठ सूचकांक	94	92	94	101

$$\text{समायोजन गुणक} = \frac{100-120}{12}$$

$$= \frac{-20}{12} = \frac{-5}{3}$$

अतः जनवरी से दिसम्बर तक समायोजन संख्याएँ हैं —

$$0 \times \frac{5}{3} = 0,\ -1 \times \frac{5}{3} = \frac{-5}{3},\ -2 \times \frac{5}{3} = \frac{-10}{3},$$

$$-3 \times \frac{5}{3} = -5,\ -4 \times \frac{5}{3} = -\frac{20}{3},\ -5 \times \frac{5}{3} = -\frac{25}{3},$$

$$-6 \times \frac{5}{3} = -10,\ -7 \times \frac{5}{3} = \frac{-35}{3};\ -8 \times \frac{5}{3} = -\frac{40}{3},$$

$$-9 \times \frac{5}{3} = -15;\ -10 \times \frac{5}{3} = -\frac{50}{3};\ -11 \times \frac{5}{3} = -\frac{-55}{3}$$

समायोजित आपेक्षिक माध्यों का योग = 1117.0

अतः इनका योग 1200 लाने के लिए, समायोजन गुणक

$$= \frac{1200}{1117} = 1.074$$

समायोजन गुणक का प्रयोग करके ऋतुनिष्ठ सूचकांक उपर्युक्त सारणी की अन्तिम पंक्ति में दिखाये गये हैं।

ऋतुनिष्ठ सूचकांक का योग 1200 न होकर 1199 है। एक का अन्तर पूर्णांकन के कारण है।

टिप्पणी उपर्युक्त विधि केवल तीन वर्ष के आँकड़ों को लेकर दी गई है। इस विधि का प्रयोग दी हुई रीति के अनुसार किसी भी काल श्रेणी के लिए कर सकते हैं। अब तक दी हुई विधियों के अतिरिक्त ऋतुनिष्ठ सूचकांक ज्ञात करने की अन्य अनेक विधियाँ प्रयोग में लाई जाती हैं जैसे बामैन गतिमान माध्य अन्तर विधि (Bauman Moving Average Difference Method), कारमीकेल अन्तर विधि (Carmichael first Difference Method), फाक्नर की उपनति-प्रतिशत विधि (Falkner Percent of Trend Method) आदि। यह विधियाँ कदा कदा ही प्रयोग में लाई जाती हैं। इनका वर्णन इस अध्याय में नहीं किया गया है। किसी भी विधि का प्रयोग ध्यान के प्रकार, ऋतुनिष्ठ सूचकांक व मध्य पर निर्भर करता है। साधारणतः गतिमान माध्य विधि या शृंखलित आपेक्षिक विधि द्वारा अच्छे परिणाम प्राप्त होते हैं।

ऋतुनिष्ठ प्रभावों का निरसन :

ऋतुनिष्ठ प्रभावो को दूर करने की एक साधारण विधि यह है कि प्रति मास प्रेक्षित मानों के तदनुसार ऋतुनिष्ठ सूचकांक से भाग करके 100 से गुणा कर दें। इस प्रकार जो समायोजित मान प्राप्त होते हैं वह ऋतुनिष्ठ विचरण से मुक्त होते हैं। कुछ व्यक्ति अन्य विधियों का भी प्रयोग करते हैं किन्तु वह विधियाँ कुछ विशेष परिस्थितियों में ही उपयुक्त होती हैं।

ऋतुनिष्ठ परिवर्तन समस्या :

जिन विधियों का वर्णन ऋतुनिष्ठ सूचकांक ज्ञात करने के हेतु दिया जाता है वह सब ही इस कल्पना पर आधारित हैं कि कुल काल श्रेणी के वर्षों में ऋतुनिष्ठ परिवर्तन का प्रतिरूप लगभग एक सा ही रहता है। किन्तु यह स्थिति हर पदार्थ के लिए सत्य नहीं पाई जाती है। समय के साथ परिस्थितियाँ और परिस्पन्दितियों के साथ ऋतुनिष्ठ प्रभाव भी बदलते रहते हैं। जैसे कुछ समय पूर्व कोयला ईंधन का एक मात्र साधन होने के कारण शरद् ऋतु में अधिक मात्रा में उपयोग होता था और मूल्य भी अधिक होते थे जब कि गर्मियों में (मई व जून) मान म उनके विपरीत स्थिति पाई जाती थी। किन्तु आधुनिक काल में विद्युत् व गैस का कोयले के स्थान पर प्रयोग होने के कारण ऋतुनिष्ठ प्रभाव में परिवर्तन हो गया है। अत यदि काल श्रेणी में अधिक वर्ष सम्मिलित हैं तो ऋतुनिष्ठ परिवर्तन विद्यमान होना स्वाभाविक ही है।

ऋतुनिष्ठ परिवर्तन समस्या कुछ ही पदार्थों की स्थिति में होती है। इस समस्या को दूर करने का एक सुगम उपाय यह है कि केवल उन ही वर्षों को एक श्रेणी में लेकर ऋतुनिष्ठ सूचकांक ज्ञात करना चाहिये जिनमें परिस्थितियाँ लगभग एक सी हों। यहाँ इस समस्या को बताने का उद्देश्य अध्ययन कर्ता को इस परिवर्तन के प्रति सजग करना है।

चक्रीय विचरण-मापन :

चक्रीय विचरण से अभिप्राय एक दीर्घावधि में होने वाले विचरण से है। यह अवधि एक वर्ष से अधिक होती है क्योंकि वार्षिक विचरण को पहले ही उन्नति के अन्तर्गत दिया जा चुका है। दीर्घावधि विचरण का व्यापार में तथा राष्ट्रीय आर्थिक नीति की दृष्टि से बड़ा महत्त्व है। इस प्रकार के विचरण, काल श्रेणी में न तो काल के अनुसार और न ही परिमाण के अनुसार नियमित होते हैं। व्यापार में प्राय ऐसा देखा गया है कि कुछ काल तक प्रसार व उन्नति के पश्चात् फिर एक काल में सुस्ती तथा गिरावट आती है। इस प्रकार के परिवर्तन अनेक कारणों से हो सकते है जैसे सरकार की नीतियों का प्रभाव, लोगों की रुचि, विभिन्न वस्तुओं के उत्पादन में परिवर्तन आदि।

चक्रीय विचरण के अध्ययन करने का एक मूल सिद्धान्त यह है कि श्रेणी में से उन्नति और ऋतुनिष्ठ विचरण का निरसन कर दिया जाये। इस प्रकार श्रेणी में केवल चक्रीय तथा अनियमित विचरण ही शेष रह जाते हैं। वास्तव में अनियमित विचरण को चक्रीय विचरण से पृथक् करना एक कठिन समस्या है क्योंकि चक्रीय विचरण स्वयं ही काल तथा

परिमाण की दृष्टि से अनियमित होते हैं। यही कारण है कि अब तक कोई सन्तोषजनक विधि इसके लिए नहीं दी गई है। इन दोनों को श्रेणी में से उपनति या ऋतुनिष्ठ विचरण के आधार पर पृथक् करना लगभग असम्भव है। केवल किसी वर्ष या काल में यदि कोई ऐसी घटनाएँ घटित हुई हों जो कि अनियमित विचरण या अकस्मात् परिवर्तन के लिए उत्तरदायी हों, तो हम सम्मिलित काल को काल श्रेणी में होने वाले विचरण की अनियमितता से सम्बन्ध कर सकते हैं जैसे इस काल में सूखा पड़ जाये, बाढ़ आ जाये, भूकम्प आ जाये, युद्ध के वर्ष हों या अन्य कोई विपत्ति उत्पन्न हो गई हो। इसी प्रकार किसी पदार्थ के लिए गुप्त भण्डारों का पता लग जाये, एक साथ कई फैक्ट्रियाँ खुलने से उत्पादन बढ़ जाये या किसी बीमारी के फैलने से एक प्रकार की ही वस्तु की मांग बढ़ जाये आदि काल श्रेणी में अनियमित विचरण के प्रतीक माने जाते हैं। सारांश यह है कि कोई भी ऐसे घटित विचरण जो कि व्यापार पद्धति के अनुसार न होते हों और जो कि असाधारण रूप में कभी भी घटित हो जाँय अनियमित विचरण ही समझे जाते हैं।

(1) चक्रीय विचरण का पृथक्करण चक्रीय विचरण के लिए अत्यधिक अनियमित होने के कारण उपनति या ऋतुनिष्ठ विचरण की भाँति सूचकांक ज्ञात करना तो असम्भव है, किन्तु श्रेणी से उपनति तथा ऋतुनिष्ठ विचरण का निरसन करने के पश्चात्, चक्रीय विचरण के विषय में पर्याप्त ज्ञान प्राप्त हो जाता है। यदि श्रेणी वार्षिक आँकड़ों पर आधारित है तो इसमें ऋतुनिष्ठ विचरण विद्यमान होने का तो प्रश्न ही नहीं उठता। अतः प्रेक्षित मानों को तदनुसार उपनति कोटियों द्वारा भाग देने पर प्राप्त समायोजित मान उपनति युक्त श्रेणी प्रदान करते हैं। यदि मासिक आँकड़े संगृहीत किये गये हों तो उपनति कोटि और ऋतुनिष्ठ सूचकांक के गुणनफल से प्रत्येक मान को भाग करके प्रतिशत समायोजित मान ज्ञात कर लेते हैं। अब इस श्रेणी में केवल चक्रीय व अनियमित विचरण ही अवशिष्ट रह जाते हैं।

उपर्युक्त विधि इस कल्पना पर आधारित है कि उपनति कोटियाँ और ऋतुनिष्ठ सूचकांक पूर्णतया उपनति तथा ऋतुनिष्ठ प्रभावों के प्रतीक हैं। किन्तु वास्तव में ऐसी स्थिति प्राप्त होना कठिन है। अतः इस विधि द्वारा परिशुद्ध चक्रीय विचरण ज्ञात होने की सम्भावना बहुत कम है। फिर भी यदि इस कल्पना के सत्य होने का प्रत्यक्ष प्रमाण हो तो इस विधि का प्रयोग करना उचित है।

किसी विधि द्वारा उपनति व ऋतुनिष्ठ विचरण का निरसन करने के बाद प्राप्त श्रेणी को आलेखित करके गर्तों (*Troughs*) एवं शीर्षों (*Crests*) को देखकर चक्रीय विचरण ज्ञात कर लिए जाते हैं।

उपनति—निरसन द्वारा चक्रीय विचरण ज्ञात करने की कुछ विधियाँ निम्न हैं —

विधि 1 : प्रथम अन्तर विधि - यह पिछले खण्ड में दिया जा चुका है कि वार्षिक काल श्रेणी में ऋतुनिष्ठ विचरण विद्यमान नहीं होते हैं, अतः केवल उपनति का निरसन करने के हेतु यह विधि अत्यधिक सरल एवं उपयुक्त है। इस विधि के अन्तर्गत एक वर्ष के लिए मान का इससे पिछले वर्ष के मान से अन्तर ज्ञात करते हैं। यदि पिछले वर्ष का मान हम

वर्ष के लिए मान से अधिक हो तो इसका चिह्न ऋणात्मक (−) अन्यथा धनात्मक (+) होता है। इन अन्तरो को प्रतिवर्ष के अनुसार ग्राफ पर आलेखित करके चक्रीय विचरण के विषय मे पता चल जाता है। बिना ग्राफ के भी इसका अनुमान लगाया जा सकता है किन्तु ग्राफ द्वारा चक्रीय विचरण का स्पष्ट पता चल जाता है जो कि गर्तों एव शीर्षों के रूप में होता है।

विधि 2 : पूर्वगत वर्ष के प्रतिशत द्वारा : इस विधि मे प्रत्येक वर्ष के मान को पिछले वर्ष के मान से भाग करके 100 से गुणा कर देने पर प्रतिशत ज्ञात हो जाते हैं। यह विधि (1) के तुल्य है क्योकि इसमे वास्तविक अन्तर के स्थान पर सापेक्ष परिवर्तन अर्थात् उन्नति या गिरावट के विषय मे पता चल जाता है। इन प्रतिशत मानों को आलेखित करके चक्रीय विचरण स्पष्ट ज्ञात हो जाता है। विधि (1) व (2) द्वारा एक से परिणाम प्राप्त होते हैं।

विधि 3 : उपनति के निरसन द्वारा : उपनति का निरसन करने के हेतु प्रत्येक मान को तदनुसार उपनति कोटि से भाग करके उपनति का निरसन कर सकते है। अत: उपनति के हेतु दी गई विधियो मे से किसी भी उपयुक्त विधि का प्रयोग करके उपनति ज्ञात कर लेते हैं। इन मानो से भाग करने पर उपनति मुक्त काल श्रेणी ज्ञात हो जाती है। इस काल श्रेणी बिन्दुओ का आलेखन करके चक्रीय विचरण ज्ञात हो जाते हैं।

विधि 4 : ऋतुनिष्ठ विचरण के निरसन द्वारा : यदि मासिक श्रेणी दी गई हो तो इसमे ऋतुनिष्ठ विचरण का होना स्वाभाविक है अतः ऋतुनिष्ठ विचरण ज्ञात करने के हेतु दी गई विधियो मे से किसी भी उपयुक्त विधि का प्रयोग करके ऋतुनिष्ठ सूचकांक ज्ञात कर लेते हैं। श्रेणी के प्रत्येक मान को ऋतुनिष्ठ सूचकांक द्वारा भाग करके 100 से गुणा कर देने पर ऋतुनिष्ठ विचरण मुक्त श्रेणी प्राप्त हो जाती है। इस श्रेणी के आलेखन द्वारा या श्रेणी को देखने मात्र से चक्रीय विचरण का पता चल जाता है, यह विधि शृंखलिक सापेक्ष विधि के अनुरूप है।

विवेचन चक्रीय विचरण का पृथक्करण उपनति व ऋतुनिष्ठ विचरण के निरसन पर आधारित है जिसके लिए विधियाँ पहले ही दी जा चुकी हैं। निरसन के पश्चात् श्रेणी का आलेखन करके, बिन्दुओ को मिला देने पर शीर्षों (Crests) और गर्तों (Troughs) की सहायता से चक्रीय विचरण का स्पष्ट पता चल जाता है।

चक्रीय विचरण के हेतु पर्याप्त बड़ी श्रेणी को लेना चाहिये जिससे व्यापारिक या अन्य चक्रो के विषय मे स्पष्ट पता चल सके।

काल श्रेणी मे अनियमित विचरण :

चक्रीय विचरण के वर्णन मे यह पहले ही बताया जा चुका है कि चक्रीय विचरण और अनियमित विचरण को पृथक् करना सम्भव नहीं है क्योकि चक्रीय विचरण स्वय ही काल एव कोणांक (Amplitude) की दृष्टि से अनियमित होते हैं अत किसी काल श्रेणी मे अकस्मात् परिवर्तन जो कि किन्हीं घटनाओ के अधीन हुए हो अनियमित विचरण मे सम्बद्ध किये जा सकते हैं।

सारांश : इस अध्याय में दिये गये विवरण से स्पष्ट है कि काल श्रेणी के प्रेक्षित मान (प्रे०), चार प्रकार के प्रभावों पर आधारित हैं। यह प्रभाव हैं उपनति (उ०), ऋतुनिष्ठ विचरण (ऋ०), चक्रीय विचरण (च०) और अनियमित विचरण (अ०)। इन सब में निम्न सम्बन्ध निर्धारित किया जा सकता है।

$$\text{प्रे०} = \text{उ०} \times \text{ऋ०} \times \text{च०} \times \text{अ०} \quad \text{....(16 4)}$$

उपनति रेखा या वक्र का समायोजन करने की विभिन्न विधियाँ पहले ही दी जा चुकी हैं। ऋतुनिष्ठ विचरण ज्ञात करने के हेतु उपनति (उ०) का निरसन करना होता है अर्थात्

$$\frac{\text{प्रे०}}{\text{उ०}} = \text{ऋ०} \times \text{च०} \times \text{अ०} \quad \text{....(16.4 1)}$$

चक्रीय तथा अनियमित विचरणज्ञात करने के हेतु उपनति और ऋतुनिष्ठ विचरण दोनों का ही निरसन करना होता है अतः

$$\frac{\text{प्रे०}}{\text{उ०} \times \text{ऋ०}} = \text{च०} \times \text{अ०} \quad \text{....(16 4 2)}$$

ऊपर दिये तीनों सम्बन्धों से काल श्रेणी विश्लेषण के मूल सिद्धान्त का ज्ञान हो जाता है। इसी सिद्धान्त के आधार पर विभिन्न विधियों का अन्वेषण हुआ है।

सब विधियों में गुण एवं दोष दोनों विद्यमान हैं। अतः किसी काल श्रेणी के अनुसार जो भी विधि उपयुक्त प्रतीत हो उसका प्रयोग करना चाहिये। इस अध्याय में दी गई विधियों के अतिरिक्त अन्य विधियों का प्रयोग किया जाता है। सब विधियों का एक अध्याय में समावेश करना सम्भव नहीं है अतः कुछ मुख्य विधियों का ही इस अध्याय में वर्णन किया गया है।

प्रश्नावली

1 काल श्रेणी विश्लेषण द्वारा किन स्थितियों के विषय में हमें पता चलता है? इनमें से कुछ मुख्य-मुख्य स्थितियों का विवेचन कीजिये।

2. गतिमान माध्य विधि द्वारा ऋतुनिष्ठ सूचकांक ज्ञात करने के गुण एवं दोष बताइए।

3. उपनति रेखा या वक्र ज्ञात करने की सर्वोत्तम विधि बताइए और अपने उत्तर की तथ्यों के आधार पर पुष्टि कीजिये।

4. भारत वर्ष में विद्युत् शक्ति का उपभोग, 1962 से 1967 तक, निम्न प्रकार था :—

वर्ष	विद्युत का उपभोग (दस लाख kwh × 10^3)
1962	14·4
1963	18·7
1964	21·4
1965	24·2
1966	26·7
1967	29·1

न्यूनतम वर्ग-विधि द्वारा उपनति रेखा का समजन कीजिये।

5. यह बताइये कि एक काल श्रेणी के संघटक क्या-क्या हैं ? इस श्रेणी के विघटन करने की एक विधि का वर्णन कीजिये। यह भी बताइये कि कालिक और अकालिक संघटक क्या हैं ? (बी० एस० मद्रास, 1970)

6. भारत में नाईलौन का उत्पादन 1962 में प्रारम्भ हुआ। उस वर्ष से सन् 1969 तक के नाईलौन के धागे का उत्पादन निम्न सारणी में दिया गया है :—

वर्ष	उत्पादन (दस लाख किलोग्राम में)
1962	0·18
1963	0·74
1964	1·18
1965	1·48
1966	1·92
1967	2·45
1968	5·30
1969	7·89

(1) उपर्युक्त न्यास के लिए उपनति रेखा या वक्र जो, उपयुक्त हो, समजन कीजिये।

(2) आलेखन चित्र बनाकर सन् 1975 के लिए नाइलौन के धागे के उत्पादन की प्रागुक्ति कीजिये।

7. निम्न सारणी के लिए माध्य ऋतुनिष्ठ विचरण का परिकलन कीजिये :—

वर्ष	त्रैमासिक मृत्यु-संख्या (हजार व्यक्तियों में)			
	I	II	III	IV
1958	3·5	3·9	3·4	3·6
1959	3·5	4·1	3·7	4·0
1960	3·5	3·9	3·7	4·2
1961	4·0	·6	3·8	4·5
1962	4·1	4·3	4·2	4·5

(आइ० सी० डब्ल्यू० ए० 1963)

8 खाद्य पदार्थों के व्यापार से प्राप्त धन राशि निम्न सारणी में दी गई है :—

मास	वर्ष		
	1961	1962	1963
जनवरी	51·3	61·5	55·9
फरवरी	27·4	26·3	28·4
मार्च	27·3	24·1	21·5
अप्रैल	22·4	21·4	23·1
मई	32·8	29·8	27·0
जून	29·7	28·9	25·3
जुलाई	32·3	32·0	26·7
अगस्त	34·1	29·8	28·6
सितम्बर	47·7	61·7	51·6
अक्टूबर	76·0	82·8	74·7
नवम्बर	77·1	55·8	57·9
दिसम्बर	55·9	63·8	58·5

ऋतुनिष्ठ विचरण ज्ञात कीजिये। (बी० कॉम० बम्बई, 1967)

9 निम्न कोयला उत्पादन सम्बन्धी काल श्रेणी से पाँच वर्षीय चल माध्य लेकर परिवर्तन माध्य विधि द्वारा उपनति मान ज्ञात कीजिए। यदि चार वर्षीय चल माध्य को लिया जाए तो इस स्थिति में अपनाई गई विधि का विवरण संक्षेप में दीजिये। कोई व्यक्ति 'परिवर्तित माध्य' के स्थान का किस आधार पर चयन करता है?

वर्ष	उत्पादन (दस लाख टन)	वर्ष	उत्पादन (दस लाख टन)
1901	351	1907	410
1902	366	1908	420
1903	361	1909	450
1904	362	1910	500
1905	400	1911	518
1906	419	1912	455

वर्ष	उत्पादन (दस लाख टन)
1913	502
1914	540
1915	557
1916	571
1917	586
1918	612

(दिल्ली, बी० ए० ऑनर्स, 1968)

10 एक निश्चित क्षेत्र में प्रति दिन डाले गये पत्रों की संख्या चार सप्ताह के लिये निम्न सारणी में दी गई है। यह कल्पना की गई है कि एक काल में उपनति वही रहती है तो ऋतुनिष्ठ सूचकांक (प्रति दिन सूचकांक) कुल माध्य के प्रतिशत के रूप में ज्ञात कीजिये।

सप्ताह	रविवार	सोमवार	मंगलवार	बुधवार	बृहस्पतिवार	शुक्रवार	शनिवार	योग
1	18	161	170	164	153	181	76	923
2	18	165	169	147	158	190	[illegible]	927
3	21	162	169	153	145	190	82	922
4	20	165	170	155	150	180	85	925

11 निम्न सारणी के लिये ऋतुनिष्ठ सूचकांक ज्ञात कीजिये।

ऋतु	*1960*	*1961*	*1962*	*1963*	*1964*
त्रैमासिक 1	40	42	41	45	44
,, 2	35	37	35	36	38
,, 3	38	39	38	36	38
,, 4	40	38	42	41	42

(बी॰ कॉम॰ आगरा, 1968)

इस सूचकांक को शृंखलिक आपेक्षिक विधि द्वारा ज्ञात कीजिये।

टिप्पणी प्रश्नावली में दिये परीक्षाओं के सब प्रश्न मूल रूप में अंग्रेज़ी भाषा में थे जिनका यहाँ हिन्दी अनुवाद दिया गया है।)

□□□

17 | अन्तर्वेशन और बहिर्वेशन

सामान्य कार्यों के करते समय प्रायः ऐसी स्थिति सामने आती है कि सस्यात्मक सूचना, प्रेक्षित श्रेणी या एक सारणी में आवश्यकता के अनुसार कुछ मान विद्यमान नहीं होते हैं। ये मान दिये हुए मानों के अन्तर्वर्ती (Intermediate) मान होते हैं या श्रेणी के परास के बाहर के मान होते हैं या भविष्य के लिये किसी X मान के तदनुसार मान की प्रागुक्ति करने के लिये ज्ञात करने होते है। इन अन्तर्वर्ती और आगामी मानों के आकलन करने की विधि को क्रमशः अन्तर्वेशन और बहिर्वेशन कहते हैं। जैसे भारत में जनगणना प्रत्येक दस वर्षों के पश्चात् होती है। यदि इन दस वर्षों के किसी बीच के वर्ष में जनसंख्या जानना हो तो अन्तर्वेशन एक उपाय है। जैसे जनसंख्या 1931, 1941, 1951, 1961, 1971 के लिये ज्ञात है। परन्तु 1965 (या अन्य अन्तर्वर्ती वर्ष) की जनसंख्या जानना हो तो अन्तर्वेशन का प्रयोग करके जान सकते है। योजनाओं की रूपरेखा तैयार करते समय प्राय. यह भी जानना होता है कि अगले पाँच (या अन्य आगामी कुछ वर्षों में) वर्ष बाद जनसंख्या कितनी हो जायेगी अर्थात् 1976 की जनसंख्या का आकलन बहिर्वेशन द्वारा कर सकते हैं। इसी प्रकार अन्तर्वेशन की आवश्यकता बहुधा सांख्यिकीय सारणी द्वारा किसी निश्चित स्वतन्त्रता कोटि या सार्थकता स्तर पर वह मान ज्ञात करने के लिये होती है जो कि सारणी में नहीं दिये हैं। अन्तर्वेशन का प्रयोग अप्राप्त मानों का आकलन करने के लिये भी किया जाता है। न्यास में यदि कुछ मान छूट गये हो तो उनका आकलन करके न्यास को पूरा करने में भी यह विधि सहायक होती है।

यह ध्यान रखना चाहिये कि अन्तर्वेशन या बहिर्वेशन द्वारा प्राप्त मान किसी प्रकार भी वास्तविक मान नहीं है। यह तो केवल आकलित मान है जिनका कि वास्तविक मानों से भिन्न होना स्वाभाविक है। उत्तम विधि का प्रयोग करके इन आकलकों के यथा सम्भव परिशुद्ध मान ज्ञात करना ही सांख्यिकी-विद् के ज्ञान का सूचक है।

अन्तर्वेशन की शुद्धता दिये हुए न्यास में समय या अन्य किसी स्वतन्त्र चर के अनुसार, विद्यमान उतार-चढ़ाव (fluctuations) पर आधारित होती है। इन उतार-चढ़ाव को न्यास का निरीक्षण करके जान सकते हैं। इसके अतिरिक्त उन घटनाओं को भी विचार में रखना चाहिये जो कि उस समय पर संख्या को प्रभावित कर सकती हों। यदि उतार-चढ़ाव या सम्बद्ध घटनाएँ हों तो उनके अनुसार न्यास में समायोजन करके अधिक विश्वासनीय तथा शुद्ध आकलन प्राप्त किये जाते हैं।

अन्तर्वेशन या बहिर्वेशन की समस्या को सांख्यिकीय भाषा में पाठक इस प्रकार समझ सकते हैं। किसी भी अध्ययन में दो चर X व Y हैं। माना चर X स्वतन्त्र चर है और Y एक आश्रित चर है। X पर ज्ञात प्रेक्षण $X_1, X_2, X_3 ..., X_{i-1}, X_{i+1} ... X_n$ हैं और तदनुसार Y पर प्रेक्षण $Y_1, Y_2, Y_3 ..., Y_{i-1}, Y_{i+1} ... Y_n$ हैं तो अन्तर्वेशन से अभिप्राय

किसी मान X_k (जबकि $k<n$ और $i<k<i+1$, $i=1, 2, 3, \cdots n-1$) के तदनुसार आश्रित चर Y_k के मान का आकलन करता है। बहिर्वेशन की स्थिति में $k>n$ होता है अर्थात् यह दिये हुए X मानों के अन्तिम मान के बाद या प्रारम्भिक मान से पूर्व के किसी मान को निरूपित करता है।

अन्तर्वेशन और बहिर्वेशन के लिए कल्पनाएँ

(क) यह कल्पना की गई है कि समयानुसार चर X के अनुसार प्रेक्षण में अकस्मात् परिवर्तन नहीं हुए हैं अर्थात् मान Y लगभग समान दर से ही बढ़ या घट रहे हैं। जैसे किसी अन्तर्वर्ती वर्ष के लिए अन्तर्वेशन द्वारा जनसंख्या का आकलन करने में यह कल्पना की गई है कि सम्पूर्ण काल में जनसंख्या-वृद्धि दर समान रहती है और बहिर्वेशन करने में यह कल्पना करनी होगी कि अगले वर्षों में भी वृद्धि दर यही रहेगी। किन्तु यह कल्पना कम स्थितियों में सत्य पाई जाती है जिससे परिणाम स्वरूप आकलन शुद्ध नहीं होते हैं।

(ख) अन्य कल्पना यह है कि श्रेणी में किसी प्रकार की प्लुति (jump) नहीं है अर्थात् श्रेणी में एक प्रकार से सातत्य है। जैसे जनसंख्या सम्बन्धी आँकड़ों में यह माना गया है कि दिये हुए काल के मध्य में किसी युद्ध या प्राकृतिक विपत्ति (अकाल, बीमारी फैलने या भूकम्प आदि) के कारण देश की जनसंख्या अकस्मात् कम नहीं हुई थी। साथ ही किसी परिस्थिति में विदेशों से लोगों के देश में आने के कारण जनसंख्या में अकस्मात् वृद्धि नहीं हुई थी।

उपज सम्बन्धी आँकड़ों में किसी वर्ष में सूखा, बाढ़ या युद्ध आदि के कारण कुल पैदावार अत्यधिक कम नहीं हुई थी।

अन्तर्वेशन और बहिर्वेशन के लिए विधियाँ

अन्तर्वेशन विधियों को दो वर्गों में विभाजित किया जा सकता है जो कि निम्न हैं :—

(1) लेखाचित्रीय विधि (Graphic method)

(2) बीजीय विधियाँ (Algebraic methods)

लेखाचित्रीय विधि इस विधि के अन्तर्गत स्वतन्त्र चर X को भुजा अक्ष और आश्रित चर Y को कोटि अक्ष पर लेकर युग्म प्रेक्षण बिन्दुओं (X_i, Y_i) (जहाँ $i=1, 2, 3, \ldots, n$) को ग्राफ पेपर पर आलेखित कर दिया जाता है और इन आलेखित बिन्दुओं को मिला देते हैं। यह बिन्दु एक सरल रेखा पर या वक्र पर स्थित होते हैं। यदि यह लेखाचित्र एक सरल रेखा है तो X के किसी भी अन्तर्वर्ती मान के लिए अन्तर्वेशन इस प्रकार करते हैं। भुजा अक्ष के इस बिन्दु X पर Y अक्ष के समान्तर एक रेखा खींचो और इसे इतना ऊपर तक ले जाते हैं कि यह आलेखित रेखा को काट दे। इस कटान बिन्दु का Y निर्देशांक दिये हुए X मान के लिए अन्तर्वेशित मान होता है। इसी प्रकार आलेखित चित्र यदि वक्र हो तो वक्र सरलन (Smoothing of curve) कर देना चाहिये जिससे कि दी हुई कल्पनाएँ सत्य रहें। अब भुजा अक्ष से X बिन्दु पर Y-अक्ष के समान्तर रेखा खींचते हैं

जो कि वक्र को किसी विन्दु पर काटती है। इस कटान विन्दु के Y निर्देशांक को पढ़कर X के तदनुसार अन्तर्वेशित मान ज्ञात कर लिए जाते हैं।

बहिर्वेशन : उपर्युक्त विधि द्वारा बहिर्वेशन के लिए रेखा या वक्र को उपनति (trend) की दिशा में बढा दिया जाता है जिससे कि भुजा अक्ष के X बिन्दु पर लम्ब, रेखा या वक्र को काट सके। इस कटान विन्दु का Y निर्देशाक ही वहिर्वेशित मान होता है।

लेखाचित्रीय विधि के गुण एवं दोष .—यह विधि क्रियात्मक दृष्टि से सरलतम है। लेखाचित्रीय विधि द्वारा अन्तर्वेशन के लिए परिणाम बहिर्वेशन की अपेक्षा अधिक परिशुद्ध होते हैं। इस विधि का दोष यह है कि कम विन्दु होने की स्थिति में वक्र के सही रूप का पता नही चलता है अत. आकलित मान अशुद्ध हो जाते हैं। यदि Y के मान बड़े हों तो Y–अक्ष पर मापक्रम लघु लेना पड़ता है। इसके कारण सन्निकट-त्रुटि बढ़ जाती है। जैसे यदि जनसख्या लाखों या करोड़ो में दी गई है जो किंचित मात्र भी सन्निकटन के कारण Y–मान मे अधिक अन्तर पड जाता है।

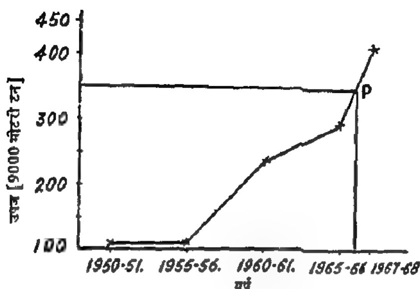
उदाहरण 17.1 :—भारत में 1950 से 1968 तक धान की उपज कुछ वर्षों के लिए निम्न प्रकार हुई थी :—

वर्ष (X)	धान की उपज (Y) (,000 मीटरी टन)
1950–51	107
1955–56	107
1960–61	236
1965–66	293
1967–68	415

वर्ष 1966–67 मे धान की उपज लेखाचित्रीय विधि द्वारा निम्न प्रकार ज्ञात कर सकते हैं :—

वर्षों को X–अक्ष पर तथा उपज को Y–अक्ष की ओर लिया। X–अक्ष व Y–अक्ष की ओर उचित रैखनी मानकर बिन्दुओं को आलेखित कर दिया। इन बिन्दुओं को क्रम में मिला दिया। इस प्रकार एक रेखीय चित्र प्राप्त हो गया। अब वर्ष 1966–67 के विन्दु पर Y–अक्ष के समान्तर रेखा खींची जो कि रेखीय चित्र को P पर काटती है। P का Y निर्देशाक ही 1966–67 के लिए अन्तर्वेशित मान है।

अतः 1966–67 के लिए अन्तर्वेशित मान $\hat{Y}=350$ (000, मीटरी टन)



चित्र 17–1 लेखाचित्रीय विधि द्वारा अन्तर्वेशन

बीजीय विधियाँ

(1) रेखा या वक्र समंजन विधि इस विधि के अन्तर्गत पहले स्वतन्त्र चर X और आश्रित चर Y में रैखीय या वक्ररेखी सम्बन्ध स्थापित करना होता है। यहाँ वक्र के स्वरूप को निश्चित करने के लिए सरल सा नियम है कि जितनी प्रेक्षणों की संख्या होती है उससे एक कम घात के समीकरण को लिया जाता है। अतः वक्र के समंजन के हेतु K घातीय समीकरण को निम्न रूप से लिख सकते हैं :—

$$Y = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \ldots + a_kX^k \qquad \ldots(17.1)$$

यदि k = 1 हो तो उपर्युक्त समीकरण एक रेखा को निरूपित करती है यदि k > 2 तो यह समीकरण वक्र को निरूपित करती है।

यहाँ रेखा या वक्र को समंजित करने की विधि इस प्रकार है। काल श्रेणी विश्लेषण में उपनति ज्ञात करने की भाँति, यहाँ भी मध्य के काल (स्वतन्त्र चर को 0 मान लिया जाता है। यदि कालों की संख्या विषम हो तो इससे पूर्व के कालों को क्रमश –1, –2, –3,.... और मध्य काल के बाद के कालों को 1, 2, 3 ... मान लिया जाता है। यदि कालों की संख्या सम हो तो इसके लिए मान –·5, –1·5, –2·5,.. व ·5, 1·5, 2·5,.... मान लिये जाते हैं। X के मान व तदनुसार Y के मान को समीकरण में रखने पर एक समीकरण ज्ञात हो जाता है। इसी प्रकार X व Y के विभिन्न मानों को रखने पर अन्य समीकरण ज्ञात हो जाते हैं। इन समीकरणों को हल करने पर अचरों a_0, a_1, a_2,.... आदि के मान ज्ञात हो जाते हैं। इस समीकरण को निर्धारित करने के बाद X के किसी भी मान के लिए Y का आकलित मान ज्ञात किया जा सकता है।

अन्तर्वेशन या बहिर्वेशन के लिए इस विधि का प्रयोग केवल उस स्थिति में किया जा सकता है अर्थात् X के मान समान अन्तराल से बढ़ रहे हों।

उदाहरण 17.2 : राजस्थान में चालू बीमा पत्रों की संख्या (हज़ारों में) तीन वर्षों मे निम्न प्रकार थी :—

वर्ष (X)	1965	1967	1969
बीमा पत्रों की संख्या (Y) (हज़ारों मे)	180	210	230

उपर्युक्त तीन प्रेक्षणो के लिए द्विघात समीकरण को लेना होगा। इस समीकरण का समंजन करके 1966 व 1970 के लिए आकलित मान निम्न प्रकार ज्ञात कर सकते हैं :—

माना कि द्विघात समीकरण,

$$Y=a_0+a_1X+a_2X^2.$$

है। यहाँ X व Y के मान दी गई विधि के अनुसार निम्न होंगे :—

वर्ष	X	Y
1965	−2	180
1967	0	210
1969	2	230

X व Y के मान रखने पर

$$180=a_0-2\,a_1+4\,a_2 \quad \ldots(1)$$

$$210=a_0 \quad \ldots(2)$$

$$230=a_0+2\,a_1+4\,a_2 \quad \ldots(3)$$

समीकरण (3) में से (1) घटाने पर,

$$4\,a_1=50$$

$$a_1=12.5$$

a_0 व a_1 का मान समीकरण (1) में रखने पर,

$$180=210+12.5\times(-2)+4\,a_2$$

$$180=210-25+4\,a_2$$

$$4\,a_2=-5$$

या $a_2=-5/4$

अतः परवलय का समीकरण,

$$Y=210+12.5\,X-1.25\,X^2$$

है। 1966 के लिए बीमा पत्रों की संख्या का आकलन करने के लिए, $X=-1$ मान

$$\hat{Y}=210-12{\cdot}5\times1-1{\cdot}25\times1$$

$$=196{\cdot}25$$

अतः 1966 के लिए चालू बीमा पत्रों की संख्या = 196·25 हजार

(नोट : पाठक को विदित हो कि 1966 में बीमा पत्रों की वास्तविक संख्या 198 हजार थी)

वर्ष 1970 के लिए $X=3$,

$$\hat{Y}=210+12{\cdot}5\times3-1{\cdot}25\times9$$

$$=236{\cdot}25 \text{ हजार}$$

अतः 1970 में चालू बीमा पत्रों की आकलित संख्या = 236·25 हजार है।

(2) अन्तर्वेशन की द्विपद-विस्तार विधि : इस विधि का प्रयोग उस स्थिति में सम्भव है जबकि प्रेक्षण समान अन्तराल से बढ़े रहे हों। यदि प्रेक्षण अवरोही क्रम में दिये हों तो इन्हें पुनः व्यवस्थित करके आरोही क्रम में कर देना चाहिये। इस विधि में व्यंजक $(y-1)^n$ का द्विपद विस्तार करते हैं और इसे शून्य के समान रख देते हैं। यहाँ n पर Y पर ज्ञात प्रेक्षित मानों की संख्या है और Y_i, $(i=0, 1, 2, 3, \ldots, n)$ आरोही श्रेणी में X के तदनुसार Y मानों को निरूपित करता है।

माना $(Y-1)^n=\Delta^n_0$

अतः $$\Delta^n_0=(Y-1)^n=Y^n-\binom{n}{1}Y^{n-1}+\binom{n}{2}Y^{n-2}+(-1)^r\binom{n}{r}Y^{n-r}+(-1)^nY^0=0 \quad \ldots(17.2)$$

$$=Y_n-nY_{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}Y_{n-2}+\ldots(-1)^r\frac{n!}{(n-r)!\,r!}Y_{n-r}+\ldots+(-1)^nY_0=0 \quad \ldots(17.2.1)$$

यदि

$$n=3,\ \Delta^3_0=Y_3-3Y_2+3Y_1-Y_0=0 \quad \ldots(17.3)$$

$$n=4,\ \Delta^4_0=Y_4-4Y_3+6Y_2-4Y_1+Y_0=0 \quad \ldots(17.4)$$

$$n=5;\ \Delta^5_0=Y_5-5Y_4+10Y_3-10Y_2+5Y_1-Y_0=0 \quad \ldots(17.5)$$

$$n=6;\ \Delta^6_0=Y_6-6Y_5+15Y_4-20Y_3+15Y_2-6Y_1+Y_0=0 \quad \ldots(17.6)$$

इस विधि का मुख्य दोष यह है कि Y का आकलन, X के उन मान के तदनुसार कर सकते हैं जोकि श्रेणी के बीच में हों। अतः स्पष्ट है कि द्विपद विस्तार विधि द्वारा बहिर्वेशन करना सम्भव नहीं है।

उदाहरण 17.3 X व Y के दिये हुए न्यास मे Y_3 का आकलन निम्न प्रकार करते हैं—

X	Y	Y_i
3	14	Y_0
6	11	Y_1
9	18	Y_2
12	?	Y_3
15	20	Y_4
18	20	Y_5

ऊपर दिये हुए उदाहरण में n=5 है और Y_3 का आकलित मान निम्न प्रकार ज्ञात कर सकते हैं—

$$\Delta^5_0 = Y_5 - 5Y_4 + 10Y_3 - 10Y_2 + 5Y_1 - Y_0 = 0$$

$$= 20 - 5\times 20 + 10Y_3 - 10\times 18 + 5\times 11 - 14 = 0$$

$$\therefore \quad 10Y_3 = 219$$

$$Y_3 = 21{\cdot}9$$

अत X=12 के लिए Y का आकलित मान 21·9 है।

दो या दो से अधिक अज्ञात मानों 'Y' का आकलन

यदि दो या दो से अधिक Y के मान अज्ञात हों तो इनका आकलन करने के लिए अज्ञात मानों की संख्या के समान समीकरणों की आवश्यकता होती है। अत समीकरणों Δ^n_0, Δ^{n-1}_0, Δ^{n-2}_0, को शून्य के समान रखकर हल करने से अज्ञात मान प्राप्त हो जाते हैं। यदि दो मान अज्ञात हों तो केवल $\Delta^n_0=0$ और $\Delta^{n-1}_0=0$ रखकर दो समीकरण प्राप्त हो जाते हैं जिनको हल करके अज्ञात Y मानों के आकलित मान द्विपद विस्तार विधि द्वारा ज्ञात हो जाते हैं।

उदाहरण 17.4 निम्न सारणी मे बच्चों की आयु तथा उनकी ऊँचाई दी गई है—

आयु वर्षों में	X	ऊँचाई (से०मी० में)	Y
2	X_0	48	Y_0
4	X_1	55	Y_1
6	X_2	?	Y_2
8	X_3	95	Y_3
10	X_4	?	Y_4
12	X_5	112	Y_5

8 वर्ष तथा 10 वर्ष आयु के बच्चों की ऊँचाई का आकलन द्विपद विस्तार विधि द्वारा निम्न प्रकार कर सकते हैं—

यहाँ Y के दो मान अज्ञात हैं अतः दो समीकरणों का लेना होगा। यहाँ इसके लिए Δ^4_0 व Δ^5_0 लेना उपयुक्त है। समीकरण (17.3) व (17.4) द्वारा,

$$Y_4 - 4Y_3 + 6Y_2 - 4Y_1 + Y_0 = 0 \qquad ...(1)$$

$$Y_5 - 5Y_4 + 10Y_3 - 10Y_2 + 5Y_1 - Y_0 = 0 \qquad ...(2)$$

समीकरण (1) व (2) में Y के मान रखने पर,

$$Y_4 - 4\times95 + 6\times Y_2 - 4\times55 + 48 = 0$$

$$Y_4 + 6Y_2 = 552 \qquad ...(3)$$

$$112 - 5Y_4 + 10\times95 - 10Y_2 + 5\times55 - 48 = 0$$

$$5Y_4 + 10Y_2 = 1289 \qquad ...(4)$$

समीकरण (3) व (4) को हल करने पर,

$$5Y_4 + 30Y_2 = 2760$$

$$5Y_4 + 10Y_2 = +1289$$

$$- \quad - \quad -$$

$$20Y_2 = 1471$$

$$\therefore \quad \hat{Y}_2 = 73.6$$

$\hat{Y}_2$ का मान समीकरण (4) में रखने पर,

$$5\hat{Y}_4 = 1122 - 736$$

$$\hat{Y}_4 = \frac{386}{5} = 60.6$$

(3) न्यूटन की विधियाँ

(क) न्यूटन की अग्रगामी अन्तर विधि—इस विधि का प्रयोग उस स्थिति में हो सकता है जबकि स्वतन्त्र चर के मान समान्तर श्रेणी में आरोही क्रम में हो। इसके द्वारा अन्तर्वेशन और वहिर्वेशन दोनों ही किये जा सकते हैं अर्थात् Y का आकलन X के किसी भी मान के लिए किया जा सकता है। यह विधि इस सिद्धान्त पर आधारित है कि दिए हुए Y के प्रेक्षणों से अन्तर ज्ञात किये जा सकते हैं और इन अन्तरों की सहायता से Y के मानों का आकलन किया जा सकता है। अतः इस विधि के अन्तर्गत एक अन्तरों की सारणी बनानी होती है और इन अन्तरों को न्यूटन के सूत्र में रखकर दिये हुए X के लिए Y का आकलन कर लिया जाता है।

माना कि पाँच युग्म प्रेक्षण (X_0, Y_0), (X_1, Y_1), (X_2, Y_2), (X_3, Y_3), (X_4, Y_4) दिये हुए हैं।

(सारणी 17.1) अन्तरों के लिए सारणी जबकि पाँच प्रेक्षण ज्ञात हैं

X	Y	अन्तर (Δ)			
		Δ^1	Δ^2	Δ^3	Δ^4
X_0	Y_0				
		$Y_1 - Y_0 = \Delta^1_0$			
X_1	Y_1		$\Delta^1_1 - \Delta^1_0 = \Delta^2_0$		
		$Y_2 - Y_1 = \Delta^1_1$		$\Delta^2_1 - \Delta^2_0 = \Delta^3_0$	
X_2	Y_2		$\Delta^1_2 - \Delta^1_1 = \Delta^2_1$		$\Delta^1_1 - \Delta^3_0 = \Delta^4_0$
		$Y_3 - Y_2 = \Delta^1_2$		$\Delta^2_2 - \Delta^2_1 = \Delta^3_1$	
X_3	Y_3		$\Delta^1_3 - \Delta^1_2 = \Delta^2_2$		
		$Y_4 - Y_3 = \Delta^1_3$			
X_4	Y_4				

इसी प्रकार की आगामी क्रियायें भी सूत्र अन्तरों के लिए तैयार की जा सकती हैं। यदि पद n हों तो Δ की संख्या (n−1) होगी अर्थात् अन्तर $\Delta^1, \Delta^2, \Delta^3 \dots, \Delta^{n-1}$ ज्ञात करने होंगे। तालिका में दिये हुए अन्तरों को निम्न सूत्र में रखकर Y का प्राक्कलित मान ज्ञात कर सकते हैं :—

$$\hat{Y} = Y_0 + \binom{x}{1}\Delta^1_0 + \binom{x}{2}\Delta^2_0 + \binom{x}{3}\Delta^3_0 + \dots + \binom{x}{k}\Delta^k_0 \quad \dots(17.7)$$

जहाँ $k = 1, 2, 3, 4, \dots$

Y_0 आश्रित श्रेणी के पहला प्रेक्षित मान है।

$\hat{Y}$ वह मान है जिसका दिये हुए X के लिए प्राक्कलन करना है और तथा

$$x = \frac{(\text{X का वह मान जिसके लिए आश्रित श्रेणी में Y का प्राक्कलन करना है}) - \text{X का पहला मान } (X_0)}{\text{दो X मानों का अन्तर}}$$

$$= \frac{X' - X_0}{X_1 - X_0} \quad \dots(17.8)$$

इस विधि का प्रयोग उस स्थिति में उपयुक्त है जबकि X का वह मान जिसके लिए अन्तर्वेशन करना है श्रेणी के प्रारम्भ में ही हो। इसका कारण यह है कि सूत्र (17.7) में केवल अग्रग अन्तरों (Leading differences) का ही प्रयोग किया गया है। अतः इस विधि द्वारा Y का प्राक्कलित मान, X के उन मान के लिए जो श्रेणी के मध्य या अन्त में हों या बहिर्वेशन के लिए अनुपयुक्त होता है।

उदाहरण 17.5 : एक कक्षा में विद्यार्थियों के सांख्यिकी की परीक्षा में प्राप्त अंकों का वितरण निम्न प्रकार था —

प्राप्तांक : X	संचयी आवृत्ति : Y
30 से कम	2
40 से कम	5
50 से कम	17
60 से कम	31
70 से कम	35

उन विद्यार्थियों की संख्या जिनके प्राप्तांक 45 से कम हैं, न्यूटन की अग्रान्तर विधि द्वारा निम्न प्रकार ज्ञात कर सकते हैं —

पहले अन्तरों के लिए सारणी तैयार की,

X	Y	Δ^1	Δ^2	Δ^3	Δ^4
30	2				
		$\Delta^1_0=3$			
40	5		$\Delta^2_0=9$		
		$\Delta^1_1=12$		$\Delta^3_0=-7$	
50	17		$\Delta^2_1=2$		$\Delta^4_0=-5$
		$\Delta^1_2=14$		$\Delta^3_1=-12$	
60	31		$\Delta^2_2=-10$		
		$\Delta^1_3=4$			
70	35				

और $x=\frac{45-30}{40-30}=\frac{15}{10}=3/2$

सूत्र (17 7) द्वारा, X=45 के लिए Y का आकलित मान है

$$Y=2+\binom{3/2}{1}3+\binom{3/2}{2}9+\binom{3/2}{3}(-7)$$

$$+\binom{3/2}{4}(-5).$$

$$=2+3/2\ 3+\frac{3/2(3/2-1)}{1\ 2}\ 9+\frac{3/2(3/2-1)(3/2-2)}{1\cdot 2\ 3}(-7)$$

$$+\frac{3/2(3/2-1)(3/2-2)(3/2-3)}{1\ 2\ 3\ 4}(-5)$$

$$=2+9/4+27/8+7/16-15/128$$

$$=2+2\ 25+3\ 38+0\ 44-0\ 12$$

$$=7\ 95\simeq 8$$

अत विद्यार्थियो की संख्या, जिनके प्राप्तांक 45 से कम हैं, 8 है।

(ख) न्यूटन-गास की अग्रवर्ती विधि—यदि Y का आकलन, श्रेणी के बीच के किसी X–मान के लिए करना हो तो इन विधि का प्रयोग करना उचित है। इसके लिए भी मानो का समान्तर श्रेणी मे होना आवश्यक है। इस विधि द्वारा Y के आकलन के लिए सूत्र,

$$Y=Y_0+\binom{x}{1}\Delta^1_0+\binom{x}{2}\Delta^2_{-1}+\binom{x+1}{3}\Delta^3_{-1}+\binom{x+1}{4}\Delta^4_{-1}+\dots \quad \dots(17.9)$$

है। इस सूत्र मे अन्तर्वेशन के लिए दिये गये X–मान से पिछले मान को X_0 इससे पिछले मानो को क्रमश $X_{-1}, X_{-2}, X_{-3},$ आदि से निरूपित करते है और X_0 के बाद के

X-मानों को क्रमशः $X_1, X_2, X_3, \ldots$ द्वारा निरूपित करते हैं। इन X मानों के तदनुसार Y-मानों को $Y_0, Y_{-1}, Y_{-2}, Y_{-3}, \ldots$ और $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots$ द्वारा निरूपित करते हैं। अन्तरों $\Delta^1, \Delta^2, \Delta^3, \ldots$ के लिए सारणी न्यूटन की अग्रगामी अन्तर विधि के लिए दी गई सारणी की भाँति, तैयार कर ली जाती है। इस सारणी में $\Delta^1, \Delta^2, \Delta^3, \ldots$ आदि अन्तरों के स्तम्भ में अन्तर Δ^1_0, Δ^1_1 या $\Delta^2_0, \Delta^2_1, \Delta^3_1, \ldots$ में अनुलग्न 0, 1, 2, 3, ... के स्थान पर Y के तदनुसार अनुलग्न −2, −1, 0, 1, 2,.... प्रयोग किये जाते हैं। यह संकेतन विधि सारणी (17 2) का देख कर और स्पष्ट हो जायेगी।

यहाँ

$$x = \frac{\text{अन्तर्वेशन के लिए X का मान} - X_0 \text{ का मान जो इस स्थिति में हो}}{\text{X-मानों का समान्तर}} \quad \ldots(17.10)$$

सूत्र (17 9) में Y_0, x और अन्तरों के मानों का प्रतिस्थापन करके Y का परिकलन कर लिया जाता है। इस विधि द्वारा वही परिणाम प्राप्त होते हैं जो कि न्यूटन की अग्रगामी अन्तर विधि द्वारा प्राप्त होते हैं।

उदाहरण 17 6 माना कि फासफोरस की चार मात्राओं के लिए प्रति भूखण्ड (10 × 1 5 वर्ग मी०) भूसे का भार (किलोग्राम) निम्न प्रकार था —

फासफोरस की मात्रा (किलो प्रति हेक्टर) X	प्रति भूखण्ड भूसे का भार (किलोग्राम) Y
0	9.6
15	7.2
30	9.1
45	7.3

25 किलो प्रति हेक्टर फासफोरस की मात्रा के लिए भूसे की मात्रा का आकलन न्यूटन गास की पश्चवर्ती विधि द्वारा निम्न प्रकार ज्ञात कर सकते हैं —

सारणी 17.2 के अनुसार अन्तरों के लिए सारणी बनाई,

X	Y	अन्तर Δ^1	Δ^2	Δ^3
0 X_{-1}	9.6 Y_{-1}			
		$\Delta^1_{-1} = -2.4$		
15 X_0	7.2 Y_0		$\Delta^2_{-1} = 4.3$	
		$\Delta^1_0 = 1.9$		$\Delta^3_{-1} = -8.0$
30 X_1	9.1 Y_1		$\Delta^2_0 = 3.7$	
		$\Delta^1_1 = -1.8$		
45 X_2	7.2 Y_2			

(सारणी 17.2) अन्तरों के लिए सारणी जबकि $X_3 < X < X_4$ और केवल पाँच प्रेक्षण ज्ञात है

X	Y	सांकेतिक X	सांकेतिक Y	अन्तर Δ^1	अन्तर Δ^2	अन्तर Δ^3	अन्तर Δ^4
X_1	Y_1	X_{-2}	Y_{-2}	$Y_{-1} - Y_{-2} = \Delta^1_{-2}$			
X_2	Y_2	X_{-1}	Y_{-1}	$Y_0 - Y_{-1} = \Delta^1_{-1}$	$\Delta^1_{-1} - \Delta^1_{-2} = \Delta^2_{-2}$	$\Delta^2_{-1} - \Delta^2_{-2} = \Delta^3_{-2}$	
X_3	Y_3	X_0	Y_0	$Y_1 - Y_0 = \Delta^1_0$	$\Delta^1_0 - \Delta^1_{-1} = \Delta^2_{-1}$	$\Delta^2_0 - \Delta^2_{-1} = \Delta^3_{-1}$	$\Delta^3_{-1} - \Delta^3_{-2} = \Delta^4_{-2}$
X_4	Y_4	X_1	Y_1	$Y_2 - Y_1 = \Delta^1_1$	$\Delta^1_1 - \Delta^1_0 = \Delta^2_0$		
X_5	Y_5	X_2	Y_2				

सूत्र (17.10) द्वारा,

$$x = \frac{25-15}{15} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

अतः सूत्र (17.9) द्वारा Y का अन्तर्वेशित मान,

$$\hat{Y} = 7.2 + \binom{2/3}{1} 1.9 + \binom{2/3}{2} \times 4.3 + \binom{2/3+1}{3} \times (-8.0)$$

$$= 7.2 + 2/3 \times 1.9 + \frac{2/3(2/3-1)}{1.2} \times .3$$

$$+ \frac{(2/3+1)(2/3)(2/3-1)}{1.2 \cdot 3} \times (-8.0)$$

$$= 7.2 + 1.27 - \frac{4.3}{9} + \frac{40}{81}$$

$$= 7.20 + 1.27 - 0.48 + .50$$

$$= 8.49$$

अतः अन्तर्वेशन द्वारा प्राप्त Y का, X=25 के तदनुसार, आकलित मान 8.49 किलो प्रति भूखण्ड है।

(ग) न्यूटन गास प्रत्यय विधि—इस विधि का प्रयोग उस स्थिति में करते हैं जबकि Y का आकलन X के उस मान के लिए करना हो जो श्रेणी के अन्तर के बीच का मान हो। इस विधि के लिए भी X के मानों में समान अन्तराल होना आवश्यक है।

Y के आकलन के लिए सूत्र है :—

$$\hat{Y} = Y_0 - \binom{x}{1}\Delta^1_{-1} + \binom{x+1}{2}\Delta^2_{-1} - \binom{x+1}{3}\Delta^3_{-2} + \binom{x+1}{4}\Delta^4_{-3} - \cdots \quad \ldots(17.11)$$

अन्तर्वेशन के लिए दिये हुए X के तुरन्त बाद श्रेणी में आने वाले मान को X_0 माना जाता है और इसके तदनुसार Y का मान Y_0 लिया जाता है। अन्तरों Δ के ज्ञात करने के लिए सारणी (17.3) बनाते हैं।

यहाँ

$$x = \frac{X_0 \text{ का मान जो इस स्थिति में हो} - X \text{ का वह मान जिसके लिए अन्तर्वेशन ज्ञात करना हो}}{X \text{ मानों में समान्तर}} \quad \ldots(17.12)$$

सूत्र (17.11) में विभिन्न पदों के मान रखकर Y के मान का परिकलन कर लेते हैं।

(सारणी 17.3) अन्तरों के लिए सारणी जबकि $X_1 < X < X_5$, तथा Y और X पर छः प्रेक्षण ज्ञात हैं

X	Y	सांकेतिक X	सांकेतिक Y	अन्तर Δ^1	Δ^2	Δ^3	Δ^4	Δ^5
X_1	Y_1	X_{-4}	Y_{-4}					
				$Y_{-3}-Y_{-4}=\Delta^1_{-4}$				
X_2	Y_2	X_{-3}	Y_{-3}		$\Delta^1_{-3}-\Delta^1_{-4}=\Delta^2_{-4}$			
				$Y_{-2}-Y_{-3}=\Delta^1_{-3}$		$\Delta^2_{-3}-\Delta^2_{-4}=\Delta^3_{-4}$		
X_3	Y_3	X_{-2}	Y_{-2}		$\Delta^1_{-2}-\Delta^1_{-3}=\Delta^2_{-3}$		$\Delta^3_{-3}-\Delta^3_{-4}=\Delta^4_{-4}$	
				$Y_{-1}-Y_{-2}=\Delta^1_{-2}$		$\Delta^2_{-2}-\Delta^2_{-3}=\Delta^3_{-3}$		$\Delta^4_{-3}-\Delta^4_{-4}=\Delta^5_{-4}$
X_4	Y_4	X_{-1}	Y_{-1}		$\Delta^1_{-1}-\Delta^1_{-2}=\Delta^2_{-2}$		$\Delta^3_{-2}-\Delta^3_{-3}=\Delta^4_{-3}$	
				$Y_0-Y_{-1}=\Delta^1_{-1}$		$\Delta^2_{-1}-\Delta^2_{-2}=\Delta^3_{-2}$		
X_5	Y_5	X_0	Y_0		$\Delta^1_0-\Delta^1_{-1}=\Delta^2_{-1}$			
				$Y_1-Y_0=\Delta^1_0$				
X_6	Y_6	X_1	Y_1					

उदाहरण 17.7 χ^2 बंटन के लिए दी गई एक सांख्यिकीय सारणी में 5% सार्थकता स्तर पर विभिन्न स्वतन्त्रता कोटि के लिए सारणीबद्ध मान निम्न प्रकार हैं —

स्वतन्त्रता कोटि X	सारणीबद्ध मान Y
10	18.31
22	33.92
34	48.60
46	62.83
58	76.78
70	90.53

55 स्व० को० के लिए χ^2 का सारणीबद्ध मान न्यूटन की पश्च विधि द्वारा निम्न प्रकार ज्ञात कर सकते हैं। सारणी (17.3) के समरूप अन्तरों की सारणी (17.4) बनाइये।

सूत्र (17.12) द्वारा

$$x=\frac{58-55}{12}=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$$

अतः X=55 के लिए Y का सूत्र (17.11) द्वारा आकलित मान

$$\hat{Y}=76.78-\binom{\frac{1}{4}}{1}\times 13.95+\binom{\frac{1}{4}+1}{2}\times(-0.20)-\binom{\frac{1}{4}+1}{3}\times(0.08)$$

$$+\binom{\frac{1}{4}+1}{4}\times(-.09)-\binom{\frac{1}{4}+1}{5}(0.22)$$

$$=76.78-\frac{13.95}{4}-\frac{(\frac{1}{4}+1)\,\frac{1}{4}}{1.2}\,(0.20)$$

$$-\frac{(\frac{1}{4}+1)\,\frac{1}{4}\,(\frac{1}{4}-1)}{1.2.3}\,(0.08)$$

$$-\frac{(\frac{1}{4}+1)\frac{1}{4}(\frac{1}{4}-1)(\frac{1}{4}-2)}{1.2.3.4}\quad(.09)$$

$$-\frac{(\frac{1}{4}+1)\frac{1}{4}(\frac{1}{4}-1)(\frac{1}{4}-2)(\frac{1}{4}-3)}{1.2.3.4.5}\times(0.22)$$

$$=76.78-3.49-\frac{1}{32}+\frac{.05}{16}$$

— अन्य लघु संख्याएँ जो कि उपेक्षणीय हैं।

सारणी 17.4 [सारणी (17.3) के समस्त अन्तरों के लिये सारणी]

X		Y		Δ^1	Δ^2	Δ^3	Δ^4	Δ^5
10	X_{-4}	18.31	Y_{-4}					
				$\Delta^1_{-4}=15{\cdot}61$				
22	X_{-3}	33.92	Y_{-3}		$\Delta^2_{-4}=-0.93$			
				$\Delta^1_{-3}=14.68$		$\Delta^3_{-4}=0.48$		
34	X_{-2}	48.60	Y_{-2}		$\Delta^2_{-3}=-0.45$		$\Delta^4_{-1}=-0.31$	
				$\Delta^1_{-2}=14{\cdot}23$		$\Delta^3_{-3}=0.17$		$\Delta^5_{-1}={\cdot}22$
46	X_{-1}	62.83	Y_{-1}		$\Delta^2_{-2}=-0.28$		$\Delta^4_{-3}=-{\cdot}09$	
				$\Delta^1_{-1}=13.95$		$\Delta^3_{-2}=0.08$		
58	X_0	76.78	Y_0		$\Delta^2_{-1}=-0.20$			
				$\Delta^1_0=13{\cdot}75$				
70	X_1	90.53	Y_1					

$=76{\cdot}78-3{\cdot}49-{\cdot}03+{\cdot}003$

$=73{\cdot}263$

न्यूटन की विभाजित अन्तर विधि इस विधि का प्रयोग उस स्थिति में करते हैं जब कि चर X में अन्तराल समान नहीं होता है। X के दिये हुए मान के लिए Y का आकलन निम्न सूत्र द्वारा करते हैं —

$$\hat{Y}=Y_0+(X-X_0)\delta^1_0+(X-X_0)(X-X_1)\delta^2_0$$
$$+(X-X_0)(X-X_1)(X-X_2)\delta^3_0+\ldots \qquad \ldots(17.13)$$

जब कि इस सूत्र में X वह मान है जिसके लिए Y का आकलन करना है। X_0, X_1, X_2 ... ...आरोही क्रम में चर के मान हैं और $\delta_0^1, \delta_0^2, \delta_0^3$....विभाजित अन्तरों के मान हैं जिनका परिकलन निम्न सारणी के अनुसार किसी भी स्थिति में कर सकते हैं।

(सारणी 17.5) विभाजित अन्तरों के लिए सारणी जबकि चार प्रेक्षण हैं

X	Y	Δ^1	Δ^2	Δ^3
X_0	Y_0			
		$\frac{Y_1-Y_0}{X_1-X_0}=\delta^1_0$		
X_1	Y_1		$\frac{\delta^1_1-\delta^1_0}{X_2-X_0}=\delta^2_0$	
		$\frac{Y_2-Y_1}{X_2-X_1}=\delta^1_1$		$\frac{\delta^2_1-\delta^2_0}{X_3-X_0}=\delta^3_0$
			$\frac{\delta^1_2-\delta^1_1}{X_3-X_1}=\delta^2_1$	
X_2	Y_2			
		$\frac{Y_3-Y_2}{X_3-X_2}=\delta^1_2$		
X_3	Y_3			

विभाजित अन्तरों की सारणी X प्रेक्षणों की किसी भी संख्या के लिए तैयार कर सकते हैं। सूत्र (17.13) का प्रयोग करके $\hat{Y}$ का दिये हुए X के मान के लिए परिकलन कर सकते हैं।

उदाहरण 17.8 *सहकारिता-आन्दोलन की प्रगति जानने के हेतु एक सर्वेक्षण द्वारा प्राप्त सहकारी समितियों की संख्या और अग्रिम कर्ज की राशि (दस लाख रुपयों में) निम्न थी :—*

सहकारी समितियों की संख्या X	अग्रिम कर्ज (दस लाख रुपया में) Y
26	50
52	111
83	120
93	170
101	211

हो। 90 सहकारी समितियों के लिए अग्रिम कर्ज की अनुमानित राशि न्यूटन की विभाजित अन्तर विधि द्वारा निम्न प्रकार सारणी (17.6) की सहायता से ज्ञात कर सकते हैं :—

सूत्र (17.13) द्वारा Y का आकलित मान,

$$\hat{Y} = 50 + (90-26)(2\cdot35) + (90-26)(90-52)(-0.041) + (90-26)(90-52)(90-83)(0.0024) + (90-26)(90-52) \times (90-83)(90-93)(-.00006)$$

$$= 50 + 150.40 - 99.712 + 17204 \times 0.0019 - 51072 \times (-.00006)$$

$$= 50 + 150.40 - 99.712 + 41.29 + 3.064$$

$$= 145\cdot04$$

अत. 90 सहकारी समितियों के लिए आकलित मान अग्रिम कर्ज की राशि 145·04 (दस लाख रुपये) है।

लग्रांज विधि : इस विधि द्वारा अन्तर्वेशन या बहिर्वेशन उस स्थिति में करना उपयुक्त है जबकि चर X के मान में अन्तराल असमान है। यह विधि न्यूटन की विभाजित अन्तर विधि जैसी है। X चर के किसी भी मान के लिए Y का आकलन निम्न लग्रांज सूत्र की सहायता से कर सकते हैं —

$$\hat{Y} = y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)\ldots(x_0-x_n)}$$

$$+ y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)\ldots(x_1-x_n)}$$

$$+ y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)\ldots(x-x_n)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)\ldots(x_2-x_n)}$$

$$+ y_3 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)\ldots(x-x_n)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)\ldots(x_3-x_n)} + \ldots\ldots$$

सारणी (17.6) : सारणी (17.5) की भाँति विभाजित अन्तरों के लिए निम्न सारणी तैयार की

X		Y		Δ^1	विभाजित अन्तर Δ^2	Δ^3	Δ^4
26	X_0	50	Y_0				
				$\frac{64}{26}=2\cdot35=\delta^1_0$			
52	X_1	111	Y_1		$\frac{-2\cdot32}{57}=-0\cdot041=\delta^2_0$		
				$\frac{9}{31}=0\cdot03=\delta^1_1$		$\frac{0\cdot162}{67}=\cdot0024=\delta^3_0$	
83	X_2	120	Y_2		$\frac{4\cdot97}{41}=0\cdot121=\delta^2_1$		$\frac{-\cdot0048}{75}=-\cdot00006=\delta^4_0$
				$\frac{50}{10}=5\cdot00=\delta^1_2$		$\frac{-0\cdot120}{49}=-\cdot0024=\delta^3_1$	
93	X_3	170	Y_3		$\frac{\cdot12}{18}=0\cdot0012=\delta^2_2$		
				$\frac{41}{8}=5\cdot12=\delta^1_3$			
101	X_4	211	Y_4				

$$+y_n\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)....(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)(x_n-x_2)....(x_n-x_{n-1})} \quad ....(17\ 14)$$

उपर्युक्त सूत्र मे x वह मान है जिसके लिए Y का आकलन करना है। $X_0, X_1, X_2, X_3 ...., X_n$ चर X पर दिये हुए आरोही क्रम में मान हैं और $y_0, y_1, y_2, y_3 ...., y_n$ चर Y पर $x_0, x_1, x_2, x_3 ....., x_n$ के तदनुसार ज्ञात मान हैं।

लग्राज सूत्र द्वारा X के किसी भी मान के लिए किन्हीं भी दिये हुए प्रेक्षणो की सहायता से Y का आकलन कर सकते हैं अर्थात् इस सूत्र के प्रयोग के लिए किसी प्रकार के प्रतिबन्ध नहीं हैं। फिर भी यह सूत्र कार्यविधि मे कठिन होने के कारण अधिक चलन मे नहीं है।

उदाहरण 17.9 निम्न सारणी मे एक वर्ष से कम आयु के बच्चो की आयु (महीनों में) और उनके तदनुसार भार दिए हुए हैं।

आयु (महीनो मे) X		भार (किलोग्राम मे) Y	
1	x_0	2 5	y_0
3	x_1	4 0	y_1
5	x_2	5·0	y_2
9	x_3	6·5	y_3
10	x_4	7 0	y_4

छ मास की आयु के बच्चे के भार का आकलन लग्राज-विधि द्वारा निम्न प्रकार कर सकते हैं :—

सूत्र (17 14) के अनुसार X=6 के लिए Y का आकलित मान,

$$Y=2\cdot5\times\frac{(6-3)(6-5)(6-9)(6-10)}{(1-3)(1-5)(1-9)(1-10)}$$

$$+4\ 0\times\frac{(6-1)(6-5)(6-9)(6-10)}{(3-1)(3-5)(3-9)(3-10)}$$

$$+5\cdot0\times\frac{(6-1)(6-3)(6-9)(6-10)}{(5-1)(5-3)(5-9)(5-10)}$$

$$+6\cdot5\times\frac{(6-1)(6-3)(6-5)(6-10)}{(9-1)(9-3)(9-5)(9-10)}$$

$$+7\ 0\times\frac{(6-1)(6-3)(6-5)(6-9)}{(10-1)(10-3)(10-5)(10-9)}$$

$$=2{\cdot}5\times\frac{1}{16}-4{\cdot}0\times\frac{5}{14}+5{\cdot}0\times\frac{9}{8}+6{\cdot}5\times\frac{5}{16}-7{\cdot}0\times\frac{1}{7}$$

$$=0{\cdot}156-1{\cdot}428+5{\cdot}625+2{\cdot}031-1$$

$$=5{\cdot}384$$

अतः 6 माह की आयु के बच्चों का आकलित भार 5·384 किलो है।

अन्तिम टिप्पणी अन्तर्वेशन या बहिर्वेशन का प्रयोग वाणिज्य एवं अर्थशास्त्र में अधिक होता है। जनगणना या अन्य देशव्यापी न्यास का प्रयोग करके किसी निश्चित काल में आश्रित पद का आकलन भी इस विधि द्वारा किया जा सकता है। आकलन के हेतु किसी भी विधि या सूत्र का प्रयोग न्यास के प्रकार पर निर्भर करता है। सूत्र का चयन करते समय सांख्यिकी विद् को पूर्ण सावधानी बरतनी चाहिये अन्यथा आकलनों के मान अशुद्ध प्राप्त होते हैं।

प्रश्नावली

1. बताइए कि अन्तर्वेशन और बहिर्वेशन में से किसके लिए आकलित मान अधिक परिशुद्ध होते हैं? अपने उत्तर की तथ्यों के आधार पर पुष्टि कीजिये।
2. न्यूटन की विधियों में से किस विधि द्वारा बहिर्वेशन कर सकते हैं? उस विधि का संक्षिप्त विवरण भी दीजिये।
3. अन्तर्वेशन तथा बहिर्वेशन के उपयोग बताइए।
4. जनगणना वर्षों के बीच के वर्षों के जनगणना का पता किस प्रकार लगा सकते हैं, उदाहरण सहित समझाइये।
5. *अमेरिका में मट्टी के कोयले का माध्य भाव (डालर प्रति टन) विभिन्न वर्षों में निम्न प्रकार था :*

वर्ष :	1951	1954	1957	1960
कोयले का भाव (डालर प्रति टन)	19·09	14·75	15·00	30·35

वर्ष 1956 में कोयले के माध्य भाव का आकलन कीजिये।

6. भारत राष्ट्र में औद्योगिक कार्य जानने वाले बेकार व्यक्तियों की संख्या विभिन्न वर्षों में निम्न थी :

वर्ष X	बेकारों की संख्या (,000 व्यक्ति) Y
1960	77·6
1962	109·6
1964	129·9
1966	152·4
1968	248·2

वर्ष 1967 तथा 1970 के लिए उचित विधियों का प्रयोग करके, बेकारों की संख्या का आकलन कीजिये।

7. कनाडा में खेती के अतिरिक्त अन्य काम करने वालों का साप्ताहिक वेतन (डालर में) विभिन्न वर्षों में निम्न था —

वर्ष	1959	1962	1965	1968
साप्ताहिक वेतन (डालर में) ·	73·4	80 54	91·01	109·88

वर्ष 1967 के लिए अन्तर्वेशन द्वारा साप्ताहिक वेतन ज्ञात कीजिये।

8. निम्न सारणी का न्यास प्रयोग करके 22 वर्षों की आयु पर प्रत्याशित आयु (Expectation of Life) का आकलन कीजिये।

आयु (वर्षों में)	15	20	25	30	35
प्रत्याशित आयु (वर्षों में) .	32 2	29·1	26 0	23·1	20·4

(आगरा, एम० ए० 1964)
[उत्तर : 27·85 वर्ष]

9. निम्न सारणी में भारत में सीमेंट का उत्पादन हजार टनों में कुछ वर्षों के लिए दिया गया है। अप्राप्त मान को ज्ञात कीजिये।

X :	1946	1948	1950	1952	1954	1956
Y :	39	85	?	151	264	388

(आई० सी० डब्लू० ए० 1966)
(उत्तर · द्विपद विस्तार विधि द्वारा आकलित मान=96·4)

10. *ब्रिटिश साम्राज्य में कर्मचारियों को दी गई हानि पूर्ति (Compensation)* की राशि (पौंडो में) विभिन्न वर्षों में निम्न प्रकार थी। दो वर्षों के लिए अज्ञात मानों का आकलन कीजिये।

वर्ष :	1963	1964	1965	1966	1967	1968
हानि पूर्ति की राशि (,000 पौंडो में) ·	17 3	18 2	?	21 2	?	23·5

11 निम्न न्यास के द्वारा उन व्यक्तियों की संख्या ज्ञात कीजिये जिनकी आय 60 रुपये और 70 रु० के बीच में हैं।

वेतन रुपयों में	40 से कम	40–60	60–80	80–100	100–120
व्यक्तियों की संख्या (हजारों में)	250	12	100	70	50

(आगरा, एम० काम० 1957)

[उत्तर न्यूटन विधि द्वारा आकलन करने पर संख्या 53 6 हजार व्यक्ति]

12 समांतर-सूत्र द्वारा अपराधियों की संख्या ज्ञात कीजिये जिनकी आयु 35 वर्ष से कम है।

	वर्षों से कम			
आयु	25	30	40	50
अपराधियों की संख्या	52	67 3	84·1	94·4

(नागपुर, बी० काम० 1963)

[उत्तर : 77 4%]

13 उन कल्पनाओं का कथन कीजिये जिनके आधार पर संख्याओं का अन्तर्गणन किया जाता है।

निम्न सारणी एक प्रकार की 1000 रु० की बीमा पालिसी पर वार्षिक किस्त को प्रदर्शित करती है :—

आयु (जन्म दिवस के पास) वर्ष	25	30	35	40	45
वार्षिक किस्त (रुपयों में)	41 75	42 56	44 25	47·19	52 19

ऊपर दिये आँकड़ों को प्रयोग करके, 27 वर्ष की आयु पर 1000 की एक पालिसी पर वार्षिक किस्त का आकलन कीजिये।

(जोधपुर, एम० काम०, 1968)

[उत्तर . 42 34 रुपये]

14. यदि l_x जीवन-सारणी (Life Table) में आयु पर जीवितों की संख्या को निरूपित करता है, ग्यास द्वारा यथा सम्भव l_x के परिशुद्ध मान ज्ञात कीजिये जबकि मान x=35, 42 और 47 हैं।

$$l_{20}=512,\ l_{30}=439,\ l_{40}=346,\ l_{50}=243$$

(आई० ए० एस० 1948)

[उत्तर $l_{35}=394$, $l_{42}=326$, $l_{47}=274$]

15. ज्ञात है,

$$\log 654 = 2{\cdot}8156,\ \log 659 = 2{\cdot}8189$$
$$\log 658 = 2{\cdot}8182,\ \log 661 = 2{\cdot}8202$$

अन्तर्वेशन के लिए लग्रांज-सूत्र का प्रयोग करके log 656 ज्ञात कीजिये।

(आगरा, 1961)

[उत्तर : log 656 = 2·8168]

टिप्पणी : उपर्युक्त प्रश्नावली में दिये परीक्षाओं के सभी प्रश्न आंग्ल भाषा में थे जिनका यहाँ हिन्दी अनुवाद दिया गया है।

□□□

18 | बहुचर बंटन और बहुचर परीक्षाएँ

अनेकों अध्ययनों में कई चरों पर एक साथ प्रेक्षण लेने होते हैं और इनका विश्लेषण भी एक साथ करना होता है। अतः इन चरों के सम्मिलित अध्ययन के लिए इनके संयुक्त बंटन को जानना प्रायः आवश्यक हो जाता है। अनेक बहुचर बंटनों में से बहुचर प्रसामान्य बंटन सर्वाधिक प्रयोग में आता है। इसके अतिरिक्त कुछ अन्य मुख्य बहुचर बंटनों का भी इस अध्याय में वर्णन किया गया है। बहुचर विश्लेषण की कुछ विधियां जैसे बहुसमाश्रयण, बहुसहसम्बन्ध गुणांक, आंशिक सहसम्बन्ध गुणांक आदि का वर्णन अध्यायों 13 व 14 में दिया जा चुका है।

बहुचर प्रसामान्य बंटन फलन

जिस प्रकार अनेकों सांख्यिकीय अध्ययनों में एक चर के लिए प्रसामान्य बंटन अत्यधिक महत्वपूर्ण है उसी प्रकार एक से अधिक चरों के संयुक्त प्रसामान्य बंटन की बहुधा आवश्यकता होती है। इस अध्याय में इस बंटन के विषय में संक्षेप में विवरण दिया गया है।

माना कि K यादृच्छिक चर $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_K$ हैं और इन्हें $(K \times 1)$ क्रम के स्तम्भ सदिश (Vector), $\underline{X}$, द्वारा निरूपित किया गया है अर्थात्

$$\underline{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ \vdots \\ X_K \end{bmatrix}$$

और पंक्ति सदिश, $\underline{X}'$ निम्न होता है :—

$$\underline{X}' = (X_1, X_2, X_3, \ldots\ldots, X_K)$$

सदिश $\underline{X}$ के बंटन को K–चर व्युत्क्रमणीय प्रसामान्य बंटन (K–variate nonsingular normal distribution) कहते हैं यदि $\underline{X}$ का $\underline{x}$ पर प्रायिकता घनत्व फलन निम्न हो और इसे $f_{\underline{X}}(x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_K) \equiv f_{\underline{X}}(\underline{x})$ द्वारा सूचित करते हैं।

$$f_{\underline{X}}(\underline{x}) = (2\pi)^{-\frac{K}{2}} |\Sigma|^{-\frac{1}{2}} \exp\{-(\tfrac{1}{2})(\underline{x} - \underline{\mu})' \times \Sigma^{-1} (\underline{x} - \underline{\mu})\} \quad \ldots(18.1)$$

जहाँ $-\infty < x_i < \infty \quad (i = 1, 2, 3, \ldots, K)$

$\underline{\mu}$ और Σ इस बटन के प्राचल हैं। जहाँ

$$\underline{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \\ \vdots \\ \mu_K \end{bmatrix} \qquad -\infty < \mu_i < \infty$$

और Σ एक सममित धनात्मक निश्चित आव्यूह है जिसका क्रम $(K \times K)$ है। अर्थात्

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \cdots \sigma_{1K} \\ & \sigma_{22} & \sigma_{23} \cdots \sigma_{2K} \\ & & \sigma_{33} \cdots \sigma_{3K} \\ & & \vdots \\ & & \sigma_{KK} \end{bmatrix}$$

सदिश $\underline{X}$ के $\underline{x}$ पर प्रसामान्य बटन को $N_K(\underline{\mu}, \Sigma)$ द्वारा निरूपित करते हैं।

यदि आवश्यक हो तो Σ का सहसम्बन्ध गुणांकों के पदों में निरूपण निम्न प्रकार कर सकते हैं :—

यह अध्याय (14) के प्रारम्भ में दिया जा चुका है कि किन्हीं दो चरों X_i व X_j में सहसम्बन्ध गुणांक,

$$\rho_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i \sigma_j} \qquad \text{या} \quad \sigma_{ij} = \rho_{ij}\, \sigma_i \sigma_j$$

होता है। अतः

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 & \rho_{13}\sigma_1\sigma_3 \cdots \rho_{1K}\sigma_1\sigma_K \\ & \sigma_2^2 & \rho_{23}\sigma_2\sigma_3 \cdots \rho_{2K}\sigma_2\sigma_K \\ & & \sigma_3^2 \cdots \rho_{3K}\sigma_3\sigma_K \\ & & \vdots \\ & & \sigma_K^2 \end{bmatrix}$$

यदि K चर परस्पर स्वतन्त्र हों तो $\rho_{ij} = 0$ होता है और इस स्थिति में Σ एक विकर्ण आव्यूह हो जाता है और $\underline{X}$ का $\underline{x}$ पर प्रायिकता घनत्व फलन, K एकविचर

प्रसामान्य चरों (univariate normal variates) के प्रायिकता घनत्व फलनों के गुणनफल के समान होता है।

यदि प्रत्येक $\mu_i = 0$ और Σ एक एकांक आव्यूह (unit matrix) हो तो प्रायिकता घनत्व फलन $f_{\underline{X}}(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_K)$ निम्न हो जाता है —

$$f_{\underline{X}}(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_K) = (2\pi)^{-\frac{K}{2}} e^{-\frac{1}{2}\underline{x}'\underline{x}} \qquad \ldots(18.2)$$

इस स्थिति में $\underline{X}$ के बंटन को $N_K(0, I_K)$ द्वारा सूचित करते हैं।

प्रमेय 1. k-चर प्रसामान्य बंटन में किसी एक चर का उपांत बंटन, एकविचर प्रसामान्य बंटन के समान होता है।

सिद्धि. इस प्रमेय को यहाँ चर X_1 का उपांत बंटन ज्ञात करके सिद्ध किया गया है। इसी प्रकार किसी भी चर X_i के लिए इस प्रमेय को सिद्ध कर सकते हैं जहाँ $i = 1, 2, 3, \ldots, k$

(5.27) के अनुरूप सूत्र द्वारा X_1 का उपांत बंटन निम्न रूप में दिया जा सकता है —

$$g_{X_1}(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} C \exp\{-\frac{1}{2}(\underline{x}-\underline{\mu})' \times A(\underline{x}-\underline{\mu})\}\, dx_2\, dx_3 \ldots dx_k \qquad \ldots(18.3)$$

जहाँ $A = \Sigma^{-1}$ और $C = \frac{|A|^{1/2}}{(2\pi)^{K/2}}$

सदिश $(\underline{x}-\underline{\mu})$ और आव्यूह A का विभाजन करने पर,

$$(\underline{x}-\underline{\mu})' A (\underline{x}-\underline{\mu}) = [(x_1-\mu_1), (\underline{x}_2-\underline{\mu}_2)] \times \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1-\mu_1 \\ \underline{x}_2-\underline{\mu}_2 \end{bmatrix} \qquad \ldots(18.4)$$

जहाँ X_1 का माध्य μ_1 व $\underline{X}_2$ का माध्य $\underline{\mu}_2$ है। यहाँ

$$\underline{X}_2 = \begin{bmatrix} X_2 \\ X_3 \\ \vdots \\ X_K \end{bmatrix} \quad \text{एवं} \quad \underline{\mu}_2 = \begin{bmatrix} \mu_2 \\ \mu_3 \\ \vdots \\ \mu_K \end{bmatrix}$$

माना कि,

$$A = \left[\begin{array}{c|cc} r_{11} & r_{12} & r_{13} \cdots\cdots r_{1K} \\ \hline r_{21} & r_{22} & r_{23} \cdots\cdots r_{2K} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \cdots \cdots r_{3K} \\ \vdots & & \\ r_{K1} & r_{K2} & r_{K3} \cdots \cdot r_{KK} \end{array}\right]$$

(ऊपर के खण्ड A_{11}, A_{12}; नीचे के खण्ड A_{21}, A_{22})

$$= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

A एक सममित धनात्मक निश्चित आव्यूह है.

$A_{11}=r_{11}>0$, $A'_{12}=A_{21}$, A_{22} सममित आव्यूह है और इसका प्रतिलोम है।

(18 4) को निम्न रूप में लिख सकते हैं :—

$$(\underline{x}-\underline{\mu})' A (\underline{x}-\underline{\mu})$$
$$=(x_1-\mu_1) A_{11} (x_1-\mu_1)+(x_1-\mu_1) A_{12} (\underline{x}_2-\underline{\mu}_2)$$
$$+(\underline{x}_2-\underline{\mu}_2)' A_{21} (x_1-\mu_1)+(\underline{x}_2-\underline{\mu}_2)' A_{22} (\underline{x}_2-\underline{\mu}_2) \quad ....(18.4\ 1)$$

अब (18.4 1) को इस प्रकार व्यवस्थित किया कि इसमें x_1 के पद $\underline{x}_2$ से अलग हो जायें।

$$(\underline{x}-\underline{\mu})' A (\underline{x}-\underline{\mu})$$
$$=(x_1-\mu_1) (A_{11}-A_{12} A^{-1}_{22} A_{21}) (x_1-\mu_1)+[(\underline{x}_2-\underline{\mu}_2)$$
$$+A^{-1}_{22} A_{21} (x_1-\mu_1)]' A_{22} [(\underline{x}_2-\underline{\mu}_2)+A^{-1}_{22} A_{21}(x_1-\mu_1)] \quad ....(18.4\ 2)$$

(18 4.2) में प्रथम पद $\underline{x}_2$ से मुक्त है। अतः समाकलन (18.3) द्वारा,

$$g_{X_1}(x_1)=C \exp\{-\tfrac{1}{2}(x_1-\mu_1)(A_{11}-A_{12}A^{-1}_{22}A_{21})(x_1-\mu_1)\}F(\underline{x}_2) \quad ....(18.5)$$

जबकि

$$F(\underline{x}_2)=\int_{-\infty}^{\infty}....\int_{-\infty}^{\infty} \exp\Big[-\frac{1}{2} [\underline{x}_2-\{\underline{\mu}_2-A^{-1}_{22} A_{21}(x_1-\mu_1)\}]\times$$
$$A_{22} [\underline{x}_2-\{\mu_2-A^{-1}_{22}A_{21}(x_1-\mu_1)\}]\Big] dx_2\, dx_3 ... dx_k \quad ....(18\ 6)$$

$$= \frac{1}{|A_{22}|^{1/2} / (\sqrt{2\pi})^{K-1}} \qquad ....(18.6.1)$$

मानाकि,

$$\frac{|A_{22}|^{1/2}}{(\sqrt{2\pi})^{K-1}} = C_1$$

$$\therefore \quad F(\underline{x}_2) = \frac{1}{C_1}$$

(18 5) द्वारा,

$$g_{X_1}(x_1) = \frac{C}{C_1} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x_1 - \mu_1)(A_{11} - A_{12} A^{-1}_{22} A_{21})(x_1 - \mu_1)\right\}$$

$$= \frac{|A|^{1/2}}{(\sqrt{2\pi})^K} \cdot \frac{(\sqrt{2\pi})^{K-1}}{|A_{22}|^{1/2}} \exp\{-\frac{1}{2}(x_1 - \mu_1) \times (A_{11} - A_{12} A^{-1}_{22} A_{21})(x_1 - \mu_1)\}$$

$$= \frac{|A|^{1/2}}{|A_{22}|^{1/2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\{-\frac{1}{2}(x_1 - \mu_1) \times (A_{11} - A_{12} A^{-1}_{22} A_{21})(x_1 - \mu_1)\} \qquad ....(18.7)$$

$$\because \quad |A| = |A_{22}||A_{11} - A_{12} A^{-1}_{22} A_{21}|$$

$|A_{11} - A_{12} A^{-1}_{22} A_{21}|$ एक अदिश राशि (scalar quantity) है। इसलिए माना कि

$$(A_{11} - A_{12} A^{-1}_{22} A_{21}) = \frac{1}{\sigma^2}$$

जो कि एक धनात्मक निश्चित राशि है।

$$\therefore \quad \frac{|A|^{1/2}}{|A_{22}|^{1/2}} = \frac{1}{\sigma}$$

फलन (18.7) में $\frac{|A|^{1/2}}{|A_{22}|^{1/2}}$ और $(A_{11} - A_{12} A^{-1}_{22} A_{21})$ के मान रखने पर,

$$g_{X_1}(x_1) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x_1 - \mu_1)^2\right\} ...(18.8)$$

जहाँ $-\infty < x_1 < \infty$

$g_{X_1}(x_1)$, X_1 के प्रसामान्य बंटन के लिए प्रायिकता घनत्व फलन है। अतः प्रमेय सिद्ध हुई।

द्विचर प्रसामान्य बंटन

यह बहुचर प्रसामान्य बंटन की एक विशिष्ट स्थिति है। जिसमें कि केवल दो चर हैं अर्थात् $K=2$ और

$$\underline{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}, \qquad \underline{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$$

$$|\Sigma| = \sigma_1^2 \sigma_2^2 (1-\rho^2)$$

जहां ρ चरों X_1 व X_2 में सहसम्बन्ध गुणांक है। अतः

$$\Sigma^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sigma_1^2(1-\rho^2)} & \dfrac{-\rho}{\sigma_1\sigma_2(1-\rho^2)} \\ \dfrac{-\rho}{\sigma_1\sigma_2(1-\rho^2)} & \dfrac{1}{\sigma_2^2(1-\rho^2)} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{1-\rho^2} \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sigma_1^2} & \dfrac{-\rho}{\sigma_1\sigma_2} \\ \dfrac{-\rho}{\sigma_1\sigma_2} & \dfrac{1}{\sigma_2^2} \end{bmatrix}$$

क्योंकि एक व्युत्क्रमणीय आव्यूह $A=(a_{ij})$ के प्रतिलोम का (i, j) वां अंश $a^{ij} = \frac{A_{ji}}{|A|}$ होता है जबकि A_{ji} अंश a_{ji} का सहखण्ड है और $|A|$, A के सारणिक को निरूपित करता है। अतः (18.1) के अनुसार,

$$f_{\underset{\sim}{X}}(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{\{\sigma_1^2\sigma_2^2(1-\rho^2)\}(2\pi)^2}} \exp\{-\frac{1}{2}[(x_1-\mu_1), (x_2-\mu_2)].$$

$$\frac{1}{1-\rho^2}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} & \frac{-\rho}{\sigma_1\sigma_2} \\ \frac{-\rho}{\sigma_1\sigma_2} & \frac{1}{\sigma_2^2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1-\mu_1 \\ x_2-\mu_2 \end{bmatrix}\Bigg\} \quad \text{....(18.9)}$$

$$= \frac{1}{2\pi\,\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\times\left\{\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-\frac{2\rho}{\sigma_1\sigma_2}(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)+\frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right\}\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi\,\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\times\left\{\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2-2\rho\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)+\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right\}\right] \quad \text{....(18.9.1)}$$

द्विचर बंटन की आवश्यकता विभिन्न अध्ययनों में बहुधा पड़ती है। यह बहुचर बंटनों में से सरलतम है क्योंकि इसमें केवल दो चर हैं। द्विचर के लिए उपांत बंटन और प्रतिबंधी बंटन को निम्न रीति से ज्ञात कर सकते हैं।

उपांत बंटन

यदि X_1, X_2 दो यादृच्छिक प्रसामान्यतः बंटित चर हैं तो X_1 का उपांत बंटन,

$$g_{X_1}(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2)\, dx_2 \quad \text{....(18.10)}$$

जब कि फलन $g_{\underline{X}}(x_1, x_2)$ सूत्र (18.9.1) द्वारा दिया गया है।

$$g_{X_1}(x_1) = \frac{1}{2\pi\,\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\times\left\{\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2-2\rho\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)+\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right\}\right]dx_2 \quad \text{...(18.10.1)}$$

माना कि

$$\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1} = u \quad \text{और} \quad \frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2} = v$$

$$\therefore \quad dx_1 = \sigma_1\, du; \quad dx_2 = \sigma_2\, dv$$

$$g_{X_1}(x_1) = \frac{1}{2\pi\,\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\Big\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \times$$

$$(u^2 - 2\rho uv + v^2)\Big\}.\, dv \qquad \text{....(18.10.2)}$$

(18.10.2) में जब dv के सम्बन्ध में समाकलन करना है तो u एक स्थिरांक के रूप में लिया जाना है। $(v - \rho u)$ का पूर्ण वर्ग बनाने के हेतु, घातांक में $\rho^2 u^2$ जोड़ने व घटाने पर,

$$g_{X_1}(x_1) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\Big\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \times$$

$$(u^2 - \rho^2 u^2 + v^2 - 2\rho uv + \rho^2 u^2)\Big\}\, dv \qquad \text{....(18.10.3)}$$

$$\therefore \quad g_{X_1}(x_1) = \frac{e^{-\frac{1}{2}u^2}}{2\pi\sigma_1\sqrt{(1-\rho^2)}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\Big\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \times$$

$$(v - \rho u)^2\Big\}\, dv \qquad \text{....(18.10.4)}$$

$\dfrac{v - \rho u}{\sqrt{1-\rho^2}} = t$ का प्रतिस्थापन करने पर,

$$dv = \sqrt{1-\rho^2}\;.\, dt$$

$$g_{X_1}(x_1) = \frac{e^{-\frac{1}{2}u^2}}{2\pi\,\sigma_1} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}t^2\right\} dt.$$

$$= \frac{e^{-\frac{1}{2}u^2}}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_1}$$

$$\left[\because \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\} dt = 1\right]$$

u के स्थान पर $\dfrac{x_1 - \mu_1}{\sigma_1}$ रखने पर,

$$g_{X_1}(x_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_1} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_1^2}(x_1 - \mu_1)^2\right\} \qquad \text{....(18.11)}$$

स्पष्टतः $g_{X_1}(x_1)$ केवल चर X_1 का प्रायिकता घनत्व फलन है। इसी प्रकार X_2 का उपांत बंटन है,

$$g_{X_2}(x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_2} \exp\left\{-\frac{1}{2\,\sigma_2^2}\quad(x_2-\mu_2)^2\right\} \qquad \ldots(18.12)$$

यह परिणाम साधारण आघूर्ण ज्ञात करने में अत्यन्त सहायक है जैसे

$$\mu'_{00}=1,\ \mu'_{10}=\mu_1,\ \mu'_{01}=\mu_2$$

$$\mu_{20}=\sigma_1^2,\ \mu_{02}=\sigma_2^2 \quad \text{आदि}$$

यदि $\rho=0$ हो तो (18.9 1) व $g_{X_1}(x_1)$ और $g_{X_2}(x_2)$ की सहायता से,

$$f_{\underline{X}}(x_1, x_2) = f_1(x_1)\, f_2(x_2) \qquad \ldots(18.13)$$

जहाँ $f_1(x_1)=g_{X_1}(x_1)$ और $f_2(x_2)=g_{X_2}(x_2)$ जो कि X_1 व X_2 स्वतन्त्र होने के लिए प्रतिबन्ध है।

सप्रतिबन्ध बंटन

दो चरों के सप्रतिबन्ध बंटन से कुछ रुचिकर गुण प्राप्त होते हैं। इन गुणों को जानने के हेतु इस बंटन का अध्ययन करना पर्याप्त है। माना कि दो प्रसामान्यतः बंटित चर X_1 और X_2 हैं और स्थिर X_1 के लिए X_2 का सप्रतिबन्ध बंटन $f_{X_2/X_1}(x_2/x_1)$ ज्ञात करना है। (5 37) के अनुसार,

$$f_{X_2/X_1}(x_2/x_1) = \frac{f(x_1, x_2)}{f_1(x_1)} \qquad \ldots(18.14)$$

(18.9 1) व (18.11) के द्वारा $f(x_1, x_2)$ व $f_1(x_1)$ घनत्व फलन ज्ञात हैं अतः इनको (18.14) में रखने पर,

$$f_{X_2/X_1}(x_2/x_1) = \frac{\dfrac{1}{2\pi\,\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\dfrac{1}{2(1-\rho^2)}\left\{\left(\dfrac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\left(\dfrac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\dfrac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)+\left(\dfrac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right\}\right]}{\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_1}\exp\left\{-\dfrac{1}{2\,\sigma_1^2}(x_1-\mu_1)^2\right\}} \qquad \ldots(18.15)$$

माना कि

$$\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}=u \qquad \frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}=v$$

$$f_{X_2/X_1}(x_2/x_1)=\frac{\dfrac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\dfrac{1}{2(1-\rho^2)}(u^2-2\rho uv+v^2)\right\}}{\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\exp\left\{-\dfrac{1}{2}u^2\right\}}$$

$$=\frac{\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_1}\exp\left\{-\dfrac{1}{2}u^2\right\}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\dfrac{1}{2(1-\rho^2)}(v-\rho u)^2\right\}}{\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_1}\exp\left\{-\dfrac{1}{2}u^2\right\}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(v-\rho u)^2\right\} \quad \ldots(18.16)$$

u व v का पुन x_1 व x_2 के पदों म प्रतिस्थापन करने पर,

$$f_{X_2/X_1}(x_2/x_1)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\times\left\{\frac{(x_2-\mu_2)}{\sigma_2}-\rho\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)\right\}^2\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma_2^2(1-\rho^2)}\times\left[x_2-\left\{\mu_2+\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x_1-\mu_1)\right\}\right]^2\right] \quad \ldots(18.16\ 1)$$

क्योंकि x_1, μ_1, μ_2, σ_1, σ_2 व ρ अचर हैं और X_2 एक सतत चर है। अत (18 16 1) से स्पष्ट है कि X_2 का बटन प्रसामान्य है जिसका माध्य $\mu_2+\rho\dfrac{\sigma_2}{\sigma_1}(x_1-\mu_1)$ है और प्रसरण $\sigma_2^2(1-\rho^2)$ है। इसी प्रकार स्थिर X_2 के लिए X_1 का सप्रतिबन्धी बटन ज्ञात किया जा सकता है। यह बटन वही होगा जो कि यदि (18·14) में अनुलग्न 1 और

■ को परस्पर बदलने पर प्राप्त होता है अर्थात्

$$f_{X_1/X_2}(x_1|x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2_1(1-\rho^2)} \times \right.$$

$$\left.[x_1-\{\mu_1+\rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(x_2-\mu_2)\}]^2\right] \qquad .(18\ 17)$$

उपर्युक्त वर्णन से स्पष्ट है कि बहुचर प्रसामान्य बंटन के उपांत तथा सप्रतिबन्धी बंटन भी प्रसामान्य होते हैं।

समाश्रयण-वक्र

उपांत और सप्रतिबंधी बंटन के ज्ञान को, सैद्धान्तिक समाश्रयण वक्र का रूप जानने में प्रयोग कर सकते हैं। इसकी आवश्यकता आनुभविक वक्र-रेखी समाश्रयण के लिए प्रतिरूप (Model) की रचना के हेतु होती है।

माना कि सप्रतिबंधी बंटन $f(y/x)$ का विचार किया गया है क्योंकि समाश्रयण में चलन चरों Y और X में ही दिया जाता है। यदि मान लिया कि X का एक स्थिर मान x_0 है तो रेखा $X=x_0$ के साथ Y का माध्य मान एक ऐसा बिन्दु निर्धारित करेगा कि जिसकी कोटि $\overline{Y}_{x_0}$ से निरूपित की जा सकती है। जैसे-जैसे X के विभिन्न मान लिये जाते हैं, ऊर्ध्वाधर रेखा पर भिन्न-भिन्न माध्य बिन्दु प्राप्त होते जाते हैं। इस प्रकार माध्य बिन्दुओं की कोटि $\overline{Y}_{x}$, निर्धारित मान x का एक फलन होता है। इन माध्य बिन्दुओं का पथ (Locus) एक वक्र होता है जिसे कि Y का X पर समाश्रयण वक्र कहते हैं।

Y के X पर समाश्रयण वक्र की समीकरण है

$$\overline{Y}_x = \int_{-\infty}^{\infty} y\, f(y/x)\, dy \qquad ....(18\ 18)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} y\, \frac{f(x,y)}{f_1(x)}\, dy \qquad ....(18\ 18\ 1)$$

अत परिभाषा के अनुसार एक समाश्रयण वक्र एक सप्रतिबंधी बंटन के माध्य का पथ है (18.16 1) की सहायता से, $x_2=y$ और $x_1=x$ मानने पर Y का X पर समाश्रयण वक्र समीकरण है,

$$\overline{Y}_x = \mu_Y + \rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(X-\mu_X) \qquad ....(18\ 19)$$

जबकि चरों Y और X के माध्य एवं मानक विचलन क्रमशः

μ_Y, σ_Y और μ_X, σ_X हैं।

यह ध्यान रखना चाहिये कि सम्बन्ध (18.19) के सत्य होने के लिए यह आवश्यक है कि चरों X और Y का संयुक्त बंटन प्रसामान्य हो। इस समीकरण से इस निष्कर्ष पर पहुँचते हैं कि दोनों चरों का बंटन प्रसामान्य होने की स्थिति में Y का X पर समाश्रयण वक्र एक सरल रेखा होती है। इस कारण व्यवहार में बहुधा रेखीय समाश्रयण का प्रयोग होता है।

विशार्ट-बंटन

माना कि $\underline{X}$ एक $(K \times 1)$ क्रम का सदिश है जिसका बंटन $N_K(\underline{\mu}, \Sigma)$ है और समग्र प्रसरण-सहप्रसरण आव्यूह, Σ का आकलक S है। यदि प्रत्येक चर पर प्रतिदर्श में n प्रेक्षण हैं तो,

$$S = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (\underline{X}_i - \overline{\underline{X}})(\underline{X}_i - \overline{\underline{X}})' \quad ....(18.20)$$

$$\text{या } A = \sum_{i=1}^{n} (\underline{X}_i - \overline{\underline{X}})(\underline{X}_i - \overline{\underline{X}})' = (n-1)S \quad ....(18.20.1)$$

जहाँ $$\overline{\underline{X}} = \frac{1}{n}[\underline{X}_1 + \underline{X}_2 + ... + \underline{X}_n]$$

व्यंजक A (या S) के बंटन को विशार्ट-बंटन कहते हैं। इस बंटन को निम्न रूप में भी समझ सकते हैं :—

माना कि $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22}........\sigma_{KK}$, आव्यूह Σ के तत्व हैं और इनके आकलक $s_{11}, s_{12}, s_{22}........s_{kk}$ हैं तो सख्याओं $(n-1)s_{11}, (n-1)s_{12}, (n-1)s_{22}......$ $(n-1)s_{kk}$ जो कि A के अंश हैं, का संयुक्त बंटन विशार्ट-बंटन कहलाता है।

A के धनात्मक निश्चित होने की स्थिति में, A का घनत्व फलन निम्न होता है :—

$$f(A) = \frac{|A|^{\frac{1}{2}(n-k-1)} \; e^{(-\frac{1}{2}t_r \Sigma^{-1} A)}}{2^{\frac{1}{2}nk} \; \pi^{k(k-1)/4} \; |\Sigma|^{\frac{1}{2}n} \prod_{i=1}^{k} \Gamma\frac{1}{2}(n-i+1)} \quad ....(18.21)$$

यहाँ इस फलन को व्युत्पन्न नहीं किया गया है क्योंकि यह पुस्तक मुख्यतया प्रयोगात्मक दृष्टि से लिखी गई है। यदि $\Sigma = I$ हो तो उपर्युक्त बंटन को χ^2 बंटन का व्यापक रूप समझा जाता है।

यदि सदिश में केवल दो चर X_1 व X_2 हो तो विशार्ट-बंटन के लिए व्यंजक (18.21) में $k=2$ रखने पर घनत्व फलन है

$$f_A(x_1, x_2) = \frac{|A|^{\frac{1}{2}(n-3)} e^{(-\frac{1}{2} t_r \Sigma^{-1} A)}}{2^n \pi^{\frac{1}{2}} |\Sigma|^{n/2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \quad ....(18.22)$$

टिप्पणी यहाँ $t_r \Sigma^{-1} A$ का अर्थ है कि आव्यूह, $\Sigma^{-1} A$ के विकर्ण तत्वों का योग लिया गया है क्योंकि एक $(p \times p)$ क्रम के आव्यूह B का अनुरेख (Trace) परिभाषा के अनुसार, निम्न होता है :—

$$t_r(B) = \sum_{i=1}^{p} b_{ii}$$

होटेलिंग T^2-बंटन

एक चर समष्टि के माध्य के प्रति परिकल्पना $H_0 : \mu = \mu_0$ की परीक्षा के विषय में अध्याय 9 में वर्णन किया जा चुका है। इस स्थिति में प्रतिदर्शज,

$$t = \frac{(\overline{X} - \mu)\sqrt{n}}{s}$$

या

$$t^2 = \frac{(\overline{X} - \mu)^2 n}{s^2} \quad ....(18.23)$$

जबकि चर $X \sim N(\mu, \sigma)$ है।

किन्तु प्रायः एक साथ अनेक चरों के समष्टि माध्य के प्रति परिकल्पना की आवश्यकता होती है और उस स्थिति में होटेलिंग T^2– बंटन का प्रयोग अति उत्तम है। माना कि K चर हैं जो कि सदिश $\underline{X}$ द्वारा निरूपित हैं और $\underline{X} \sim N(\underline{\mu}, \Sigma)$

T^2-बंटन को पहले शून्य स्थिति (null case) में ही दिया गया है अर्थात् जब $H_0 : \underline{\mu} = \underline{\mu_0}$

$$\text{जहाँ } \underline{\mu_0} = \begin{bmatrix} \mu_{10} \\ \mu_{20} \\ \mu_{30} \\ \vdots \\ \mu_{k0} \end{bmatrix}$$

माना कि प्रत्येक चर पर n परिमाण के एक यादृच्छिक प्रतिदर्श का चयन किया गया है। (18.23) के अनुरूप k-चर समष्टि के लिए प्रतिदर्शज

$$T^2 = n(\underline{\overline{X}} - \underline{\mu_0})' S^{-1} (\underline{\overline{X}} - \underline{\mu_0}) \quad ....(18.24)$$

जबकि S सह प्रसरण आव्यूह Σ का आकलक है।

माना कि

$$(S_{ij})=\left(\sum_{l=1}^{n}(X_{il}-\overline{X}_i)(X_{jl}-\overline{X}_j)\right) \quad ....(18.25)$$

जहाँ $i, j=1,2,3...k$

$$=(n-1)\ S \quad ....(18.25.1)$$

यदि (S_{ij}) का प्रतिलोम आव्यूह (S^{ij}) है तो सम्बन्ध (18.24) को परिकल्पना H_0 के अन्तर्गत निम्न रूप में लिख सकते हैं —

$$T^2=n(n-1)\sum_{ij}(\overline{X}_i-\mu_{i0})\ S^{ij}(\overline{X}_j-\mu_{j0}) \quad ....(18.26)$$

यदि (18.26) में k=1 हो तो T^2, t^2 के तुल्य हो जाता है। व्यंजक (18.26) में μ_{i0} व μ_{j0} के मान निराकरणीय परिकल्पना $\mu_i=\mu_{i0}$ के अनुसार रखने होते हैं। जबकि μ_i चर X_i का वास्तविक माध्य है और μ_{i0} माध्य μ_i का कल्पित मान है। होटलिंग ने बताया कि परिकल्पना H_0 के अन्तर्गत संख्या,

$$U=\frac{T^2}{n-1} \quad ....(18.27)$$

एक अभाज्य-बीटा चर (beta-prime variate) होता है जिसका घनत्व फलन है,

$$f(U)=\frac{1}{\beta\left(\frac{k}{2},\frac{n-k}{2}\right)}\ \frac{U^{(k-2)/2}}{(1+U)^{n/2}} \quad ....(18.28)$$

फलन f(U) द्वारा स्पष्ट है कि $\frac{(n-k)}{K}\cdot\frac{T^2}{(n-1)}$ का बंटन, F-बंटन है जिसकी स्वतन्त्रता कोटियाँ k और (n-k) हैं।

अशून्य स्थिति :

यदि H_0 सत्य न हो अर्थात् $\mu_i-\mu_{i0}\neq 0$ हो तो T^2–बंटन अकेन्द्रीय F–बंटन के समान होता है। इस स्थिति में भी F की स्वतन्त्रता कोटियाँ K और (n-k) होती हैं। अकेन्द्रीय प्राचल τ निम्न होता है :—

$$\tau=\frac{n}{2}\sum_{i,j}(\mu_i-\mu_{i0})(\mu_j-\mu_{j0})\ \sigma^{ij} \quad ....(18.29)$$

जबकि $(\sigma^{ij})=\Sigma^{-1}$

अत अकेन्द्रीय F–बटन का घनत्व फलन है,

$$f(F_1)=\frac{k}{n-k}\frac{e^{-\tau}}{\lceil(n-k)/2}\sum_{\beta=0}^{\infty}\frac{\tau^{\beta}\lceil\frac{n}{2}+\beta\left(\frac{KF_1}{n-k}\right)^{\frac{k}{2}+\beta-1}}{\beta!\lceil\frac{k}{2}+\beta\left(1+\frac{KF_1}{n-k}\right)^{\frac{n}{2}+\beta}}$$

...(18 30)

$\tau=0$ होने की स्थिति में यह घनत्व फलन केन्द्रीय बटन के लिए घनत्व फलन के तुल्य हो जाता है।

टिप्पणी अकेन्द्रीय F-बटन के लिए दिया गया घनत्व फलन (18 30) और (7 36) एक रूप हो जाते हैं यदि (18 30) में $n=\nu_1+\nu_2$, $k=\nu_1$ व $n-k=\nu_2$ रखदें।

परिकल्पना परीक्षा :

$H_0 : \mu_i=\mu_{i0}$ की $H_1 . \mu_i\neq\mu_{i0}$ के विरुद्ध परीक्षा निम्न प्रकार कर सकते हैं :—

T^2 का मान (18·26) से परिकलित कर लिया जाता है और परिकलित T^2 की सख्या T_0^2 से तुलना करके H_0 के विषय में निर्णय कर लिया जाता है जहाँ α सा० स्त० और स्व० को० $(k, n-k)$ के लिए,

$$T_0^2=\frac{(n-1)\,k}{n-k}\,F_\alpha \qquad \text{....(18 31)}$$

यदि $T^2>T_0^2$ हो तो H_0 को अस्वीकार कर दिया जाता है अन्यथा स्वीकार कर लिया जाता है।

यदि उपर्युक्त परीक्षा सम्भाविता अनुपात निकष के आधार पर करें तो यह सिद्ध किया जा सकता है कि

$$L^{2/n}=\frac{1}{1+T^2/_{n-1}} \qquad \text{....(18·32)}$$

जबकि सम्भाविता अनुपात परीक्षा के लिए क्रांतिक क्षेत्र $L<L_0$ द्वारा दिया जाता है जहाँ L_0 का मान इस प्रकार मानते हैं कि H_0 के सत्य होने पर $L<L_0$ होने की प्रायिकता α है। अत (18 32) की सहायता से

$$T_0^2=(n-1)\,(L_0^{\,2/n}-1)/L_0^{\,2/n} \qquad \text{....(18.33)}$$

इस स्थिति में भी परीक्षा निकष वही रहता है।

महालानबीस व्यापकीकृत दूरी :

माना कि दो K–चर प्रसामान्य समष्टि है जिनके माध्य क्रमश $\underline{\mu}^{(1)}$ और $\mu^{(2)}$ है और

दोनों का सामान्य प्रसार आव्यूह Σ है। गणितीय भाषा मे दो K-चर समग्र N $(\underline{\mu}^{(1)}, \Sigma)$ और N $(\underline{\mu}^{(2)}, \Sigma)$ हैं तो

$$\Delta^2 = \frac{1}{K} \left(\underline{\mu}^{(1)} - \underline{\mu}^{(2)}\right)' \Sigma^{-1} \left(\underline{\mu}^{(1)} - \underline{\mu}^{(2)}\right) \quad \ldots(18.34)$$

को दो समग्रो के बीच महालानबीस व्यापकीकृत दूरी कहते हैं।

Δ^2 का आकलन :

इस आकलन को Bose ने ज्ञात किया था। माना कि दोनों समग्रो मे से क्रमशः परिमाण n_1 व n_2 के दो स्वतन्त्र प्रतिदर्श चयन किये गये हैं और Δ^2 का आकलक D^2 है।

परिभाषा के अनुसार

$$D^2 = \frac{1}{k} \left(\underline{\bar{X}}^{(1)} - \underline{\bar{X}}^{(2)}\right)' \Sigma^{-1} \left(\underline{\bar{X}}^{(1)} - \underline{\bar{X}}^{(2)}\right) \quad \ldots(18.35)$$

और $$E\,(D^2) = \Delta^2 + \frac{2}{\bar{n}} \quad \ldots(18\ 36)$$

जहाँ $\bar{n}$, n_1 व n_2 का हरात्मक माध्य है अर्थात्

$$\bar{n} = \frac{2n_1\, n_2}{n_1 + n_2}$$

अतः Δ^2 का अनभिनत आकलक,

$$D_k^2 = D^2 - \frac{2}{\bar{n}} \quad \ldots(18.37)$$

$$= \frac{1}{k} \left(\underline{\bar{X}}^{(1)} - \underline{\bar{X}}^{(2)}\right)' \Sigma^{-1} \left(\underline{\bar{X}}^{(1)} - \underline{\bar{X}}^{(2)}\right) - \frac{2}{\bar{n}}$$

....(18.37.1)

यदि n_1 और n_2 बृहत् हो तो $\frac{2}{\bar{n}}$ उपेक्षणीय है और इस स्थिति में,

$$D_k^2 = D^2 \quad \ldots(18.37.2)$$

जब Σ ज्ञात हो तो Δ^2 को स्टूडेंटीकृत D^2 कहते हैं।

स्थिति 2 :—यदि Σ अज्ञात हो तो Δ^2 को अस्टूडेंटीकृत (unstudentised) D^2 कहते हैं। माना कि n_1 व n_2 परिमाण के दो स्वतन्त्र प्रतिदर्शों द्वारा प्राप्त Σ का आकलक S है। इस स्थिति मे Σ के स्थान पर S का प्रयोग करना होता है। अतः

$$D^2_2 = \frac{1}{K} \left(\underline{\bar{X}}^{(1)} - \underline{\bar{X}}^{(2)} \right)' S^{-1} \left(\underline{\bar{X}}^{(1)} - \underline{\bar{X}}^{(2)} \right) \quad ....(18.38)$$

$$E(D^2_2) = \frac{(n_1+n_2-2)}{(n_1+n_2-k-3)} \left(\Delta^2 + \frac{2}{n} \right) \quad ....(18.39)$$

प्रतिदर्शज D^2_2 को ही स्टूडेंटीकृत D^2 कहते हैं।

T^2 और D^2 में सम्बन्ध :

यदि D^2 के लिए दिये गये व्यंजक में $1/K$, जो कि स्थिरांक है, को छोड़ दें तो भी बंटन के रूप पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता है।

इस स्थिति में,

$$D^2_2 = \left(\underline{\bar{X}}^{(1)} - \underline{\bar{X}}^{(2)} \right)' S^{-1} \left(\underline{\bar{X}}^{(1)} - \underline{\bar{X}}^{(2)} \right) \quad ....(18.40)$$

और

$$T^2 = \frac{n_1 n_2}{n_1+n_2} D^2_2 \quad ....(18.41)$$

जबकि

$$\frac{T^2}{n_1+n_2-2} \cdot \frac{n_1+n_2-k-1}{k} \sim F_{k,(n_1+n_2-k-1)} \quad ....(18.42)$$

इसी प्रकार का बंटन D^2 के पदों में विविक्तकर फलन के साथ अध्याय 19 में दिया गया है।

द्विघात रूपों का सम्मिलित बंटन :

यदि K चरों का सम्मिलित बंटन,

$$C\, e^{-\frac{1}{2}\underline{x}' A \underline{x}}\, d\underline{x}$$

ज्ञात है तो द्विघात रूप $\underline{x}' A \underline{x}$ का बंटन ज्ञात करना है।

माना कि $\underline{x} = Q \underline{y}$ जबकि Q एक आव्यूह इस प्रकार का है कि

$$Q' A Q = I$$

अतः

$$\underline{x}' A \underline{x} = \underline{y}' Q' A Q \underline{y}$$
$$= \underline{y}' \underline{y}$$

और सम्मिलित K चरों का बंटन अब

$$C_1\, e^{-\frac{1}{2}\underline{y}' \underline{y}}\, d\underline{y}$$

$$= C_1\, e^{-\frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2 + \dots y_k^2)} dy_1\, dy_2 \dots dy_k \quad ..(18.43)$$

$$\therefore \quad \underline{x}' A \underline{x} = \sum_i y_i^2 = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_k^2$$

का बटन χ^2 होता है जबकि K चर, $N(0,1)$ बंटित हो। यहां χ^2 की स्वातन्त्रता कोटि K होती है।

कोकरान-प्रमेय :

माना कि $X_1, X_2, X_3 \ldots X_n$, समग्र $N(0,1)$ से एक प्रतिदर्श है और यदि

$X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + \ldots + X_n^2 = q_1 + q_2 + q_3 + \ldots q_k$ है। ....(18 44)

जबकि q_i ($i = 1, 2, 3, \ldots, k$) एक द्विघात रूप है जिसकी कोटि (rank) n_i है तो $q_1, q_2, q_3 \ldots\ldots q_k$ का स्वतन्त्र रूप से बटन $\chi^2_{n_i}$ होने के लिए आवश्यक और पर्याप्त प्रतिबंध है कि,

$$n = \sum_i n_i$$

इस प्रमेय को आव्यूह सिद्धान्तों का प्रयोग करके सुगमता से सिद्ध किया जा सकता है। यहां इसको सिद्ध करके नहीं दिखाया गया है।

बहुपद-बंटन :

यदि $E_1, E_2, E_3 \ldots E_k$, K स्वतन्त्र घटनाएँ हैं जिनके घटित होने की प्रायिकता क्रमश. $p_1, p_2, p_3 \ldots p_K$ है तो n परीक्षणों में से घटना E_1 के n_1 बार घटित होने, E_2 के n_2 बार घटित होने, ..., E_k के n_k बार घटित होने की प्रायिकता,

$$= (n_1, n_2, n_3 \ldots n_k) = \frac{n!}{n_1!\, n_2!\, n_3! \ldots n_k!} \; p_1^{n_1}\, p_2^{n_2} \ldots p_k^{n_k}$$

जहां $\qquad \sum_i n_i = n$

घटनाएँ किस क्रम में घटित होती है इसमें कोई रुचि नहीं है अत n में से $n_1, n_2, n_3 \ldots n_k$ बार घटनाओं के घटित होने के परस्पर अपवर्जी ढंग

$$\frac{n!}{n_1!\, n_2!\, n_3! \ldots n_k!}$$

हैं। अतः आवश्यक प्रायिकता,

$$P(n_1, n_2, n_3 \ldots n_k) = \frac{n!}{n_1!\, n_2!\, n_3! \ldots n!}\; p_1^{n_1}\, p_2^{n_2} \ldots p_k^{n_k} \quad \ldots (18\ 45)$$

(18 45) द्वारा दिये गये बटन को बहुपद बंटन कहते है। दायीं ओर दिया गया व्यंजक $(p_1 + p_2 + p_3 \ldots + p_k)^n$ के विस्तार में व्यापक पद है।

बहुपद बटन का माध्य व प्रसरण निम्न होता है —

$$E(n_i) = np_i \quad (18.46)$$

$$E(n_i^2) = np_i + n(n-1)p_i^2 \quad (18.47)$$

$$\therefore \quad V(n_i) = E(n_i^2) - \{E(n_i)\}^2$$

$$= np_i + n(n-1)p_i^2 - n^2 p_i^2$$

$$= np_i - np_i^2$$

$$= np_i(1 - p_i)$$

n_i व n_j म सहप्रसरण

$$\text{cov}(n_i, n_j) = E(n_i n_j) - E(n_i)E(n_j)$$

जबकि

$$E(n_i n_j) = n(n-1)p_i p_j$$

$$\therefore \quad \text{cov}(n_i n_j) = n(n-1)p_i p_j - np_i \cdot np_j$$

$$= -np_i p_j$$

उपर्युक्त परिणाम द्विपद बंटन के समरूप है।

प्रश्नावली

1 यदि $f(x, y) = C$ जबकि $x^2 + y^2 \leq a^2$
$= 0$ अन्यथा

सिद्ध कीजिये कि $C = \frac{1}{\pi a^2}$ और यदि $E(X) = E(Y) = 0$

$E(X^2) = E(Y^2) = \frac{a^2}{4}$ तो X व Y की स्वतन्त्रता की परीक्षा कीजिए।

2 यदि $\underline{\mu} = \underline{O}$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 75 & -35 \\ & 1 & -50 \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

(i) X_1 व X_2 का सप्रतिबन्ध बंटन ज्ञात कीजिए जबकि $X_3 = x_0$

(ii) X_2 का उपान्त बंटन ज्ञात कीजिए।

3 केन्द्रीय बंटन के ... द्वारा ... में ... का ... उदाहरण सहित समझाइए।

4. हाटलिंग T^2 बंटन में किस परिकल्पना की परीक्षा की जाती है और इस परिकल्पना के लिए प्रतिदर्शज ... पूरा विधि का विवरण दीजिए।

5. यदि

$$\underline{\mu} = \begin{bmatrix} \underline{\mu}^{(1)} \\ \underline{\mu}^{(2)} \end{bmatrix}, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{bmatrix}$$

तो सिद्ध कीजिये कि $\underline{\mu}' \Sigma^{-1} \underline{\mu} \geq \underline{\mu}^{(1)'} \Sigma^{-1}_{11} \underline{\mu}^{(1)}$ जबकि $\underline{\mu}^{(1)}$ के K_1 और $\underline{\mu}^{(2)}$ के K_2 संघटक हैं और $K_1 + K_2 = K$

□□□

19 विविक्तकर फलन

अनेक कार्यों में प्रायः यह समस्या सामने आती है कि एक एकक या कुछ एककों का समूह किस समष्टि में से है। जैसे वानस्पतिक (botanical) अध्ययनों में जाति (species) का निर्णय करने की समस्या आती है। पादप प्रजनन (plant breeding) संबंधी समस्याओं में यह जानने की आवश्यकता होती है कि एक पादप संतति (plant progeny) उच्च उपज वाले या अल्प उपज वाले समूह में से है। इसी प्रकार की अनेक अन्य समस्याएँ सामने आती हैं।

अधिकांशतः व्यवहार में समष्टि के विषय में ज्ञान नहीं होता है अर्थात् इनके प्राचल ज्ञात नहीं होते हैं। किन्तु प्रत्येक समष्टि से एक प्रतिदर्श लेकर समष्टि के विषय में जानकारी प्राप्त कर ली जाती है। इस जानकारी का प्रयोग यह जानने के लिए किया जाता है कि एक नया एकक या कुछ नए एककों का समूह किस समष्टि में से है। कभी कभी यह निर्णय केवल एक लक्षण (चर) के आधार पर किया जा सकता है। किन्तु बहुधा दो समष्टि एक दूसरे से अनेक लक्षणों (चरों) में भिन्न होते हैं। इनमें से प्रत्येक चर द्वारा कुछ संकेत मिलता है कि एकक किस समष्टि का है। अतः अनेक चरों को एक साथ लेकर एक ऐसा फलन ज्ञात करना होता है जिससे कि एकक को जिस समष्टि का है उसके अतिरिक्त किसी अन्य समष्टि का मानने की त्रुटि न्यूनतम हो। इस फलन को विविक्तकर फलन कहते हैं। विविक्तकर फलन प्रविधि का ज्ञान प्रो० आर० ए० फिशर (R. A. Fisher) ने सन् 1936 में दिया था। इस विधि का उपयोग संगणक (computer) के आविष्कार के बाद अधिक होने लगा है। विविक्तकर फलन ज्ञात करने तथा परिकल्पनाओं की परीक्षा करने की विधि निम्न प्रकार है :—

यदि दो एक चर समष्टि (प्रसामान्य) π_1 व π_2 हैं जिनके माध्य क्रमशः μ_1 और μ_2 हैं तथा सार्व प्रसरण σ^2 है तो मानक विचलन के पदों में इन माध्यों के बीच की दूरी का वर्ग $\left(\frac{\mu_1 - \mu_2}{\sigma}\right)^2$ के समान है। स्पष्टतः एक प्रेक्षण X को समष्टि π_1 का माना जायगा यदि यह μ_1 के निकट है और π_2 का माना जायगा यदि यह μ_2 के निकट है। किन्तु वर्गीकरण करने में त्रुटि की भी संभावना रहती है। इस त्रुटि की संभावना कम होगी यदि $\left(\frac{\mu_1 - \mu_2}{\sigma}\right)^2$ बृहद् हो क्योंकि इस स्थिति में दो प्रसामान्य वक्र एक दूसरे से पर्याप्त दूरी पर होंगे। इसके विपरीत स्थिति में त्रुटिपूर्ण वर्गीकरण की संभावना अधिक होगी। केवल एक चर के आधार पर शुद्ध वर्गीकरण होना भी कठिन है। अतः वर्गीकरण को पर्याप्त शुद्ध बनाने के लिए एक से अधिक चरों को लेना उचित है।

K–चर $(X_1, X_2, X_3, ...X_K)$ प्रसामान्य समग्रों की स्थिति में प्रा० फिशर ने सुझाया कि इन K–लक्षणों का एक ऐसा रैखिक फलन ज्ञात किया जाना चाहिये जिसके लिए $\left(\frac{\mu_1 - \mu_2}{\sigma}\right)^2$ अधिकतम हो और वर्गीकरण इस इष्टतम रैखिक संयोजन (Optimum linear combination) पर आधारित होना चाहिये। इस प्रकार फलन $\underline{a}' \underline{X}$ लेकर K–विमीय वर्गीकरण प्रक्रिया को एक विमीय प्रक्रिया में परिवर्तित कर दिया जाता है। इष्टतम फलन $a' X$ का इस प्रकार लिया जाता है कि जिसके लिए a के सबंध में दूरी का वर्ग,

$$\left(\frac{\pi_1 \text{ मे } \underline{a}' \underline{X} \text{ का माध्य} - \pi_2 \text{ मे } \underline{a}' \underline{X} \text{ का माध्य}}{\underline{a}' \underline{X} \text{ का मानक विचलन}}\right)^2 \qquad ....(19.1)$$

अधिकतम है।

माना कि K चरों $X_1, X_2, X_3, ...X_k$ का रैखिक फलन 'Z' निम्न है —

$$Z = a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 + ... + a_k X_k \qquad ....(19.2)$$

फलन (19.2) में गुणाकों $a_1, a_2, a_3......, a_k$ का इस प्रकार चयन किया जाता है कि रैखिक फलन द्वारा दो समग्रों में अधिकतम विभेद प्राप्त हो सके। इसके लिए प्रतिबन्ध (19.1) दिया गया है।

फलन, $(a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 + ... + a_k X_k)$ का प्रसरण

$$= \sum_i \sum_j \sigma_{ij} a_i a_j \qquad ....(19.3)$$

$$i, j = 1, 2, 3, ...K$$

है और दो समग्रों के लिए इस फलन के माध्य मानों में अन्तर का वर्ग,

$$(a_1 \delta_1 + a_2 \delta_2 + ... + a_k \delta_k)^2 \qquad ....(19.4)$$

है जब कि बहुचर समग्र प्रसामान्य बंटित हैं जिन दोनों का विक्षेपण आव्यूह (σ_{ij}) है और माध्यों में अन्तर $\delta_i = (\mu_{1i} - \mu_{2i})$ के है।

माना कि प्रतिदर्श माध्यों में अन्तर $(\overline{X}_{1i} - \overline{X}_{2i}) = d_i$ और चरों X_i व X_j में दोनों प्रतिदर्शों के लिए विक्षेपण आव्यूह (S_{ij}) है।

जहाँ,

$$S_{ij} = \frac{1}{n_1 + n_2 - 2}\left\{\sum_{l=1}^{n_1} (X_{1il} - \overline{X}_{1i})(X_{1jl} - \overline{X}_{1j}) + \sum_{u=1}^{n_2} (X_{2iu} - \overline{X}_{2i})(X_{2ju} - \overline{X}_{2j})\right\}. \qquad ....(19.5)$$

उपर्युक्त वर्णन में δ_i का आकलक d_i और σ_{ij} का आकलक S_{ij} है। विविक्तकर फलन Z के लिए सम्बा

$$Q=\frac{(\sum_j a_j d_j)^2}{\sum_i \sum_j a_i a_j S_{ij}} \quad \text{....(19.6)}$$

को अधिकतम करना होता है।

लग्राज-गुणक 'λ' का प्रयोग करके सम्बा Q का अधिकतम किया जाता है। इस विधि के अन्तर्गत सम्बा $(\sum_i \sum_j a_i a_j d_i d_j - \lambda \sum_i \sum_j a_i a_j S_{ij})$ का a_j $(j=1, 2, 3,....K)$ के सबंध में आंशिक अवकलन करके शून्य के समान रखने पर और सम्बा $(a_1 d_1+ a_2 d_2+a_3 d_3+ ... +a_k d_k)/\lambda$ को 1 मान लेने पर निम्न समीकरण प्राप्त होते हैं –

$$\left.\begin{array}{l} a_1 S_{11}+a_2 S_{12}+a_3 S_{13}+ ...+a_k S_{1k}=d_1 \\ a_1 S_{21}+a_2 S_{22}+a_3 S_{23}+ ...+a_k S_{2k}=d_2 \\ a_1 S_{31}+a_2 S_{32}+a_3 S_{33}+ ...+a_k S_{3k}=d_3 \\ \vdots \\ a_1 S_{k1}+a_2 S_{k2}+a_3 S_{k3}+ ...+a_k S_{kk}=d_k \end{array}\right\} \quad \text{....(19.7)}$$

इन समीकरणों को हल करके a_j $(j=1, 2, 3, ..K)$ के आकलित मान ज्ञात हो जाते हैं। इन समीकरणों को उसी प्रकार हल कर सकते हैं जैसे कि अध्याय 13 में बहु समाश्रयण रेखा की स्थिति में आंशिक समाश्रयण गुणांकों का ज्ञान करने के लिए हल किया गया है।

माना कि आव्यूह (S_{ij}) का प्रतिलोम आव्यूह (S^{ij}) है तो

$$a_j=S^{j1} d_1+S^{j2} d_2+....+S^{jk} d_k \quad \text{(....19.8)}$$

जहाँ $j=1, 2, 3, ...K$

आकलित $a_1, a_2, a_3 ....,a_k$ का समीकरण (19.2) में प्रतिस्थापन करने पर विविक्तकर फलन Z ज्ञात हो जाता है। यदि चरों $X_1, X_2, X_3 ...X_k$ के माध्य समान हों और इनके विविक्तकर मान (discriminating value) समान हों तो $X_1, X_2, X_3 ...X_k$ के भार $a_1, a_2, a_3..., a_k$, समान होते हैं और इस स्थिति में विविक्तकर फलन,

$$Z=X_1+X_2+X_3+....+X_k \quad \text{....(19.9)}$$

होता है। किन्तु, क्रियात्मक दृष्टि से ऐसी स्थिति बहुत कम पाई जाती है क्योंकि कुछ चरों की विविक्तकर शक्ति अधिक और कुछ की कम होती है। अतः चरों को तदनुसार भारित करना आवश्यक हो जाता है। वास्तव में विविक्तकर फलन का विषय बहुचर विश्लेषण का अंग है और इसके अन्तर्गत हम दो या दो से अधिक चरों के युगपत बिचरण का अध्ययन करते हैं।

परिकल्पना H_0 : सब चरों के लिए समग्र माध्यों में अन्तर शून्य है, की H_1 : कम से कम किन्ही दो समग्र माध्यों में अन्तर शून्य नही है, के विरुद्ध परीक्षा महालानबीस (Mahalanobis) D^2 की सहायता से कर सकते है। महालानबीस D^2 के लिए गणितीय सूत्र निम्न हैं :—

$$D_k^2 = \sum_{i=1}^{K} \sum_{j=1}^{K} S^{ij} d_i d_j \qquad ....(19.10)$$

$$= a_1 d_1 + a_2 d_2 + a_3 d_3 + ... + a_k d_k \qquad ....(19.10.1)$$

जहाँ D^2 का अनुलग्न K यह प्रदर्शित करता है कि अध्ययन में K चरों को लिया गया है।

परिकल्पना H_0 की F–परीक्षा निम्न प्रकार की जाती है :—

यहाँ प्रतिदर्शज,

$$F = \frac{n_1 n_2 (n_1+n_2-K-1)}{K (n_1+n_2) (n_1+n_2-2)} D_k^2 \qquad ....(19.11)$$

है।

प्रतिदर्शज F की स्व० को० K और (n_1+n_2-k-1) होती है। परिकलित F की α सा० स्त० व K और (n_1+n_2-k-1) स्व० को० के लिए सारणीबद्ध F से तुलना करके H_0 के विषय में नियम अनुसार निर्णय कर लिया जाता है।

लक्षणों की संख्या बढ़ाने पर परीक्षा

यदि लक्षणों (चरों) की संख्या बढ़ाकर m कर दी गई हो तो परिकल्पना H_0 कि $(m-k)$ लक्षणों द्वारा और अधिक विविक्तकर-शक्ति नही बढ़ी है, की परीक्षा, F–परीक्षा द्वारा की जाती है जबकि प्रतिदर्शज,

$$F = \frac{n_1 n_2 (n_1+n_2-m-1)}{(m-k) \{(n_1+n_2)(n_1+n_2-2)+n_1 n_2 D_k^2\}} (D^2_m - D^2_k) \qquad ....(19.12)$$

है। यहाँ F की स्व० को० $(m-k)$ और (n_1+n_2-m-1) है। परिकलित F को सारणीबद्ध F से तुलना करके H_0 के विषय में निर्णय कर लिया जाता है यदि H_0 को स्वीकार कर लिया जाता है तो इसका अभिप्राय है कि $(m-k)$ चरों के बढ़ाने पर विविक्तकर शक्ति में कोई वृद्धि नहीं हुई है। H_0 को अस्वीकार कर देने की स्थिति में विपरीत निर्णय लिया जाता है।

विल्क–Λ निकष द्वारा अनेकों समग्रों के माध्य मानों में अन्तर की परीक्षा

परिकल्पना H_0 अनेकों समग्रों के लिए समस्त चरों (लक्षणों) के माध्य मानों में अन्तर शून्य के समान है की परीक्षा विल्क–Λ निकष के आधार पर निम्न प्रकार की जाती है :—

माना कि p–समग्रों में से क्रमश: परिमाण $n_1, n_2, n_3 ... n_p$ के p प्रतिदर्श लिये गये है और प्रत्येक प्रतिदर्श द्वारा K लक्षणों का अध्ययन किया गया है।

माना कि h वें प्रतिदर्श के लिए K लक्षणों के माध्य क्रमश $\overline{X}_{h1}$ $\overline{X}_{h2}$ $\overline{X}_{hk}$ और वर्गों तथा गुणनों का योग S_{hij} है जो कि $(n_h - 1)$ स्व० का० पर आधारित है जहाँ

$h = 1\ 2\ 3$

माना कि $\sum_h n_h = n$ तथा $\overline{X}_1\ \overline{X}_2\ \overline{X}_3\ \overline{X}_k$

सब प्रतिदर्शों को सम्मिलित करने पर माध्य है और S_{ij} चरों X_i व X_j के वर्गों तथा गुणनों के योग को प्रदर्शित करते हैं। प्रतिदर्शों के बीच गुणनों का योग

$$B_{ij} = \sum_{h=1}^{p} n_h \overline{X}_{hi}\ \overline{X}_{hj} - n\, \overline{X}_i \overline{X}_j \qquad (19\ 13)$$

जहाँ $i\ j = 1\ 2\ 3,\ k$

या

$$B_{ij} = \sum_{h=1}^{p} \frac{T_{hi} \times T_{hj}}{n_h} - \frac{T_i \times T_j}{n} \qquad (19\ 13\ 1)$$

जब कि T_{hi} T_{hj} क्रमशः h वें प्रतिदर्श में चर X_i व चर X_j के योग हैं और T_i व T_j प्रतिदर्शों को सम्मिलित करने पर चरों X_i व X_j के योग हैं।

प्रतिदर्शों के अन्दर गुणनों का योग

$$W_{ij} = S_{ij} - B_{ij} \qquad (19\ 14)$$

$$= \sum_{h=1}^{p} S_{hij} \qquad (19\ 14\ 1)$$

विल्क Λ – निकष के अनुसार

$$\Lambda = \frac{|W|}{|W+B|} \qquad (19\ 15)$$

जब कि $|W|$ और $|W+B|$ क्रमशः विक्षेप आव्यूह (W_{ij}) और $(W_{ij} + B_{ij})$ के सारणिक हैं।

यदि $\quad m = n - \frac{k+q+1}{2} \quad q = (k-1)$

$$\lambda = \frac{K \times q - 2}{4},\ s = \sqrt{\frac{k^2 q^2 - 4}{k^2 + q^2 - 5}}$$

$r = Kq/2$

तो,

$$\chi^2_{K(p-1)} = -m \log_e \Lambda \qquad (19\ 16)$$

$$= -m \log_e \Lambda \log_e 10 \quad \text{....(19.16.1)}$$

$$= -(2{\cdot}3026)m \log_{10} \Lambda \quad \text{....(19.16.2)}$$

परिकल्पना H_0 की परीक्षा विल्क–Λ की सहायता से F परीक्षा द्वारा भी की जा सकती है जबकि प्रतिदर्शज,

$$F_{\{2r,\ (ms-2\lambda)\}} = \frac{ms-2\lambda}{2r} \quad \frac{1-\Lambda^{1/s}}{\Lambda^{1/s}} \quad \text{....(19.17)}$$

पूर्व निर्धारित सा० स्त० व प्रतिदर्शज F की स्व० को० के लिए प्राप्त सारणीबद्ध मान को F के परिकलित मान से तुलना करके नियमानुसार H_0 के विषय में निर्णय ले लिया जाता है।

उदाहरण 19.1 . एक प्रजाती-परीक्षण (varietal test) में ली गई तिल (sesamum) की दो प्रजातियों के तीन लक्षणों के प्रति अध्ययन किया गया है। प्रयोग में प्रत्येक प्रजाति के प्रत्येक लक्षण के लिए तीन प्रेक्षण लिये गये जो कि निम्न प्रकार थे:—

प्रजाति	प्रति पौधों की उपज (ग्राम) (X_1)			प्रति पौधे में सम्पुटों (capsules) की संख्या (X_2)			प्रति पौधे में शाखाएं (X_3)		
	R_1	R_2	R_3	R_1	R_2	R_3	R_1	R_2	R_3
V_1	4·965	5·967	5·444	29·6	32·0	29·6	5·4	4·8	5·0
V_2	4·953	5·075	6·565	36·8	34·2	41·2	5 6	5·6	4·4

(1) इन दो प्रजातियों के लिए विवक्तकर फलन,

$$Z = a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3,$$

का समंजन,

(2) दोनों प्रजातियों में दूरी महालानबीस D^2,

(3) परिकल्पना H_0 दो प्रजातियों के लक्षणों के माध्यों में अन्तर शून्य के समान है, की एक साथ परीक्षा, निम्न प्रकार कर सकते हैं

सूत्र (19.5) का प्रयोग करके सह्यामों S_{ij} का परिकलन किया।

$$S_{11} = \frac{1}{(3+3-2)} \left\{ (4{\cdot}965^2 + 5{\cdot}967^2 + 5{\cdot}444^2) - \frac{(16{\cdot}476)^2}{3} + (4\,953^2 + 5{\cdot}075^2 + 6\,565^2) - \frac{(16\,593)^2}{3} \right\}$$

$$= 0{\cdot}5293$$

$$S_{12}=\frac{1}{(3+3-2)}\left\{(4\cdot965\times26\cdot6+5\cdot967\times32\cdot0+5\cdot444\times29\cdot6)-\frac{(16\cdot476)(88\cdot20)}{3}+(4\cdot953\times36\cdot8+5\cdot075\times34\cdot2+6\cdot565\times41\cdot2)-\frac{(16\cdot593)(112\cdot20)}{3}\right\}$$

$=2\cdot1140$

इसी प्रकार,

$S_{22}=9\cdot9200,\ S_{23}=-1\cdot5500\ S_{13}=-0\cdot3867,\ S_{33}=0\cdot2867$

चरो X_1, X_2 व X_3 के लिए माध्य,

	$\overline{X}_1$	$\overline{X}_2$	$\overline{X}_3$
V_1	5·492	29·400	5·067
V_2	5·531	37·400	5·200
$V_2-V_1=d$	0·039	8·000	0·133

अब आव्यूह (S_{ij}) को लिखकर, इसका प्रतिलोम आव्यूह (S^{ij}) कीलकीय संघनन (Pivotal condensation) विधि द्वारा ज्ञात किया। (इस विधि का वर्णन परिशिष्ट–क में दिया गया है।)

(S_{ij})			I		
0·5293	2·1140	−0·3867	1	0	0
2·1140	9·9200	−1·5500	0	1	0
−0·3867	−1·5500	0·2867	0	0	1
1	3·993954	−0·730587	1·889387	0	0
0	1·476782	−0·0055440	−3·3993952	1	0
0	−0·005538	0·004183	0·730587	0	1
	1	−0·003751	−2·704496	0·677148	0
	0	0·004163	0·715610	0·003750	1
		1	171·897669	0·900792	240·211386

कीलकीय रेखाओं को लिखकर उपरि त्रिभुज के अवयवों को शून्य किया।

1	3·993954	−0 730587	1·889287	0	0
0	1	−0·003751	−2·704496	0·677148	0
0	0	1	171 897669	0 900792	240·211386
1	0	−0·715606	12·690919	−2·704497	0
0	1	0	−2·059708	0·680526	0 901032
0	0	1	171·898669	0·900792	240·211384
1	0	0	135·701920	−2·059885	171·897669
0	1	0	−2·059708	0·680526	0·901032
0	0	1	171·897669	0·900792	240·211384
	I			(S^{ij})	

सूत्र (19·8) की सहायता से,

$a_1 = S^{11} d_1 + S^{12} d_2 + S^{13} d_3$

$= (135·701920)(·039) + (-2·059885)(8·000) + (171·897669)(0·133)$

$= 11·6757$

इसी प्रकार,

$a_2 = 5·4837$

और $a_3 = 45·8584$

विविक्तकर फलन,

$Z = 11·6757\, X_1 + 5·4837\, X_2 + 45·8584\, X_3$ है।

(2) महालानबीस D^2 सूत्र (19.10.1) के अनुसार निम्न है:—

$D^2_3 = a_1 d_1 + a_2 d_2 + a_3 d_3$

$= (11·6757)(·039) + (5·4837)(8·000) + (45·8584)(·1133)$

$= 50·4241$

परिकल्पना H_0 की परीक्षा के लिए (19.11) के अनुसार प्रतिदर्शज

$$F = \frac{3 \times 3(3+3-3-1)}{3(3+3)(3+3-2)}\, D^2_3$$

$$= \frac{11}{18 \times 4} \times 50\ 4241$$

$$= 12{\cdot}606$$

सारणी (परि० प–5 2) द्वारा $\alpha = 05$ और स्व० को० 3 और 2 पर F का मान 19.16 है जो कि F के परिकलित मान से अधिक है अतः H_0 को स्वीकार कर लिया जाता है।

उदाहरण 19 2 यदि, उदाहरण (19 1) मे तीन लक्षणों के अतिरिक्त एक चर X_4 को और लिया जाय तो परिकल्पना H_0 चौथे लक्षण को बढ़ाने मे विविक्तकर शक्ति नहीं है, की परीक्षा निम्न प्रकार से कर सकते हैं —

चार लक्षणो X_1, X_2, X_3, X_4 पर किये गये प्रेक्षण 3 पुनरावृत्तियो के अनुसार निम्न हैं। इनके योग तथा माध्य आदि भी निम्न सारणी में दिखाये गये हैं:—

लक्षण		प्रतिकृतियाँ	V_1	V_2
		R_1	4 965	4 953
X_1		R_2	5 967	5·075
		R_3	5 544	6·565
	योग		16·476	16·593
	माध्य		5·492	5·531
		R_1	26 6	36 8
X_2		R_2	32·0	34·2
		R_3	29 6	41·2
	योग		88·20	112·20
	माध्य		29·400	37·400
		R_1	5·4	5·6
X_3		R_2	4·8	5·6
		R_3	5 0	4 4
	योग		15 2	15 6
	माध्य		5 066	5 200
		R_1	71·2	58 4
X_4		R_2	69 2	57 0
		R_3	71·6	59·4
	योग		212 0	174 8
	माध्य		70 666	58 266

विभिन्न चरो के लिए माध्यो के अन्तर $(V_2 - V_1)$ के अनुसार,

$d_1 = 0\ 039,\ d_2 = 8\ 000,\ d_3 = 0\ 133,\ d_4 = -12{\cdot}40$

सूत्र (19.5) के अनुसार सहायकों S_{ij} को परिकलित किया जहाँ $i, j = 1, 2, 3, 4$

$S_{11} = 0\ 5293,\quad S_{12} = 2{\cdot}1140,\quad S_{13} = -0{\cdot}3867$

$S_{14} = 0\ 3448,\quad S_{22} = 9\ 9200,\quad S_{23} = -1\ 5500$

$S_{24} = 0\ 7900,\quad S_{33} = 0\ 2867,\quad S_{34} = -0\ 2133$

$S_{44} = 1{\cdot}5533$

अतः विक्षेपण आव्यूह निम्न है:—

$$(S_{ij}) = \begin{bmatrix} 0{\cdot}5923 & 2\ 1140 & -0\ 3867 & 0\ 3448 \\ 2\ 1140 & 9\ 9202 & -1\ 5500 & 0\ 7900 \\ -0\ 3867 & -1\ 5500 & 0\ 2867 & -0\ 2133 \\ 0{\cdot}3448 & 0{\cdot}7900 & -0\ 2133 & 1{\cdot}5533 \end{bmatrix}$$

आव्यूह (S_{ij}) का कीलकीय सघनन या सक्षिप्त डूलिटिल विधि (abbreviated Doolittle method) द्वारा प्रतिलोम आव्यूह (S^{ij}) ज्ञात किया जो कि निम्न प्रकार है। इन विधियो का वर्णन परिशिष्ट–क मे दिया गया है।

$$(S^{ij}) = \begin{bmatrix} 228{\cdot}637303 & -6{\cdot}049397 & 267\ 541313 & -10\ 937085 \\ -6{\cdot}049397 & 0\ 851787 & -3\ 205020 & 0\ 469509 \\ 267{\cdot}541313 & -3\ 205020 & 338\ 642988 & -11{\cdot}255893 \\ -10\ 937085 & 0\ 469509 & -11{\cdot}255983 & 1{\cdot}287138 \end{bmatrix}$$

सूत्र (19 5) की सहायता से $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ ज्ञात किये,

$$\alpha_1 = (228\ 677303)\ (0{\cdot}039) + (-6{\cdot}049397)(8\ 000) + (267\ 541313)(0{\cdot}133) + (-10{\cdot}937085)(-12{\cdot}400)$$

$$= 131{\cdot}7245$$

इसी प्रकार,

$$\alpha_2 = 0\ 3302,\ \alpha_3 = 169\ 4065,\ \alpha_4 = -14{\cdot}1280$$

$$D^2{}_4 = \alpha_1 d_1 + \alpha_2 d_2 + \alpha_3 d_3 + \alpha_4 d_4$$

$$= 205\ 4971$$

सूत्र (19 12) के अनुसार

$$F=\frac{3\times3(3+3-4-1)}{(4-3)(3+3)(3+3-2)+3\times3\times50\ 4241}(205\ 4971-50\ 424\ 1)$$

$$=\frac{9}{24+453\ 8169}\times155\ 0730$$

$$=\frac{1395\ 6570}{477\ 8169}$$

$$=2\ 92$$

सारणी (परि० प–5 2) द्वारा $\alpha = 05$ तथा 1 और 1 स्व० को० पर F का मान 161 4 है जो कि परिकलित F के मान से अधिक है। अत परिकल्पना H_0 कि चौथे लक्षण X_4 को लेने पर विविक्तकर शक्ति नहीं बढ़ी है को स्वीकार कर लिया जाता है।

उदाहरण 19 3 तिल की प्रजातियों म विभेद जानने के लिए प्रयोग किया गया और तीन लक्षणों के प्रति प्रेक्षण लिये गये। अभिकल्पना म 3 पुनरावृत्तियाँ ली गई। प्रेक्षण निम्न सारणी के अनुसार प्राप्त हुए —

लक्षण		प्रजातियाँ			योग
		V_1	V_2	V_3	
	R_1	4 965	4 953	6 056	
X_1	R_2	5 967	5 075	6 022	
	R_3	5 544	6 565	6 967	
योग		16 476	16 593	19 045	52 114
माध्य		5 492	5 531	6 348	
	R_1	26 6	36 8	32 0	
X_2	R_2	32 0	34 2	35 2	
	R_3	29 6	41 2	32 0	
योग		88 20	112 20	99 20	299 60
माध्य		29 400	37 400	33 066	
	R_1	5 4	5 6	1 6	
X_3	R_2	4 8	5 6	1 0	
	R_3	5 0	4 4	1 4	
योग		15 2	15 [illegible]	4 0	34 8
माध्य		5 066	5 200	1 333	

परिकल्पना H_0 : इन तीनो प्रजातियो मे लिये गये लक्षणो के अनुसार, अन्तर नहीं है, की परीक्षा विल्क–Λ निकष द्वारा निम्न प्रकार कर सकते हैं।

यहाँ चरों X_i व X_j के वर्गों तथा गुणनों के योग S_{ij} निम्न प्रकार ज्ञात किये गये हैं:–

$$S_{11}=(4{\cdot}965^2+5{\cdot}967^2+5{\cdot}544^2)+(4{\cdot}953^2+5{\cdot}075^2+6{\cdot}565^2)$$
$$+(6{\cdot}056^2+6{\cdot}022^2+6{\cdot}967^2)-\frac{(52{\cdot}114)^2}{9}$$
$$=4{\cdot}094797$$

और $$S_{12}=(4{\cdot}965\times26{\cdot}6+5{\cdot}967\times32{\cdot}0+\ldots+6{\cdot}022\times35{\cdot}2$$
$$+6{\cdot}967\times32{\cdot}0)-\frac{(52{\cdot}114)(299{\cdot}60)}{9}$$
$$=7{\cdot}322045$$

इसी प्रकार,

$$S_{22}=142{\cdot}728889,\quad S_{33}=30{\cdot}240000$$

और $$S_{13}=-7{\cdot}836266,\quad S_{23}=-3{\cdot}133333$$

सूत्र (19.13.1) की सहायता से,

$$B_{11}=\tfrac{1}{3}\{(16{\cdot}475)^2+(16{\cdot}593)^2+(18{\cdot}045)^2\}-\frac{(52{\cdot}114)^2}{9}$$
$$=1{\cdot}402862,$$

और $$B_{12}=\tfrac{1}{3}\{(16{\cdot}475)(88{\cdot}2)+(16{\cdot}593)(112{\cdot}20)$$
$$+(18{\cdot}045)(99{\cdot}20)\}-\frac{(52{\cdot}114)(299{\cdot}6)}{9}$$
$$=-0{\cdot}089889$$

इसी प्रकार,

$$B_{22}=96{\cdot}222222,\qquad B_{33}=28{\cdot}906666$$

और $$B_{13}=-6{\cdot}352133,\qquad B_{23}=4{\cdot}133333$$

सूत्र (19.14) की सहायता से सारणिक $|W+B|$ को लिखकर इसका मान ज्ञात कर लिया। यह ज्ञात है कि $S_{ij}=W_{ij}+B_{ij}$.

$$|W+B|=\begin{vmatrix}4{\cdot}094797 & 7{\cdot}322045 & -7{\cdot}836266\\ 7{\cdot}322045 & 142{\cdot}72889 & -3{\cdot}133333\\ -7{\cdot}836266 & -3{\cdot}133333 & 30{\cdot}240000\end{vmatrix}$$
$$=7607{\cdot}212585$$

$$W_{ij} = S_{ij} - B_{ij}$$

$$W_{11} = S_{11} - B_{11}$$

$$= 4{\cdot}094797 - 1\ 402862$$

$$= 2\ 691935$$

इसी प्रकार

$$W_{22} = 46\ 506667 \quad W_{33} = 1\ 333336,$$

$$W_{12} = 7\ 411884 \quad W_{13} = -1\ 484133 \quad W_{23} = -7\ 266666$$

$$|W| = \begin{vmatrix} 2\ 691935 & 7\ 411884 & -1\ 484133 \\ 7\ 411884 & 46\ 506667 & -7\ 266666 \\ -1\ 484133 & -7\ 266666 & 1\ 333336 \end{vmatrix}$$

सारणिक $|W|$ का मान भी ज्ञात किया जो कि निम्न है —

$$|W| = 8\ 962041$$

$$\Lambda = \frac{8\ 962041}{7607\ 212585}$$

$$= 0\ 001178$$

सूत्र (19.16 2) के अनुसार,

$$\chi^2 = -(2\ 3026) \times 5 \times \log_{10}(0\ 001178) - (2\ 3026) \times 5 \times (2\ 928855)$$

$$= 33\ 7198$$

χ^2 की स्व० को० $= 3 \times (3-1) = 6$

$\alpha = 05$ व 6 स्व० को० पर χ^2 का सारणीबद्ध मान 12 59 है जो कि परिकलित मान से कम है अतः परिकल्पना H_0 अस्वीकृत है। इसका अभिप्राय है कि विचाराधीन लक्षणों के आधार पर इन प्रजातियों में सार्थक अन्तर है।

H_0 की F-परीक्षा, प्रतिदर्शज (19 17) के अनुसार निम्न प्रकार कर सकते हैं —

इस उदाहरण के लिए,

$$m = 9 - \frac{3+2+1}{2} = 6, \quad q = (3-1) = 2$$

$$\lambda = \frac{3 \times 2 - 2}{4} = 1, \quad s = \sqrt{\frac{9 \times 4 - 4}{9 + 4 - 5}} = 2$$

$$r = \frac{3 \times 2}{2} = 3$$

$$F=\frac{6\times 2-2\times 1}{2\times 3}\times\frac{1-(0.001178)^{\frac{1}{2}}}{(0.001178)^{\frac{1}{2}}}$$

$$=\frac{10}{6}\times\frac{0.965678}{0.034322}=\frac{9.65678}{0.205932}$$

$$=46.88$$

सारणी (परि० प–5.2) द्वारा α = .01 तथा 6 और 10 स्व० को० पर F का मान 5·39 है। F का परिकलित मान सारणीबद्ध मान से अधिक है अतः परिकल्पना H_0 को अस्वीकार कर दिया। अतः यह कह सकते हैं कि प्रजातियों में सार्थक अन्तर है।

उपर्युक्त उदाहरणों का न्यास कृषि महाविद्यालय, उदयपुर के एक छात्र श्री इकबाल हुसैन के सौजन्य से प्राप्त हुआ।

प्रश्नावली

1. विवेचक फलन का उपयोग किन स्थितियों में उपयुक्त है, स्पष्ट कीजिये।
2. मक्का की प्रजातियों में विभेद जानने के हेतु एक परीक्षण किया गया[1]। निम्न सारणी में न्यास पांच प्रजातियों तथा पांच लक्षणों के प्रति दिया गया है। प्रत्येक प्रजाति के लिए चार पुनरावृत्तियों का प्रयोग किया गया।

प्रजाति संख्या		उपज क्विन्टल प्रति हैक्टर (X_1)	प्रति पौधे में बालियों की संख्या (X_2)	प्रति भुट्टे में दानों की संख्या (X_3)	100 दानों का भार (ग्राम में) (X_4)	पौधे की ऊँचाई (से० मी०) (X_5)
	R_1	11.43	0.850	341.6	11.73	195.65
1	R_2	17.35	0.666	434·8	16.93	205·71
	R_3	19.14	0.909	382·8	16.12	211·40
	R_4	22.17	0.863	438.6	16.66	225.91
2	R_1	15.39	1.000	270.2	16.20	155·32
	R_2	16·98	0·904	321.0	17·70	187·52
	R_3	9·39	0·695	230.0	16·12	137·82
	R_4	13.80	0.826	318·2	14·70	171·26
3	R_1	9.79	0·590	245·0	17·12	236·45
	R_2	8.02	0.541	298·0	13.56	208.79
	R_3	8·40	0.700	255.5	19.97	211·55
	R_4	7·73	0·545	256.0	16·35	201·50

1 इस प्रश्न का न्यास श्री योगेन्द्र कुमार गुप्ता, राज० कृषि महाविद्यालय, उदयपुर के सौजन्य से प्राप्त हुआ।

4	R_1	24 88	0·956	423·6	17·40	232·91
	R_2	20·90	1·000	373 0	15 14	217·87
	R_3	22·17	0·952	425·4	16 81	234·00
	R_4	24 07	0·950	435 6	17·76	217·90
5	R_1	26·47	0·875	·29·6	19 38	255·58
	R_2	12 52	0 782	211·4	20·76	201·47
	R_3	10 04	0·826	227·6	15 46	202·47
	R_4	10 01	0·681	251 4	17·32	220 07

उपर्युक्त न्यादर्श के लिए (i) प्रजाति 1 व 2 में विवेचक फलन $Z = a_1X_1 + a_2X_2 + a_2X_3 + a_4X_4 + a_5X_5$ ज्ञात कीजिये।

(ii) विभिन्न प्रजातियों में दूरियाँ D^2 ज्ञात कीजिये और उनकी सार्थकता की परीक्षा कीजिये।

(iii) विभिन्न प्रजातियों में समानीयता की विल्क-Λ द्वारा परीक्षा कीजिये।

□□□

20 प्रॉबिट विश्लेषण

अनेक जैव अध्ययनों मे विभिन्न रासायनिक यौगिको का कीटो पर विपंसापन ज्ञात किया जाता है। इसके लिए प्रयोगो मे या तो भिन्न-यौगिको को लिया जाता है या एक ही यौगिक की विभिन्न सान्द्रताओ या मात्राओं को प्रयुक्त किया जाता है। इन प्रयोगों में म जीवित कीटो की गणना प्रत्येक प्रायोगिक यूनिट (Experimental unit) पर टाक्सिन (Toxin) प्रयुक्त करने से पूर्व व पश्चात् कर ली जाती है। माना कि टाक्सिन प्रयुक्त करने से पूर्व एक प्रायोगिक एकक मे n कीट थे और टाक्सिन के कारण r कीट मर गये। अत अनुपात $\frac{r}{n}$ या $\frac{r}{n} \times 100$ प्रतिशत कीट उस यौगिक के कारण मरे। कीटो के मरन की सख्या टाक्सिन के विपंसेपन एव साद्रता पर निर्भर करती है।

उपर्युक्त वर्णन से स्पष्ट है कि हमे इस प्रकार के प्रयोगो मे दो चरो से सम्बन्ध रहना है, एक तो यौगिक के घोल की साद्रता या मात्रा से और दूसरा मृत कीटो की प्रतिशत सख्या से। यह सिद्ध किया जा चुका है कि इन दोनो चरो म स किसी एक का भी बटन प्रसामान्य नही है। अतः साद्रता को लघुगणक साद्रता म और प्रतिशत मृतको की सख्या को प्रॉबिट मे रूपान्तरित कर दिया जाता है।

किसी टाक्सिन की वह मात्रा या साद्रता, जिसके कम प्रयुक्त करन पर इसका कोई प्रभाव नही होता हो किन्तु इससे अधिक मात्रा को प्रयुक्त करने पर इसका प्रभाव स्पष्ट प्रतीत होता हो, सहिष्णुता (tolerance) कहलाती है। सहिष्णुता को प्राय λ द्वारा सूचित किया जाता है। λ को डी० जे० फिने (D J. Finney) ने साद्रता ही कहा और प्रॉबिट विश्लेषण मे साद्रता के लघुगणक को ही लिया जाता है। λ का लघुगणक रूपान्तरण करने पर रूपान्तरित चर X (मान लिया) का बटन प्रसामान्य हो जाता है जहाँ

$$X = \log_{10} \lambda \qquad \ldots (20\ 1)$$

चर X का मात्रा-श्रेणी (Dosage) कहते हैं। किसी विशेष स्थिति म कोई अन्य रूपान्तरण उचित हो सकता है किन्तु साधारणतः लघुगणक रूपान्तरण ही उपयुक्त है। स्पष्टत λ का परास 0 से ∞ है किन्तु $\log_{10} \lambda = X$ का परास $-\infty$ से ∞ हो जाता है जो कि चर X का बटन प्रसामान्य होने के लिए एक प्रतिबन्ध है।

यदि λ का प्रायिकता घनत्व फलन $f(\lambda)$ है तो मृत कीटो का अनुपात जो कि टाक्सिन की साद्रता को λ से $\lambda + d\lambda$ तक बढ़ाने से प्राप्त होता है, माना dP है। अत

$$dP = f(\lambda) d\lambda \qquad \ldots (20\ 2)$$

किसी जीव-सख्या को एक रसायनिक यौगिक की मात्रा λ_1, जो कि सहिष्णुता से अधिक है देने पर मृत कीटो का अनुपात 'P' निम्न होता है :

$$P=\int_{0}^{\lambda_1} f(\lambda)\, d\lambda \qquad \text{...(20 3)}$$

जो मात्रा 50% कीटों को मारती है उसे माध्य घातक मात्रा (median lethal dose) कहते हैं और इसे LD_{50} द्वारा निरूपित करते हैं। यदि प्रयोग ऐसा है कि जीव मरते नहीं किन्तु इन पर केवल पदार्थ का प्रभाव देखा जाता है तो जो मात्रा 50% जीवों को प्रभावित करती हो, मध्यम प्रभावी मात्रा (median effective dose) कहलाती है और इसे ED 50 द्वारा निरूपित करते हैं। इसी प्रकार किसी अन्य अनुपात के हेतु अनुरूप संकेतन दिये जा सकते हैं जैसे 80% के लिए LD 80 या ED 80 या 75% के लिए LD 75 या ED 75 द्वारा निरूपित कर सकते हैं। LD 50 या ED 50 ज्ञात करने का मुख्य कारण यह है कि इस मात्रा का चरम प्रतिशत मानों की अपेक्षा अधिक परिशुद्ध आकलन किया जा सकता है।

सहिष्णुता का कोई भी बंटन हो, LD 50 या ED 50 के लिए मात्रा λ_0 निम्न समीकरण द्वारा ज्ञात कर सकते है,

$$\int_{0}^{\lambda_0} f(\lambda)d\lambda=0.5 \qquad \text{....(20.4)}$$

व्यवहार मे सहिष्णुता λ का बंटन फलन $f(\lambda)$ ज्ञात करना अत्यधिक कठिन है। लघुगणक रूपान्तरण के पश्चात् चर x का बंटन प्रसामान्य हो जाता है जिसके अनुसार,

$$dP=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\,dx\right\} \qquad \text{... (20 5)}$$

समीकरण (20 5) में μ समग्र के लिए मध्यम सहिष्णुता या मध्यम प्रभावी मात्रा श्रेणी है अत

$$\mu=\log_{10}(\text{LD 50 या ED 50}) \qquad \text{(20 6)}$$

और σ^2 इस बंटन का प्रसरण है।

दो जैव विष के लिए मात्रा LD 50 या ED 50 ज्ञात करने मात्र से पूर्ण आशय नहीं निकलता है यदि एक जीव-विष के लिए सहिष्णुता के बंटन में प्रसरण दूसरे जैव विष के लिए बंटन के प्रसरण से अधिक हो अर्थात् $\sigma^2_1>\sigma^2_2$ (जबकि σ^2_1 व σ^2_2 पहले व दूसरे विष के लिए क्रमश प्रसरण हैं) तो दूसरे विष की मात्रा में थोड़े ही अन्तर के लिए मृत्यु संख्या में अधिक अन्तर हो जाता है। ऐसे उदाहरण जिनके शरीर क्रियात्मक (physiological) प्रभाव एक से हो अर्थात् माध्य अनुरूपी हों तो उनके लिए x के प्रसरण भी लगभग समान होते हैं तथापि इनकी मध्यम घातक मात्राओं में पर्याप्त अन्तर होता है। ऐसी स्थिति में उनकी आपेक्षिक प्रभाव शक्ति (potencies) केवल मध्यम घातक मात्रा द्वारा ज्ञात कर सकते हैं।

ऊपर दिये हुए विवरण के अनुसार $x=\log_{10}\lambda$ के प्राचल λ और σ^2 का प्रागणन प्रयोग में प्राप्त मृतकों की संख्या के रूपान्तरित मान प्रॉबिट पर निर्भर है। इस रूपान्तरण को प्रॉबिट शब्द सर्वप्रथम ब्लिस (Bliss) ने 1934 में दिया। इससे पूर्व गाडुम (Gaddum) ने इसी मान को प्रसामान्य तुल्य विचल (normal equivalent deviate) का नाम दिया था। अनुपात P के प्रॉबिट की परिभाषा इस प्रकार कर सकते हैं।

यह प्रसामान्य बटन जिसका माध्य 5 और प्रसरण 1 है, में भुजा अक्ष (Abscissa) पर वह बिन्दु है कि जिसके बाईं ओर का क्षेत्र सम्भाविता P के समान है। P के तदनुरूपी प्रॉबिट को Y से निरूपित करते हैं और P तथा Y में गणितीय सम्बन्ध निम्न होता है

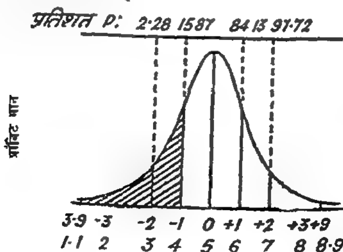
$$P=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{Y}\exp\{-\tfrac{1}{2}(X-5)^2\}\,dx \qquad ...(20\ 7)$$

माना कि $X-5=u$ तो $dx=du$ और u की सीमाएँ जब $X=-\infty$, $u=-\infty$ $X=Y$, $u=Y-5$

अतः u के पदों में X का प्रतिस्थापन करने पर,

$$P=\int_{-\infty}^{y-5}\exp\{-\tfrac{1}{2}u^2\,du\} \qquad ...(20\ 7\ 1)$$

अनुपात P के समान क्षेत्र और प्रॉबिट Y में संबंध को प्रसामान्य वक्र द्वारा चित्र (20.1) में प्रदर्शित किया गया है।



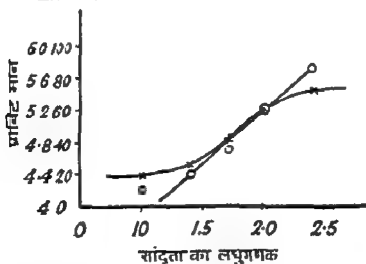
चित्र 20.1 प्रतिशत P और प्रॉबिट Y में संबध का चित्रीय प्रदर्शन

जब प्रॉबिट Y का मान 8 9 होता है तो इसके बाईं ओर का वक्र के नीचे का क्षेत्र लगभग 1 होता है। इसी प्रकार जब Y=1 1 हो तो बाईं ओर का क्षेत्र लगभग शून्य होता है। अतः प्रॉबिट Y का मान 1·1 से 8 9 तक विचर सकता है क्योंकि मृत्यु-संख्या 0 प्रतिशत से कम और 100 प्रतिशत से अधिक नहीं हो सकती है।

यदि लघुगणक सांद्रता और प्रतिशत मृतकों से ग्राफ बनायें तो यह S (एस) के रूप का एक वक्र होता है जिसे सिगमाइड (Sigmoid) वक्र कहते हैं। यदि प्रतिशत मृत्यु को प्रॉबिट में रूपान्तरित कर दें तो यह वक्र एक सरल रेखा में परिवर्तित होता है।

एक प्रयोग द्वारा एनड्रीन (Endrin) की पाँच मात्राओं पर प्राप्त प्रतिशत मृत्यु संख्या और रूपान्तरित मान निम्न सारणी में दिये गये हैं। सांद्रता के लघुगणक मानों और प्रतिशत मृत्यु संख्या का आलेखित करके सिगमाइड वक्र और सांद्रता के लघुगणक मानों और प्रतिशत मृत्यु संख्या के तदनुसार प्रॉबिट मानों को आलेखित करके प्रॉबिट रेखा को चित्र (20.2) में प्रदर्शित किया गया है —

सांद्रता मिलीग्राम प्रति 1000 घन से० (λ)	$\log_{10} \lambda$ (X)	प्रतिशत मृत्यु संख्या (P)	प्रॉबिट मान (Y)
250	2·4	76·6	5·7
100	2·0	60·0	5·2
50	1·7	40·0	4·7
25	1·4	26·6	4·4
10	1·0	20·0	4·2



चित्र 20.2 सिगमाइड वक्र तथा प्रॉबिट रेखा लेखाचित्र

यदि लघु० सहिष्णुता का बटन प्रसामान्य न हो तो प्रॉबिट बिन्दुओं का आलेख करने पर भी चित्र रेखीय नहीं होता है। चित्र का रेखीय न होना, कीटों के समूह एकसे न होने के कारण हो सकता है अतः इस स्थिति में चित्र अरेखीय प्रतीत होता है। प्रायः ऐसी स्थिति में सहिष्णुता λ का लघुगणक रूपान्तरण उचित नहीं होता है।

कुछ फफूंदनाशियों के लिए रूपान्तरण $X = \lambda^1$ उपयुक्त है जबकि $\lambda \leq 1$ होता है किन्तु व्यवहार में लघुगणक और प्रॉबिट रूपान्तरण ही प्रयोग किये जाते हैं जब तक कि इनके अनुचित होने के विशेष कारण ज्ञात न हो चुके हों।

न्यास का प्रॉबिट विश्लेषण

रूपान्तरण के पश्चात् न्यास का सांख्यिकीय विश्लेषण किया जाता है। इसका उद्देश्य LD 50 या ED 50 को ज्ञात करना, विभिन्न परिकल्पनाओं की परीक्षा करना या X पर प्रॉबिट Y का समाश्रयण ज्ञात करना हो सकता है। समाश्रयण रेखा का समजन करना अत्यन्त उपयोगी है क्योंकि इसकी सहायता से LD 50 या ED 50 या अन्य किसी भी प्रतिशत के तुल्य प्रॉबिट के लिए सान्द्रता का आकलित मान ज्ञात कर सकते हैं। इसके अतिरिक्त रासायनिक पदार्थ की सवेदिता (Sensitivity) रेखा के ढलान के समान होती है। यदि रेखा का ढलान अधिक होता है तो मात्रा-श्रेणी में एक निश्चित प्रतिशत-मृतकों के परास के लिए कम अन्तर होता है अन्यथा इसके विपरीत स्थिति होती है। यदि आकलित समाश्रयण रेखा का समीकरण $\hat{Y} = a + bx$ है तो रेखा का ढलान b के समान है। 'b' प्रॉबिट मान में वह वृद्धि है जो कि x में प्रति इकाई वृद्धि करने से उत्पन्न होती है। गणितीय रूप से $b = \frac{1}{s}$ है जहाँ s, x के मानक विचलन σ का आकलक है।

प्रॉबिट समाश्रयण रेखा का नेत्र समंजन

प्रॉबिट समाश्रयण रेखा का समजन, साधारणतः दो चरों में समाश्रयण से भिन्न है। साधारण स्थिति में यह कल्पना की गई है कि स्वतन्त्र चर x के प्रत्येक मान के लिए आश्रित चर Y का प्रसरण समान रहता है किन्तु यह कल्पना प्रॉबिट रेखा के समजन की स्थिति में मान्य नहीं है। LD 50 पर प्रॉबिट Y का प्रसरण न्यूनतम और 0% या 100% मृतकों की स्थिति में अधिकतम (∞ तक) होता है। अतः प्रॉबिट रेखा का यथार्थ समजन करने के लिए X के प्रत्येक मान को चर X के प्रसरण के प्रतिलोम से भारित करना होता है। यदि n कीटों के एक समूह पर किसी कीटनाशी को प्रयुक्त करने पर मृतक कीटों का औसत अनुपात P है तो n, (n-1), (n-2), .. 3,2,1 कीटों के मरने की प्रायिकता क्रमशः $(P+Q)^n$ के क्रमिक पदों द्वारा दी जा सकती हैं, क्योंकि स्पष्टतः मृतकों की संख्या का बटन द्विपद बटन होता है और $P+Q=1$ है। मानाकि n कीटों में से r कीट मर जाते हैं (प्रभावित होते हैं) तो द्विपद बटन के अनुसार प्रेक्षित अनुपात $\frac{r}{n} = P$ का प्रसरण, $\frac{PQ}{n}$ है। अतः अनुपात P, n के प्रतिलोमानुपाती है। यह विदित हो कि प्रसरण के प्रतिलोम का प्रायः जानकारी की मात्रा (quantity of information) भी कहते है जो कि n के समानुपाती है। इस जानकारी की मात्रा को ही समूह पर प्रेक्षण के भार के रूप में लिया जाता है। भार गुणक,

$$w = \frac{Z^2}{PQ} \qquad \text{..(20.8)}$$

होता है।

जबकि Z प्रायिकता P के तदनुसार कोटि मान है। परिकलन को सरल बनाने के लिए ब्लिस (Bliss) ने रेखा पर प्राबिट मान Y के लिए तदनुसार भार गुणांक W के मानों को सारणीबद्ध किया।

पर X का भारित माध्य,

$$X = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i w_i X_i}{\sum_{i=1}^{k} n_i w_i} \qquad \text{....(20.9)}$$

जहाँ $i = 1, 2, 3, \ldots, k$

सूत्र (20.9) में कीटों के k वर्ग हैं और i वें वर्ग में कीटों की संख्या n_i है। w_i, W_i का आगणित मान है।

व्यवहार में प्रायिकता, Z, P व Q के मान ज्ञात करना लगभग असम्भव है अतः इनके आकलित मान z, p, q क्रमशः प्रयोग में लाये जाते हैं और इन्हीं के आधार पर w के मान ज्ञात किये जाते हैं।

माना कि मध्यम घातक मात्रा m है अर्थात् m = LD 50 तथा X का मान m को रेखा $\hat{Y} = a + bx$ को सन्तुष्ट करता है। b का मान प्रेक्षित बिन्दुओं को दृष्टिगत कर समंजित रेखा द्वारा ज्ञात कर सकते हैं। इस अस्थायी रेखा पर दो चरम बिन्दु लेकर (एक कम और दूसरा वृहत् मान का) उनके निर्देशांक ग्राफ में देखकर ज्ञात कर लिये जाते हैं। माना कि यह निर्देशांक (X_1, Y_1) और (X_2, Y_2) हैं जो कि रेखा $\hat{Y} = a + bX$ को सन्तुष्ट करते हैं।

$$\left.\begin{aligned} \hat{Y}_1 &= a + bX_1 \\ \text{और} \quad \hat{Y}_2 &= a + bX_2 \end{aligned}\right\} \qquad \text{....(20.10)}$$

इन समीकरणों को हल करने पर,

$$b = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}$$

है। और किसी एक समीकरण में b का परिकलित मान रखने पर a का मान ज्ञात हो जाता है।

समजित समीकरण में Y=5 रखने पर X का मान ज्ञात हो जाता है जो कि m के समान है अर्थात्

$$5=a+bm \qquad ....(20.11)$$

समाश्रयण रेखा का नेत्र समजन करते समय यह सावधानी बर्तनी होनी है कि रेखा 40 से 60 प्रतिशत तक के बिन्दुओं से होकर जाय या ये बिन्दु रेखा से निकटतम हों। चरम बिन्दुओं की ओर कोई ध्यान नहीं देना चाहिए अर्थात् वह रेखा से अधिक दूरी पर भी हो सकते हैं।

m की मानक त्रुटि,

$$s_m=\frac{1}{b\sqrt{\sum_i n_i w_i}} \qquad ...(20.12)$$

यदि m और X में अधिक अन्तर हो तो यह कम यथार्थ आगणन होता है अतः m के प्रसरण का अधिक परिशुद्ध मान,

$$v(m) = \frac{1}{b^2}\left\{\frac{1}{\sum_i n_i w_i}+\frac{(m-\bar{X})^2}{\sum_i n_i w_i (X_i-\bar{X})^2}\right\} \qquad ....(20.13)$$

$$s_m=\sqrt{v(m)} \qquad ....(20.14)$$

α प्रतिशत सा० स्त० पर m की विश्वास्यता सीमाएँ (Fiducial limits)[1],

$$m \pm s_m\, t_\alpha \qquad ....(20.15)$$

हैं।

जहाँ t_α, α सा० स्त० व (k − 2) स्व० को० पर t का सारणीबद्ध मान है।

b का प्रसरण,

$$v(b) = \frac{1}{\sum_i n_i w_i (X_i-\bar{X})^2} \qquad ....(20.16)$$

$$v(b) = \frac{1}{\sum n_i w_i x_i^2} \qquad ....(20.16.1)$$

जहाँ $\sum_i n_i w_i x_i^2 = \sum_i n_i w_i X_i^2 - \frac{(\sum_i n_i w_i X_i)^2}{\sum_i n_i w_i}$

1 Fiducial limits, जो कि प्रो० फिशर द्वारा सुझाई गई थी, confidence limits से अधिकांश परिस्थितियों में परिणामतः भिन्न नहीं हैं तथापि दोनों में सैद्धान्तिक रूप से अन्तर है। इनकी विशद् व्याख्या इस पुस्तक के स्तर के अनुरूप नहीं है अतः इसकी यहाँ उपेक्षा कर दी गई है।

और $$s_b = \sqrt{v(b)}$$ ....(20.17)

प्राचल β की $(1-\alpha)$ 100 प्रतिशत विश्वास्यता सीमाएँ

$$b \pm s_b \; t_\alpha$$ ...(20.18)

हैं जहाँ b प्राचल β का आकलक है।

s_b का मान (20.16) के अनुसार है और t_α का मान α सा० स्त० व $(k-2)$ स्व० को० के लिए सारणी द्वारा ज्ञात कर लिया जाता है।

उपर्युक्त वर्णन मे भार, प्रसरण आदि का परिकलन इस कल्पना पर आधारित है कि प्रारेक्षित बिन्दुओ और समाश्रयण रेखा पर तुल्य बिन्दुओ मे विषमांगता नही है। अतः विश्लेषण से पूर्व विषमांगता की χ^2–परीक्षा करना आवश्यक है। जबकि यहाँ प्रतिदर्शज,

$$\chi^2 = \sum \frac{(r_i - n_i P_i)^2}{n_i P_i Q_i}$$ ....(20.19)

$$(i=1, 2, 3, ..., k)$$

है। जहाँ i वें समूह मे प्रेक्षित मृत्यु-संख्या r_i है और प्रत्याशित अनुपात P_i है। χ^2 की स्व० को० $(k-2)$ है।

यदि परिकलित χ^2 का मान, पूर्व निर्धारित सा० स्त० α व $(k-2)$ स्व० को० के लिए सारणीबद्ध मान से अधिक हो तो विषमांगता सार्थक सिद्ध होती है। इस स्थिति मे भार, $\chi^2/(k-2)$ के समान अधिक आकलित होते हैं। संख्या $\chi^2/(k-2)$ को विषमांगता गुणक कहते हैं। अधिक आकलित होने के कारण उत्पन्न क्षति पूर्ति करने के लिए सभी प्रसरणो को संख्या $\chi^2/(k-2)$ से गुणा कर दिया जाता है।

माना कि विषमांगता गुणक ϕ है, तो

$$\phi = \frac{\chi^2}{k-2}$$ ....(20.20)

अतः b का संशोधित प्रसरण,

$$v'(b) = \frac{\phi}{\sum_i (n_i w_i x_i^2)}$$ ....(20.21)

और $$s'_b = \sqrt{v'(b)}$$ ..(20.22)

β की संशोधित विश्वास्यता सीमाएँ निम्न हैं :—

$$b \pm s'_b \; t_\alpha$$ ....(20.23)

उदाहरण 20.1 एक कीटनाशी ट्राईक्लोरफोन की विभिन्न मात्राओ का कीट, रेड पम्पकिन बीटल (red pumpkin beetle) पर प्रभाव जानने के हेतु प्रयोग किया गया।

इस प्रयोग म प्रत्येक साद्रता के घोल को 30 कीटा पर प्रयुक्त किया गया जिसके परिणाम स्वरूप निम्न आँकड़े प्राप्त हुए —

घोल की साद्रता (मिली ग्राम प्रति 100 घन से०)	मृत कीटो की सख्या	प्रतिशत मृत्यु सख्या
00	0	0
7 5	4	13 33
10 0	7	23 33
25 0	13	43 33
50 0	20	66 66
75 0	25	83 33

(इस प्रयोग का न्यास डॉ० बी० एस० कावड़िया, उदयपुर विश्वविद्यालय उदयपुर के सौजन्य से प्राप्त हुआ।)

(i) इस न्यास मे प्रॉबिट समाश्रयण रेखा $\hat{Y}=a+bX$ का नेत्र समजन तथा प्राचल β की 99 प्रतिशत विश्वास्यता सीमाएँ इस प्रकार ज्ञात कर सकते हैं।

पहले घोल की साद्रता के लघुगणक मान 'X' और प्रतिशत मृत्यु-सख्या के रूपान्तरित मान Y और P के विभिन्न मानो के लिए भार w, इनके लिए दी गई सारणियों (परि० घ-13) व (परि० घ-14) द्वारा ज्ञात किये, जो कि निम्न सारणी मे दिये गये हैं —

$\log_{10}\lambda$ (X)	प्रॉबिट मान (Y)	भार ($w=Z^2/pq$)
0 8757	3 89	0 405
1 0000	4 27	0 532
1 3979	4 83	0 627
1 6990	5 43	0 601
1 8751	5 97	0 439

इस उदाहरण के प्रत्येक समूह मे कीटा की सख्या समान है जो कि 30 है अत प्रत्येक n_i का मान 30 ही रखना होगा।

$$\sum_i n_i w_i = n \sum_i w$$

$$=30 \times 2\ 604$$

$$=78\ 120$$

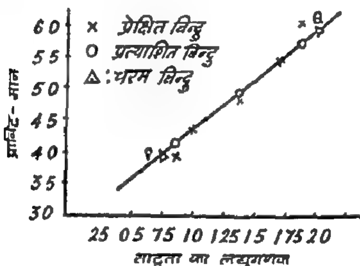
$$\sum_{i} n_i w_i X_i = r \sum_{i} w_i X$$

$$= 30(0\ 08757 \times 0\ 405 + 1\ 0000 \times 0\ 532 + $$
$$+ 1\ 8751 \times 0\ 439)$$
$$= 30 \times 3\ 6074$$
$$= 108\ 2220$$

सूत्र (20 9) की सहायता से

$$\overline{X} = \frac{108\ 222}{78\ 120} = 1\ 3853$$

माना कि नेत्र समंजित रेखा पर दो चरम मान P व Q हैं जैसा कि चित्र (20–3) में दिखाया गया है। बिन्दु P व Q के निर्देशांक क्रमशः (75, 3 9) और (2 0, 5 85) हैं।



चित्र 20–3 नेत्र समंजित प्रोबिट समाश्रयण रेखा

$$b = \frac{y_2 - y_1}{X_2 - X_1} = \frac{5\ 85 - 3\ 90}{2\ 0 - 0\ 75}$$

$$= \frac{1\ 95}{1\ 25} = 1\ 56$$

समीकरण $\hat{Y}_1 = a + bX_1$ में X_1 Y_1 व b का मान रखने पर a ज्ञात हो जाता है।

$$3\ 9 = a + 1\ 56 \times 75$$
$$a = 2\ 73$$

अत नेत्र समंजित समाश्रयण रेखा का निम्न समीकरण प्राप्त हो जाता है।

$$\hat{Y}=2{\cdot}73+1{\cdot}56\ X$$

LD 50 के लिए m का मान (20 11) के अनुसार निम्न है —

$$5=2{\cdot}73+1{\cdot}56\ m$$

$$m=\frac{2{\cdot}27}{1{\cdot}56}$$

$$=1{\cdot}457$$

लेखाचित्रीय विधि द्वारा प्रॉबिट समाश्रयण रेखा की सहायता से LD 50 का मान 1 47 है जैसा कि चित्र में दिखाया गया है। यह मान प्रॉबिट Y=5 के तदनुसार X का निर्देशांक है। सूत्र (20 12) की सहायता से m की मानक त्रुटि,

$$s_m=\frac{1}{1\ 56\ \sqrt{78\ 12}}$$

$$=\frac{1}{1\ 56\times 8{\cdot}84}=\frac{1}{13{\cdot}79}=0\ 0725 \text{ है।}$$

सूत्र (20.13) द्वारा m का अधिक परिशुद्ध प्रसरण,

$$v\ (m)=\frac{1}{(1\ 56)^2}\left\{\frac{1}{78{\cdot}12}+\frac{(1{\cdot}457-1{\cdot}385)^2}{8\ 331}\right\}$$

जबकि व्यंजक

$$\sum_i n_i\, w_i\, (X_i-\overline{X})^2=30\sum_i W_i\, (X_i-1{\cdot}3853)^2$$

$$=30\{0\ 405\ (0\ 8757-1\ 3853)^2+\ \ldots+0{\cdot}439\ (1{\cdot}875-1{\cdot}3853)^2\}$$

$$=8{\cdot}331$$

$$v(m)=\frac{1}{2\ 4336}\left\{0\ 0128+\frac{{\cdot}004858}{8\ 331}\right\}$$

$$=\frac{1}{2\ 4336}\{0\ 0128+{\cdot}00058\}$$

$$=\frac{1}{2\ 4336}\ (0\ 01338)$$

$$=0\ 005498$$

या $s_m=0\ 0741$

सूत्र (20.15) की सहायता से LD 50 की 95 प्रतिशत विश्वास्यता सीमाएँ,

$$C\ L = 1{\cdot}455 \pm {\cdot}0741 \times 3{\cdot}812$$
$$= 1{\cdot}455 \pm 0{\cdot}2358$$

m की उपरि सीमा $= 1{\cdot}455 + 0{\cdot}2358$

$= 1{\cdot}6908$

और m की निम्न सीमा $= 1{\cdot}4550 - 0{\cdot}2358$

$= 1{\cdot}2192$

सूत्र (20.16) के अनुसार b का प्रसरण

$$v(b) = \frac{1}{8{\cdot}331} = {\cdot}0120$$

यहाँ संख्या $\sum_i n_i w_i (X_i - \overline{X})^2$ को, v (m) का परिकलन करते समय ज्ञात किया जा चुका है अतः v (b) के लिए इसका सीधा प्रतिस्थापन कर दिया गया है।

या $s_b = 0{\cdot}11$

सूत्र (20.18) द्वारा b की विश्वास्यता सीमाएँ,

$$C.\ L. = 1{\cdot}56 \pm {\cdot}11 \times 3{\cdot}182$$
$$= 1{\cdot}56 \pm 0{\cdot}3500$$

b की उपरि सीमा $= 1{\cdot}91$

b की निम्न सीमा $= 1{\cdot}21$

कीटों की प्रेक्षित मृत्यु-संख्या तथा समायोजन रेखा द्वारा प्राप्त तदनुसार बिन्दुओं से प्राप्त मृत्यु-संख्या में विषमांगता की परीक्षा निम्न प्रकार कर सकते हैं :—

$\log_{10}\lambda$ (X)	रेखा द्वारा प्राप्त (Y)	प्रेक्षित मृत्यु-संख्या (Y) ≡ r_i	Y के तदनुसार (P)	nP =30P	$\frac{(r-nP)^2}{nPQ}$
0·8757	4·10	4	0·184	5·52	2·223
1·0000	4·27	7	0·233	7·00	00
1·3979	4·90	13	0·460	13·80	0·086
1·6990	5·43	20	0·666	20·00	00
1·8751	5·65	25	0·742	22·30	1·267

$$\chi_3^2 = \sum_{i=1}^{5} \frac{(r_i - n_i P_i)^2}{n_i P_i Q_i}$$

$$= 3.576$$

5 प्रतिशत सा० स्त० व 3 स्व० को० के लिए χ^2 का सारणीबद्ध मान 7·815 है जो कि परिकलित χ^2 से अधिक है। इससे सिद्ध होता है कि आलेख बिन्दुओं तथा समाश्रयण रेखा पर तुल्य बिन्दुओं में सार्थक विषमागता नहीं है। अत: विषमागता गुणक ज्ञात करने तथा संशोधन करने की कोई आवश्यकता नही है।

अधिकतम सम्भाविता विधि द्वारा प्रॉबिट समाश्रयण रेखा का समंजन

प्राय: ऐसा देखा गया है कि मात्रा-श्रेणी के लघुगणक और प्रॉबिट मृतको के अनुसार लेखाचित्र पर आलेखित बिन्दुओं के द्वारा नेत्र समंजन करना लगभग असम्भव है क्योंकि आलेखित बिन्दु अधिक प्रकीर्ण पाये जाते हैं। यह स्थिति प्राय विभिन्न प्रकार की प्रयोग सामग्री या अधिक शोधन मात्राओं के कारण भी उत्पन्न हो सकती है। अतः नेत्र समंजन न करके किसी विश्लेषिक प्रविधि को अपनाना चाहिये। यहाँ अधिकतम सम्भाविता विधि का वर्णन बिना किसी गणितीय प्रमाण के दिया गया है, समंजन विधि को निम्न प्रकार समझ सकते हैं :—

(1) मात्रा को मात्रा-श्रेणी (X) में और प्रतिशत मृतकों को प्रॉबिट (Y) में रूपान्तरित कर लिया जाता है।

(2) इन आनुभविक प्रॉबिट (empirical probit) Y का X के साथ ग्राफ पेपर पर आलेख करके, उचिततम प्रॉबिट रेखा का नेत्र समंजन कर दिया जाता है। उन आलेखित बिन्दुओं के तदनुसार अन्तःकालीन रेखा पर स्थित बिन्दुओं के लिए अनंतिम प्रॉबिट, (Provisional probit) Y_0, केवल एक दशमलव तक, पढ़ लिये जाते हैं।

(3) प्रत्येक मान Y_0 के अनुसार डी० जे० फिने (D. J. Finney) द्वारा दी गई सारणी से Y_0 के तदनुसार भार गुणांक w के मान ज्ञात कर लिये जाते हैं। चाहें तो सूत्र $\frac{Z^2}{PQ}$ द्वारा w के मान ज्ञात कर सकते हैं किन्तु सारणी द्वारा यह मान शीघ्रता एवं सुगमता से प्राप्त हो जाते हैं।

(4) समूह मे कीटो की संख्या n से w को गुणा करके संख्याएँ nw ज्ञात कर ली जाती हैं।

(5) ऐसा देखा गया है कि प्रेक्षित अनुपात का प्रॉबिट में रूपान्तरण द्वारा समीकरण रेखीय नही होता है अत: प्रॉबिट समाश्रयण समीकरण को कार्यकर प्रॉबिट (working probits) Y_1 का प्रयोग करके समजित करते हैं। कार्यकर प्रॉबिट को निम्न सूत्र द्वारा परिकलित करते हैं :—

$$Y_1 = Y_0 + \frac{p - P}{Z} \qquad \text{....(20 24)}$$

या
$$Y_1 = Y_0 - \frac{q - Q}{Z} \qquad \text{...(20.24 1)}$$

जहाँ Z, Y_0 के तदनुसार कोटि है और p प्रेक्षित प्रतिशत मृत्यु-संख्या के अनुसार प्रसामान्य वक्र का क्षेत्र है और $q = 1 - p$ है। P, Y_0 के तदनुसार प्रसामान्य वक्र का क्षेत्र है और

$$Q = 1 - P \text{ है।}$$

यदि परीक्षा में लिए गये सब कीट मर जाते हैं अर्थात् शत प्रतिशत मृत्यु-संख्या हो तो Y_{100} को अधिकतम कार्यकर प्रॉबिट कहते हैं। इस स्थिति में

$$Y_{100} = Y_0 + \frac{1 - P}{Z} \qquad \text{....(20 25)}$$

या
$$Y_{100} = Y_0 + \frac{Q}{Z} \qquad \text{....(20.25 1)}$$

फिशर और येट्स ने सारणी (Table XI)[2] में और फिने ने सारणी (Table IV)[3] में अधिकतम तथा न्यूनतम कार्यकर प्रॉबिट और $\frac{1}{Z}$ के परास के लिए सारणियाँ दी हैं।

यदि सारणी में दिये हुए P के मान के अतिरिक्त किसी अन्य मान के तदनुसार कार्यकर प्रॉबिट ज्ञात करना हो तो सूत्र (20 24) द्वारा इसका परिकलन कर सकते हैं। विभिन्न प्राचलों के परिकलन के लिए सूत्र निम्न प्रकार हैं। इन सूत्रों में Y_1 के अतिरिक्त सभी संकेतन पिछले खण्ड के अनुरूप हैं।

$$\bar{X} = \frac{\sum_i n_i w_i X_i}{\sum_i n_i w_i}, \quad \bar{Y} = \frac{\sum_i n_i w_i Y_{1i}}{\sum_i n_i w_i} \qquad \text{....(20 26)}$$

जहाँ $i = 1, 2, 3, ..., K$

यदि K कीटों के समूह हैं जिन्हें K विभिन्न पदार्थ दिये गये हैं तो,

$$\sum_i (n_i w_i x_i^2) = \sum_i n_i w_i X_i^2 - \frac{(\sum_i n_i w_i X_i)^2}{\sum_i n_i w_i} \qquad \text{....(20 27)}$$

$$\sum_i (n_i w_i x_i y_{1i}) = \sum_i n_i w_i X_i Y_{1i} - \frac{(\sum_i n_i w_i X_i)(\sum_i n_i w_i Y_{1i})}{\sum_i n_i w_i} \qquad \text{....(20 28)}$$

$$\sum_i n_i w_i y_{1i}^2 = \sum_i n_i w_i Y_{1i}^2 - \frac{(\sum_i n_i w_i Y_{1i})^2}{\sum_i n_i w_i} \qquad \text{....(20 29)}$$

2 Statistical Tables for Biological and Agricultural Workers by Fisher, R. A and Yates F.
3 Probit Analysis by Finney D J

$$b = \frac{\sum_i n_i w_i x_i y_{1i}}{\sum_i n_i w_i x_i^2} \quad ....(20\,30)$$

$$\chi^2_{k-2} = (\Sigma n_i w_i y_{1i}^2) - \frac{(\sum_i n_i w_i x_i y_{1i})^2}{\sum_i (n_i w_i x_i^2)} \quad ....(20\,31)$$

$$v(b) = \frac{1}{\sum_i (n_i w_i x_i^2)} \quad ....(20.32)$$

$$s_b = \sqrt{v(b)}$$

$$\phi = \frac{\chi^2}{K-2} \quad ....(20\,34)$$

और

$$s'_b = \phi\, s_b \quad ....(20\,35)$$

अत प्रोबिट समाश्रयण रेखा,

$$(\hat{Y} - \bar{Y}_1) = b\,(X - \bar{X}) \quad ....(20.36)$$

है। जहां $\hat{Y}$, X के निश्चित मान X_0 के लिए आगणित मान है, तो

$$v(\hat{Y}) = \frac{1}{\sum_i n_i w_i} + \frac{(X_0 - \bar{X})^2}{(\sum_i n_i w_i x_i^2)} \quad ....(20\,37)$$

$$s_{\hat{Y}} = \sqrt{v(\hat{Y})} \quad ....(20\,38)$$

$\hat{Y}$ की $(1-\alpha)$ 100 प्रतिशत विश्वास्यता सीमाएँ

$$\hat{Y} \pm s_{\hat{Y}}\, t_\alpha \quad ....(20\,39)$$

है। LD 50 या ED 50 के लिए $X=m$, $Y=5$ को समीकरण (20 36) में रखकर m का मान ज्ञात कर लिया जाता है।

50% मृत्यु सख्या के लिए मात्रा, अपनी पूर्व इकाइयों में (प्रतिलघु m)/5 के समान होती है। यदि χ^2 परीक्षा द्वारा विषमागता सिद्ध हो तो इसकी उपेक्षा नहीं की जा सकती है। अत अधिक यथार्थ विश्वास्यता सीमाएँ ज्ञात करने के लिए पहले ϕ का और इसके पश्चात् g का परिकलन करना होता है जबकि

$$g = \frac{t^2 \phi}{b^2 \sum_i (n_i w_i x^2)} \quad ..(20\,40)$$

LD 50 की यथार्थ विश्वास्यता सीमाएँ निम्न सूत्र द्वारा परिकलित की जाती हैं:—

$$\left\{ m + \frac{g}{1-g}(m - \bar{X}) \right\} \pm \frac{t}{b(1-g)} \times \sqrt{\left\{ \frac{1}{\sum_i n_i w_i} + \frac{(m-\bar{X})^2}{(\sum_i n_i w_i x^2)} \right\}_\phi} \quad ...(24\ 41)$$

यदि χ^2 निरर्थक हो तो g=0 रख दिया जाता है। इस स्थिति में t=1 96 के समान रखते हैं।

अधिकतम सम्भाविता विधि के प्रयोग को निम्न उदाहरण द्वारा और स्पष्ट समझ सकते हैं।

उदाहरण 20 2 —पिछले खण्ड में दिये गये उदाहरण (20 1) के प्रेक्षणों तथा चित्र (20–1) का प्रयोग करके अधिकतम सम्भाविता विधि द्वारा प्रॉबिट समाश्रयण रेखा का समंजन, LD 50 का परिकलन तथा LD 50 की 95 प्रतिशत विश्वास्यता सीमाओं का परिकलन निम्न प्रकार कर सकते हैं :—

सबसे पहले निम्न सारणी की रचना की गई है।

मात्रा श्रेणी (X) 1	समूह में कीटों की संख्या (n) 2	प्रतिशत मृत्यु संख्या (P) 3	आनुभविक प्रॉबिट (Y) 4	प्रत्याशित प्रॉबिट (Y_0) 5	कार्यकर प्रॉबिट (Y_1) 6	Y_0 के तदनुसार भार (w) 7
0 8757	30	13 33	3 89	4 15	3 912	0.487
1 0000	30	23 33	4 27	4 27	4 274	0 532
1 3979	30	45 33	4 83	4 90	4 832	0 634
1 6990	30	66 66	5 43	5 43	5 430	0 601
1 8751	30	83 33	5 97	5 65	5 932	0·545

उपर्युक्त सारणी के स्तम्भ (5) में प्रत्याशित प्रॉबिट मान चित्र (20–1) की सहायता से और स्तम्भ (6) में कार्यकर प्रॉबिट Y_1 के मान, डी० जे० फिने द्वारा लिखित पुस्तक प्रॉबिट विश्लेषण (Probit analysis, by D. J Finney) के परिशिष्ट में दी गई सारणी 4 (table IV) में देखकर रख दिये गये हैं। Y_1 मानों को Y_0 तथा p के मानों के अनुसार अन्तर्वेशन करके रखा गया है। यदि आवश्यकता हो तो प्रत्याशित प्रॉबिट Y_0 के तदनुसार Z व P के मान सारणियों द्वारा ज्ञात करके सूत्र (20 24) की सहायता से कार्यकर प्रॉबिट (Y_1) भी परिकलित किये जा सकते हैं। किन्तु परिश्रम को बचाने के हेतु सदैव सारणी का ही प्रयोग किया जाता है।

अन्य संख्याओं का परिकलन इस प्रकार कर सकते हैं :—

$$\sum_i n_i w_i = 30 \sum_i w_i$$
$$= 83\,970$$
$$\sum_i n_i w_i X_i = 30 \sum_i w_i X_i$$
$$= 116{\cdot}6329$$
$$\sum_i n_i w_i Y_{1i} = 30 \sum_i w_i Y_{1i}$$
$$= 412{\cdot}1631$$
$$\overline{X} = \frac{116\,6329}{83\,970}$$
$$= 1{\cdot}3890$$
$$\overline{Y_1} = \frac{412{\cdot}1631}{83{\cdot}970}$$
$$= 4\,9084$$
$$\sum_i n_i w_i X_i^2 = 30 \sum_i w_i X_i^2$$
$$= 30\,\{0\,0487\,(0\,8757)^2 + 0{\cdot}532\,(1{\cdot}0000)^2 + \ldots 0\,545\,(1{\cdot}8751)^2\}$$
$$= 173\,8620$$
$$\sum_i n_i w_i X_i Y_{1i} = 30 \sum_i w_i X_i Y_{1i}$$
$$= 30\,\{{\cdot}487 \times {\cdot}8757 \times 3{\cdot}912 + \ldots + 545 \times 1{\cdot}8751 \times 5{\cdot}932\}$$
$$= 594{\cdot}9330$$
$$\sum_i n_i w_i Y_{1i}^2 = 30 \sum_i w_i Y_{1i}^2$$
$$= 30\,\{{\cdot}487 \times (3\,912)^2 + \ldots + {\cdot}545\,(5{\cdot}932)^2\}$$
$$= 2066\,1600$$

सूत्रों (20.27) से (20.33) तक का प्रयोग करके निम्न संख्याओं का परिकलन किया गया है :—

$$\sum_i n_i w_i x_i^2 = 173{\cdot}8620 - \frac{(116{\cdot}6329)^2}{83{\cdot}970}$$
$$= 173{\cdot}8620 - 162{\cdot}0011$$
$$= 11{\cdot}8609$$

$$\sum_i n_i w_i x_i y_{2i} = 594.9330 - \frac{(116.6329)(412.1631)}{83.970}$$

$$= 594.9330 - 572.4875$$

$$= 22.4455$$

$$\sum_i n_i w_i y_{2i}^2 = 2066.1600 - \frac{(412.1631)^2}{83.970}$$

$$= 2066.1606 - 2023.0847$$

$$= 43.0753$$

$$b = \frac{22.4455}{11.8609}$$

$$= 1.8924$$

$$v(b) = \frac{1}{11.8609}$$

$$= 0.0843$$

$$s_b = \sqrt{0.0843}$$

$$= 0.2903$$

(20.36) के अनुसार प्रॉबिट समाश्रयण रेखा

$$\hat{Y} = 4.9084 + 1.8924\,(X - 1.3890)$$

$$= 1.8924\,X + 2.2799$$

है। माना कि X का निश्चित मान $X_0 = 2$ है तो Y का परिकलित मान $= 6.0647$ सूत्र (20.37) की सहायता से,

$$v(\hat{Y}) = \frac{1}{83.970} + \frac{(2 - 1.3890)^2}{11.8609}$$

$$= 0.0434$$

$$s_{\hat{Y}} = 0.2137$$

है। (20.39) की सहायता से $\hat{Y}$ की 95 प्रतिशत विश्वास्यता सीमाएँ

$$C.L. = 6.0647 \pm 3.182 \times .2137$$

$$= 6.0647 \pm .6800$$

Y की उपरि सीमा $= 6.7447$

Y की निम्न सीमा $= 5.3847$

है। LD 50 ज्ञात करने के लिए प्रॉबिट समाश्रयण रेखा में $X=m$ और $Y=5$ रखकर m का मान ज्ञात कर लिया।

$$5=1{\cdot}8924\times m+2{\cdot}2799$$

या $\quad \tilde{m}=1{\cdot}4374$

सापेक्षता λ ज्ञात करने के लिए m का प्रतिलघु लिया

$$\lambda=\text{Anti log }(1{\cdot}4374)$$

$$=27{\cdot}38 \text{ मिलीग्राम प्रति } 100 \text{ घन से॰}$$

सूत्र (20·31) की सहायता से, χ^2 का मान विषमांगता के प्रति परिकल्पना-परीक्षा के लिए ज्ञात कर सकते हैं।

$$\chi^2=43{\cdot}0753-\frac{(22{\cdot}4455)^2}{11{\cdot}8609}$$

$$=0{\cdot}5996$$

χ^2 का परिकलित मान $\alpha=\cdot05$ सा॰ स्त॰ तथा 3 स्व॰ को॰ पर, χ^2 के सारणीबद्ध मान 7·815 से कम है अतः विषमांगता का सार्थक नहीं होना सिद्ध होता है।

χ^2 निरर्थक होने पर विषमांगता गुणक ϕ को ज्ञात करने और उसके उपरान्त g का परिकलन करके m की परिशुद्ध विश्वास्यता सीमाएँ ज्ञात करने की आवश्यकता नहीं है क्योंकि इस स्थिति में $g=0$ लिया जाता है। ऐसा होते हुए भी यहाँ परिकलन करने की विधि को प्रदर्शित करने के लिए ϕ तथा g का परिकलन करके m की परिशुद्ध विश्वास्यता सीमाओं को ज्ञात किया गया है। सूत्र (20.34) की सहायता से,

$$\phi=\frac{0{\cdot}5996}{3}$$

$$=0{\cdot}1999$$

सूत्र (20.35) से,

$$s_b'=0{\cdot}1999\times0{\cdot}2903$$

$$=0{\cdot}0580$$

सूत्र (20·40) में $\alpha=\cdot05$ और 3 स्व॰को॰ के लिए सारणी द्वारा प्राप्त t मान का 3·182 रखने पर

$$g=\frac{(3{\cdot}182)^2\ (0{\cdot}1999)}{(1{\cdot}8924)^2(11{\cdot}8609)}$$

$$=\frac{2{\cdot}0244}{42{\cdot}2763}$$

$$=0{\cdot}0477$$

है। अतः सूत्र (20·41) की सहायता से m की 95 प्रतिशत परिशुद्ध विश्वास्यता

सीमाएँ हैं —

$$C.L = \left\{ 1\ 4374 + \frac{0\ 0477}{1-\cdot 0477} \quad (1\ 4374-1\ 3890) \right\}$$

$$\pm \frac{3\ 182}{1\cdot 8924(1-0477)} \sqrt{\left\{ \frac{1}{83\ 970} + \frac{(1\ 4374-1\ 3980)^2}{11\ 8609} \right\} \times 0\ 1999}$$

$$= (1\ 4374 + 0020) \pm 1\ 7657 \times \sqrt{0\ 0024}$$

$$= 1\cdot 4394 \pm 1\cdot 7657 \times 05$$

$$= 1\cdot 4394 \pm 0\ 0883$$

m की उपरि सीमा $= 1\cdot 5277$

m की निम्न सीमा $= 1\cdot 3511$

प्राकृतिक मृत्यु-संख्या के लिए समायोजन

उपर्युक्त विधियों के वर्णन में सदैव यह कल्पना की गई है कि परीक्षा के हेतु लिए गये कीटों या जीवाणु पर जो भी प्रभाव है केवल उद्दीपक या टाक्सिन के कारण ही है और इस ओर कोई ध्यान नहीं दिया गया है कि इनमें कुछ अनुक्रिया इन उद्दीपक या टाक्सिन के बिना भी होती है जैसे कि किसी कीटनाशक का कीटों पर नहीं छिड़का गया हो तो भी उनमें से कुछ प्राकृतिक मौत से मर जाते हैं या किसी फफूँदनाशी का प्रभाव बीजाणु (Spores) प्रकुरण के आधार पर देखना हो तो उन बीजाणुओं की संख्या के प्रति समायोजन करना चाहिये जो कि किसी फफूँदनाशी को प्रयुक्त नहीं करने की स्थिति में अंकुरित नहीं होते हैं। इस प्रकार के संशोधन को डब्ल्यू० एस० एबाट (W S. Aboot) ने 1925 में निकाला था जो कि निम्न रूप में दिया गया है —

यदि जीवाणुओं या कीटों का वह अनुपात C है जो कि बिना जीवनाशी या कीटनाशी के ही मर गये हैं और P प्रेक्षित मृतकों का अनुपात है जो शोधन के कारण मरे हैं तो कुल मृतकों का अनुपात P_1 यदि दो मृत्यु संख्या स्वतन्त्र हो तो निम्न होना है —

$$P_1 = C + P\ (1-C) \qquad ....(20\ 42)$$

अतः विष (उपचार) द्वारा मृतकों का अनुपात

$$P = \frac{P_1 - C}{1 - C} \qquad ....(20\ 43)$$

है। सूत्र (20 42) को एबाट का सूत्र कहते हैं। इसके पश्चात् विलिस ने बताया कि सहिष्णुता के बंटन के प्राचलों का अधिकतम सम्भाविता विधि द्वारा आकलन करने में प्राकृतिक मृत्यु संख्या के प्रभाव को अधिकतर उपेक्षा कर देते हैं किन्तु इसके स्थान पर कार्यकर संख्या, जिस पर विष प्रयुक्त किया गया है, n न होकर $n(1-C)$ होती है। फिने ने एबाट एवं विलिस द्वारा किये गये संशोधनों को प्रयुक्त करने में भार गुणांक में

परिवर्तित करके प्रयोग करने की विधि को सुझाया। यदि C का वास्तविक मान ज्ञात हो तो फिने ने भार w' के लिए निम्न सूत्र दिया —

$$w' = \frac{Z^2}{Q\left(P + \frac{C}{1-C}\right)} \quad \text{....(20.44)}$$

इन भारो के लिए फिन ने अपनी पुस्तक प्रॉबिट-विश्लेषण (*Probit analysis*) मे सारणी-2 (table-II) दी है। यह सारणी 0 से 90 तक प्रतिशत मृत्यु सख्या के तुल्य प्रॉबिट Y मे 0.1 अन्तराल और C मे 0.1% अन्तराल के लिए दी गई है। यदि C=0 हो तो किसी प्रकार के समायोजन की आवश्यकता नही है। शून्य के अतिरिक्त C किसी भी मान के लिए भार w और w' मे सम्बन्ध $w' = \theta w$ के रूप मे स्थापित कर सकते हैं।

यह ज्ञात है कि,

$$w = \frac{Z^2}{PQ} \quad \text{या} \quad Z^2 = PQw$$

या $$w' = \frac{PQw}{Q\left(P + \frac{C}{1-C}\right)} = \theta w \quad \text{....(20.44.1)}$$

जबकि माना,

$$\theta = \frac{P}{P + \frac{C}{1-C}}$$

$$w' = \frac{P}{P + \frac{C}{1-C}} \times w \quad \text{...(20.45)}$$

C का मान नियन्त्रण वर्ग अर्थात् वह कीट समूह जिसे कोई उपचार न दिया हो, द्वारा ज्ञात करते हैं। यदि इस वर्ग मे कीटो की सख्या अन्य वर्गों की सख्या से बृहद् हो तो C का आकलित मान अनभिनत होता है। यदि C का आकलन अधिक या कम हो तो इसमे सशोधन सिगमाइड (sigmoid) वक्र की सहायता से किया जा सकता है। यदि C का मान बृहद् न हो अर्थात् 20% से कम हो तो w' का सीधा प्रयोग करके प्रॉबिट विश्लेषण कर लिया जाता है। यदि प्राकृतिक मृत्यु सख्या दर उच्च हो और परीक्षित वर्गों मे मृत्यु सख्या दर अत्यधिक अनियमित हो तो C का आकलन कठिन है। ऐसी स्थिति मे साख्यिकीय विश्लेषण, एक सहायक विचर X' लेकर करते हैं।

जहाँ,

$$X' = \frac{Q}{Z} \quad \text{....(20.46)}$$

उदाहरण 20.3 : कीटों पर लिंडेन (Lindance) की तीन सान्द्रताओं का प्रभाव तथा नियन्त्रण (0 सान्द्रता) की अपेक्षा प्रभाव देखने के हेतु एक प्रयोग किया किया गया। इस प्रयोग के अन्तर्गत निम्न प्रेक्षण प्राप्त हुए। प्रयोग के प्रत्येक समूह में 30 कीट लिये गये थे —

सान्द्रता मिलीग्राम प्रति 1000 घन से०	48 घंटों के बाद मृत कीटों की संख्या	प्रतिशत मृत्यु संख्या	प्रॉबिट Y	भार w
0	5	16 66	4 0313	449
100	26	86 66	6·1104	·401
50	20	66 66	5 4305	·594
25	11	36 66	4 6591	610

उपर्युक्त न्यास का प्रॉबिट विश्लेषण करने से पूर्व यह आवश्यक है कि प्राकृतिक मृत्यु संख्या, जो कि नियन्त्रण समूह द्वारा ज्ञात है, का प्रयोग करके अन्य उपचारों के कारण मृत्यु संख्या अनुपात का समायोजन किया जाये।

उपर्युक्त न्यास के अनुसार,

$$C = 1666$$

विभिन्न सान्द्रताओं पर कुल मृतकों के अनुपात P_1 का मान सूत्र (20 43) में रखकर समायोजित अनुपात P प्राप्त हो जाते हैं।

जब $P_1 = \cdot 8666$ तो

$$P = \frac{8666 - 1666}{1 - 1666}$$

$$= \frac{\cdot 7000}{8334}$$

$$= 8399$$

इसी प्रकार,

जब $P_1 = 6666$ तो

$$P = \frac{50}{8334}$$

$$= 5999$$

और जब $P_1 = 3666$ तो

$$P = \frac{\cdot 20}{\cdot 8334}$$

$$= \cdot 2400$$

अतः तीनों दी हुई सान्द्रताओं के लिए समायोजित प्रतिशत, मृत्यु संख्या का प्रयोग करना होता है।

सान्द्रता मि॰ ग्रा॰ 100 c.c.	समायोजित प्रतिशत मृत्यु संख्या	प्रॉबिट मान Y	भार w
10	83 99	5 99	35 66
5	59 99	5 25	4665
2 5	24 00	4 29	·2912

समायोजित प्रतिशत मृत्यु संख्या के लिए भार w सारणी से देखकर रख लिये गये हैं। यदि सारणी उपलब्ध न हो तो इन्हें सूत्र की सहायता से परिकलित कर सकते हैं।

यहाँ सूत्र (20 44 1) का प्रयोग करके 10% सान्द्रता के लिए भार w′ का परिकलन करके दिखाया गया है।

$$\theta = \frac{8399}{8399 + \frac{1666}{8334}}$$

$$= \frac{8399}{1\ 0399}$$

$$= \cdot 80767$$

या

$$w' = \cdot 80767 \times w$$

$$= 80767 \times 449$$

$$= \cdot 3626$$

सारणी से देखे गये भार तथा परिकलित भार में कुछ अन्तर है जो कि अन्तर्वेशन के कारण है।

प्राकृतिक मृत्यु संख्या के लिए समायोजन करने पर प्राप्त प्रतिशत मृत्यु संख्या तथा तदनुसार भारों को प्रयोग करके आवश्यकतानुसार प्रॉबिट विश्लेषण कर सकते हैं।

सापेक्ष प्रान्त शक्ति

प्रायः किसी नये रसायनिक पदार्थ कीटनाशी, उद्दीपक या फफूंदनाशी का प्रभाव एवं किसी मानक पदार्थ जो चलन में है, उससे तुलनात्मक प्रभाव जानने की आवश्यकता होती है। किसी उपचारित वर्ग को नियन्त्रण वर्ग से तुलना करके प्रभाव सुगमता से ज्ञात हो जाता है। किन्तु एक पदार्थ की दूसरे पदार्थ से तुलना करने हेतु किसी विशेष विधि को अपनाना पड़ता है। नये पदार्थ पर केवल परीक्षण करके मानक पदार्थ के ज्ञात परिणामों

से तुलना करके निष्कर्ष निकालना उचित नहीं है क्योंकि जैव अध्ययन में भिन्न भिन्न समयों पर विभिन्न पशुओं या कीटों के साथ प्रयोग करने पर परिस्थितियाँ भी भिन्न भिन्न होती हैं अत सदैव नये पदार्थ और मानक पदार्थ को एक साथ लेकर एक-सी परिस्थितियों में परीक्षण करना होता है।

किसी उद्दीपक की सापेक्ष अन्त शक्ति समान प्रभावी मात्राओं के अनुपात के समान होती है। एक या एक से अधिक रसायनिक पदार्थों की मानक पदार्थ से सापेक्ष अन्त शक्ति की तुलना समान्तर प्रॉबिट समाश्रयण रेखाओं के द्वारा कर सकते हैं। यदि ये रेखाएं समान्तर न हों तो अन्य किसी विधि को अपनाना पड़ता है। इस विषय के विस्तृत अध्ययन के लिए पुस्तक "Statistical methods in biological essays" by D J Finney का अध्ययन कीजिये।

माध्य प्रॉबिट अन्तर

दो प्रेक्षण श्रेणी, जिनसे समान्तर प्रॉबिट समाश्रयण रेखाएँ प्राप्त होती हैं, उनमें अन्तर का मुख्य माप, माध्य प्रॉबिट अन्तर 'Δ' है।

Δ, दो समान्तर प्रॉबिट रेखाओं में ऊर्ध्वाधर अन्तर के समान होता है। गणितीय रूप में Δ को निम्न रूप में दिया जा सकता है—

$$\Delta_{12}=(Y_1-Y_2)=bM_{12}$$

$$=\{\overline{Y}_1-b(X-\overline{X}_1)\}-\{Y_2-b(X-\overline{X}_2)\} \quad ....(20.47)$$

$$=(\overline{Y}_1-\overline{Y}_2)-b(\overline{X}_1-\overline{X}_2)$$

$$bM_{12}=(\overline{Y}_1-\overline{Y}_2)-b(\overline{X}_1-\overline{X}_2)$$

या $$M_{12}=(\overline{X}_2-\overline{X}_1)-\left(\frac{(\overline{Y}_2-\overline{Y}_1)}{b}\right) \quad ..(20\ 48)$$

Δ का प्रसरण जब विषमांगता गुणांक की आवश्यकता न हो तो निम्न होता है—

$$v(\Delta)=v\ \{(\overline{Y}_1-\overline{Y}_2)-b(\overline{X}_1-\overline{X}_2)\}$$

$$v(\Delta)=v\ (\overline{Y}_1)+v(\overline{Y}_2)+(\overline{X}_1-\overline{X}_2)^2\ v(b)$$

$$=\frac{1}{\sum_i n_i w_i}+\frac{1}{\sum n_i w}+\frac{(\overline{X}_1-\overline{X}_2)^2}{\sum x^2} \quad (20\ 49)$$

उपर्युक्त समीकरणों में M_{12} किन्हीं दो मात्रा श्रेणियों में स्थिर अन्तर है। यहाँ M या Δ का अनुलग्न 12 श्रेणियों का सूचक है जबकि विश्लेषण दो से अधिक श्रेणियों के प्रति किया जा रहा है। M की अपेक्षा Δ के प्रति परिकलन सुगम है। इसके द्वारा विश्वास्यता सीमाएँ भी सरलता से ज्ञात कर सकते हैं।

प्रयोग अभिकल्पना

अधिकांश प्रयोगों में एक साथ कई विषैले पदार्थों, उद्दीपकों आदि की तुलना करने का उद्देश्य होता है। इन पदार्थों की विभिन्न मात्राओं का स्वयं में अन्तर, दूसरे पदार्थों से तुलना एवं परस्पर क्रिया (Interaction) के विषय में जानकारी प्राप्त करने हेतु दिन-प्रतिदिन प्रयोग किये जाते हैं। काल, स्थान, प्रयोगकर्ता तथा कीट या पशु, जिन पर प्रभाव देखा जाना है, का परिणामों पर प्रभाव पड़ता है। इन सभी की समानता को प्राप्त करके एक-सी परिस्थितियाँ उपलब्ध करना कठिन है या लगभग असम्भव है। अतः प्रयोग अभिकल्पना की सहायता से प्रयोग को योजनाबद्ध करना अत्यन्त आवश्यक हो जाता है। प्रयोग-अभिकल्पना के प्रति ज्ञान प्राप्त करने के लिए इस विषय पर पुस्तक "Experimental Design" by W. T Federer या अन्य किसी पुस्तक को पढ़िये।

किसी प्रयोग की योजना बनाते समय दो मुख्य समस्याएँ और उत्पन्न होती हैं। एक तो यह कि विषैले पदार्थ की कितनी मात्रा (सान्द्रता) ली जाये। इसके लिए कोई नियम बताना तो कठिन है पर यह माना जाता है कि मात्राएँ ऐसी होनी चाहिए कि जो 16 से 84 प्रतिशत तक मृतकों की संख्या प्रदान करें। ऐसा करने से आकलक लगभग समान परिशुद्धि के साथ प्राप्त होते हैं। वर्तमान ज्ञान के अनुसार ऐसा समझा जाता है कि log LD 50 के प्रति सभी आकलन समान परिशुद्ध होते हैं। सान्द्रताएँ जो 16 प्रतिशत से कम या 84 प्रतिशत से अधिक मृत्यु संख्या प्रदान करती हैं उनसे LD 50 की अपेक्षा बहुत कम जानकारी प्राप्त होती है।

दूसरी समस्या यह सामने आती है कि प्रत्येक वर्ग में कितने कीट या पशु होने चाहिए। इसके लिए भी कोई नियम तो नहीं है फिर भी यह उपलब्ध कीटों या पशुओं की संख्या, उनमें भिन्नता की मात्रा और आकलन में इच्छित परिशुद्धि पर निर्भर करती है। साधारणतः बृहत् वर्गों की कम संख्या की अपेक्षा लघु परिमाण के अधिक वर्ग अधिमानीय हैं। व्यवहार में प्रत्येक वर्ग में 20 से 30 तक कीट संख्या उपयुक्त समझी जाती है।

प्रश्नावली

1. प्रॉबिट विश्लेषण में रूपान्तरण की आवश्यकता एवं उपयोगिता पर टिप्पणी लिखिए।
2. उन स्थितियों का उदाहरण सहित वर्णन कीजिये जिनमें वर्गमूल रूपान्तरण की आवश्यकता होती है।
3. प्रॉबिट विश्लेषण करने की एक उत्तम विधि का विवरण कीजिये।
4. एबाट का सूत्र क्या है? प्रॉबिट विश्लेषण में इसके महत्व पर प्रकाश डालिए।
5. एलड्रिन (Aldrin) की पाँच सान्द्रताओं के घोल का कीटों पर प्रभाव जानने के हेतु एक प्रयोग किया। घोल की सान्द्रताएँ तथा कीटों की संख्या निम्न प्रकार थी –

सान्द्रता µg/µl	समूहों में कीटों की संख्या	48 घण्टे के बाद मृत कीटों की संख्या
5·00	30	24
2·50	30	17
1·00	30	15
·50	30	12
·25	30	6

उपर्युक्त न्यास के लिए,

(i) प्रोबिट समाश्रयण रेखा का समंजन कीजिये।

(ii) *LD 50* ज्ञात कीजिये।

(iii) मध्यम घातक मात्रा 'm' की 99 प्रतिशत परिशुद्ध विश्वास्यता सीमायें ज्ञात कीजिये।

□□□

21 | प्रसरण-विश्लेषण

प्रसरण विश्लेषण सांख्यिकी का अत्यन्त महत्वपूर्ण अंग है। अधिकांशतः प्रयोगों द्वारा उचित एवं शुद्ध निष्कर्ष निकालने हेतु इसका प्रयोग होता है अतः सांख्यिकी में इसका समुचित ज्ञान प्राप्त करना आवश्यक है। लगभग सभी अध्ययनों में प्रसरण को ज्ञात किया जाता है और समस्या के अनुसार इसका विश्लेषण करना अनिवार्य हो जाता है। समस्या कोई और किसी प्रकार की हो परन्तु प्रसरण विश्लेषण का मूल सिद्धान्त वही रहता है। समस्या के आधार पर केवल प्रसरण के स्रोतों में परिवर्तन होता रहता है। प्रसरण-विश्लेषण की विधि एवं इसका उपयोग कुछ प्रचलित अभिकल्पनाओं (Design of experiments) के लिए इस अध्याय में दिया गया है।

परिभाषा एवं सिद्धान्त

प्रेक्षणों के एक समुच्चय के पूर्ण प्रसरण का किन्हीं परिस्थितियों के अनुसार घटकों में पृथक्करण किया जा सकता है यदि यह घटक प्रेक्षणों के वर्गीकरण में प्रसरण स्रोत से सम्बन्ध हों। साथ ही इन घटकों के प्रति परिकल्पनाओं की F–परीक्षा की जाती है। इस विश्लेषण को प्रसरण विश्लेषण कहते हैं।

प्रसरण विश्लेषण की विधि को सर्वप्रथम सन् 1920 में आर० ए० फिशर ने दिया था और तब से इसका प्रयोग दिन प्रति दिन बढ़ता ही जा रहा है। उपर्युक्त परिभाषा से स्पष्ट है कि प्रसरण विश्लेषण के निम्न दो उद्देश्य हैं —

(1) पूर्ण प्रसरण को घटकों के प्रसरण में विपाटित (split) करना।

(2) इन घटकों के प्रति परिकल्पनाओं की F–परीक्षा करना।

F–परीक्षा द्वारा अधिकतर वर्ग के खण्डों की समानता की परीक्षा की जाती है।

प्रसरण के विषय में अध्याय 4 में पर्याप्त दिया जा चुका है। फिर भी यहाँ प्रसरण के सूत्र के द्वारा परिकलन का निर्वचन करना उचित प्रतीत होता है। हम जानते हैं कि एक n प्रेक्षणों के प्रतिदर्श $X_1, X_2, X_3 \cdots X_n$ के लिए, यादृच्छिक चर X का प्रसरण,

$$\hat{V}(X) = \frac{1}{n-1} \Sigma (X_i - \overline{X})^2 \qquad \ldots (21.1)$$

$$= \frac{1}{n-1} \left\{ \sum_i X_i^2 - \frac{(\sum_i X_i)^2}{n} \right\} \qquad \ldots (21.1.1)$$

सूत्र (21.1.1) के तीन खण्ड हैं $\sum_i X_i^2$, प्रेक्षित मानों के वर्ग के योग को निरूपित करता है और संख्या $(\Sigma X_i)^2/n$ माध्य के लिए संशोधन को प्रदर्शित करता है। दूसरे

शब्दों में, संख्या $(\sum_i X_i)^2/n$ को घटा देने पर उन मानों के वर्गों का योग ज्ञात हो जाता है जो कि माध्यों को शून्य बिन्दु पर ले जाने से प्राप्त होता है। $(n - 1)$ प्रेक्षित मानों की स्वतन्त्रता कोटि है जिससे कि भाग देने पर प्रसरण ज्ञात हो जाता है।

प्रसरण विश्लेषण में संख्या $(\sum_i X_i)^2/n$ को संशोधन कारक (सं० का०) (*correction factor* C F) कहते हैं और इसे अधिकतर G^2/n से निरूपित करते हैं जबकि G घटक के सब प्रेक्षित मानों का योग है और n प्रेक्षित मानों की संख्या है जिस पर G आधारित है। प्रसरण विश्लेषण में भी प्रत्येक घटक में प्रति तत्त्व प्रेक्षणों के वर्गों का योग ज्ञात करके इसमें से संशोधन कारक G^2/n' को घटाकर इस घटक की स्वतन्त्रता कोटि से भाग कर देने पर घटक के प्रति प्रसरण ज्ञात हो जाता है। इसे प्रसरण विश्लेषण में माध्य वर्ग योग कहा जाता है। प्रसरण विश्लेषण करने के लिए सदैव एक सारणी बनानी होती है जिसे प्रसरण विश्लेषण सारणी कहते हैं। इस सारणी में सदैव निम्न स्तम्भ होते हैं —

(सारणी 21.1) प्रसरण विश्लेषण सारणी

विचरण स्रोत	स्वतन्त्रता कोटि (स्व० को०)	वर्ग योग (व० यो०)	माध्य वर्ग योग (मा० व० यो०)	F-मान
क				
ख				
⋮				
प				
त्रुटि				
पूर्ण				

जब कि उपर्युक्त सारणी में क, ख, ...प आदि विचरण स्रोत हैं अर्थात् विभिन्न घटक हैं। सारणी में अधिकतर स्वतन्त्रता कोटि को स्व० को०, वर्गों के योग को व० यो० और माध्य वर्ग योग को मा० व० यो० के रूप में लिखा जाता है जैसा कि लघु कोष्टक में दिया गया है।

विचरण स्रोत के स्तम्भ में घटकों के नाम, जो भी प्रसरण से सम्बद्ध हों, तथा त्रुटि व पूर्ण, शब्द लिख दिये जाते हैं। पूर्ण वर्ग योग का घटकों के वर्ग योग से जो अन्तर होता है उसे त्रुटि (या वर्गों के अन्तर) घटक से सम्बद्ध माना जाता है अतः त्रुटि या वर्गों के अन्तर घटक की स्व० को०, पूर्ण स्व० को० में से घटकों की स्व० को० के योग को घटा कर प्राप्त हो जाती है। इसी प्रकार त्रुटि के लिए व०यो०, पूर्ण व० यो० में से घटकों के व०यो०

गये हैं। एकधा वर्गीकरण के लिए प्रसरण विश्लेषण का प्रयोग निम्न अभिकल्पना की स्थिति में होता है।

पूर्णतया यादृच्छिकीकृत अभिकल्पना (पू०या०अ०)

इस अभिकल्पना का प्रयोग सब प्रयोगगत यूनिटों (Experimental units) के सजातीय (एक-सा) होने के स्थिति में किया जाता है। प्रत्येक उपचार एकक को विभिन्न संख्या पर प्रयुक्त कर सकते हैं अर्थात् प्रत्येक उपचार की पुनरावृत्ति (replication) भिन्न हो सकती है।

माना कि k उपचारों (प्रतिदर्शों) के लिए प्रेक्षण निम्न सारणी के अनुसार हैं जबकि उपचारों की पुनरावृत्ति संख्या (प्रतिदर्श परिमाण) क्रमशः $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_k$ है। इस प्रयोग द्वारा प्राप्त प्रेक्षणों को निम्न सारणी में दिया जा सकता है —

(सारणी 21.2) प्रेक्षणों का सारणीकरण

उपचार या प्रतिदर्श संख्या	प्रेक्षण			योग	माध्य
1	X_{11}	X_{12}	$X_{13} \ldots\ldots X_{1j} \ldots X_{1r_1}$	X_1	$\bar{X}_1$
2	X_{21}	X_{22}	$X_{23} \ldots\ldots X_{2j} \ldots X_{2r_2}$	X_2	$\bar{X}_2$
3	X_{31}	X_{32}	$X_{33} \ldots\ldots X_{3j} \ldots X_{3r_3}$	$X_3.$	$\bar{X}_3$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
i	X_{i1}	X_{i2}	$X_{i3} \ldots\ldots X_{ij} \ldots X_{ir_i}$	X_i	$\bar{X}_i$
k	X_{k1}	X_{k2}	$X_{k3} \ldots\ldots X_{kj}\ X_{kr_k}$	$X_k.$	$\bar{X}_k$
			पूर्ण	$X. = G$	$\bar{X}$

प्रेक्षण X_{ij} में प्रथम अनुलग्न, i उपचार संख्या और दूसरा अनुलग्न, j वीं प्रेक्षण को निरूपित करता है।

माना कि $\sum_i r_i = n$ जहाँ $i = 1,2,3, \ldots, k$

इस प्रकार के न्यास के लिए निम्न प्रसरण विश्लेषण सारणी का प्रयोग किया जाता है।

यहाँ संशोधन कारक $= \dfrac{X^2.}{\sum_i r_i} = \dfrac{G^2}{n}$ होता है।

(सारणी 21.3) पू० या० म० के लिए प्रसरण-विश्लेषण सारणी

विचरण स्रोत	स्व० को०	व० य०	मा० व० य०	F-मान
उपचारों (प्रतिदर्शों) के बीच	$(k-1)$	$\sum_{i=1}^{k} X_i^2/r_i - \frac{G^2}{n} = S_{XX}$	$S_{XX}/k-1$	$\frac{S_{XX}}{S_{EE}} \frac{n-k}{k-1} = F$
त्रुटि (प्रतिदर्शों के अन्दर)	$(n-k)$	$(T_{XX} - S_{XX}) = S_{EE}$	$S_{EE}/n-k$ $= s_e^2$	
पूर्ण	$(n-1)$	$\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{r_i} X_{ij}^2 - \frac{G^2}{n} = T_{XX}$		

वर्गों या उपचारों के अन्दर त्रुटि को प्रयोग-त्रुटि या केवल त्रुटि भी कहते हैं। प्रयोगगत अभिकल्पनाओं की स्थिति में त्रुटि शब्द का प्रयोग किया जाता है।

$$\text{पूर्ण व० य०} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{r_i} X_{ij}^2 - \frac{G^2}{n} \quad ....(21.2.1)$$

$$= X_{11}^2 + X_{12}^2 + ... + X_{kr_k}^2 - \frac{G^2}{n} \quad ....(21.2)$$

= प्रेक्षणों के वर्गों का योग − स० का०

इसी प्रकार उपचारों या प्रतिदर्शों के बीच,

$$\text{व०य०} = \frac{X_1^2}{r_1} + \frac{X_2^2}{r_2} + ... + \frac{X_k^2}{r_k} - \frac{G^2}{n} \quad ....(21.3)$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \frac{X_i^2}{r_i} - \frac{G^2}{n} \quad ....(21.3.1)$$

प्रतिदर्शों या उपचारों के अन्दर त्रुटि,

$$\text{व०य०} = \left(\sum_i \sum_j X_{ij}^2 - \frac{G^2}{n} \right) - \left(\sum_i \frac{X_i^2}{r_i} - \frac{G^2}{n} \right)$$

$$= \sum_i \sum_j X_{ij}^2 - \sum_i \frac{X_i^2}{r_i} \quad ....(21.4)$$

इस प्रकार विश्लेषण सारणी से दिये स्तम्भों में विवरण योग के अनुसार संख्याएँ ज्ञात करने की विधि उपलब्ध है। इसी विधि का प्रयोग उदाहरण द्वारा स्पष्ट हो जायेगा।

यह ज्ञात है कि दो प्रसरणों का अनुपात F–बंटित होता है अतः यहाँ परिकल्पना H_0 की F–परीक्षा की जाती है। प्रसरण विश्लेषण सारणी में प्रसरण अनुपात,

$$F = \frac{\text{प्रतिदर्शों (वर्गों) के बीच माध्य वर्ग योग}}{\text{प्रतिदर्शों (वर्गों) के अन्दर माध्य वर्ग योग}}$$

या $$F = \frac{\text{उपचार माध्य वर्ग-योग}}{\text{त्रुटि माध्य वर्ग-योग}}$$

यदि परिकलित F का मान, α सा० स्त० व (n_1, n_2) स्व० को० के लिए F के सारणीबद्ध मान से अधिक हो तो H_0 को अस्वीकार कर दिया जाता है अर्थात् H_1 को स्वीकार कर लिया जाता है और इसके विपरीत स्थिति में H_0 को स्वीकार कर लिया जाता है। इस स्थिति में उपर्युक्त निर्णय को इस प्रकार भी कहते हैं। H_0 अस्वीकृत होने का अर्थ है कि कम से कम कोई दो उपचार एक दूसरे से सार्थक रूप से भिन्न हैं। H_0 स्वीकृत करने का अर्थ है कि इनमें अन्तर निरर्थक है।

टिप्पणी : यदि परिकलित F का मान एक से कम हो अर्थात् $F<1$ हो तो बिना F प्रायिकता सारणी देखे H_0 को स्वीकार करने का निर्णय ले सकते हैं।

उदाहरण 21.1 : तीन प्रकार के कोढ़ (Leprosy) के रोगियों और 20 अरोगियों के प्रतिदर्शों में सीरम एलब्यूमिन (Serum Albumin) की प्रति 100 मि० लीटर में निम्न मात्रा (ग्रामों में) प्राप्त हुई —

रोगियों की संख्या (i)	नियन्त्रण (Control) (ii)	लेप्रोमेटस कोढ़ (Lepromatous Leprosy) (iii)	ट्यूबरक्यूलाइड कोढ़ (Tuberculoid (Leprosy)) (iv)	इन्टरमिटेंट (Intermittent) (v)
1	4·20	3·65	3·20	3·90
2.	4·00	3·65	4·10	3·10
3	4·10	3·60	4·20	3·20
4.	3·80	2·70	3·65	4·20
5.	3·30	3·15	4·65	3·00
6.	4·50	4·00	3·70	3·40
7.	4·60	3·60	3·40	
8.	4·30	2·95	4·80	
9.	4·10	2·85	3·20	

(i)	(ii)	(iii)	(iv)	(v)
10.	3 20	3 30	3 90	
11.	4 10	3·80	3 75	
12.	3 20	3 60		
13.	3 90	3 80		
14	4 40	3 05		
15.	3 70	2 65		
16	4 50	2 90		
17.	3·60	3 10		
18.	3 50	3 75		
19.	3 80	3 80		
20.	3 40	3 60		
21.		3·70		
22.		3 65		
23.		3·60		
योग	78·20	75 45	42 55	20·80
माध्य	3·91	3·28	3·87	3·47

पूर्ण योग = 217 00

स० का० $= \dfrac{(217{\cdot}00)^2}{60} = 784{\cdot}81$

प्रतिदर्शों के बीच व० य०,

$= \dfrac{(78{\cdot}20)^2}{20} + \dfrac{(75{\cdot}45)^2}{23} + \dfrac{(42{\cdot}55)^2}{11} + \dfrac{(20\ 80)^2}{6}$ – स०का०

$= 789{\cdot}97 - 784{\cdot}81$

$= 5{\cdot}16$

पूर्ण व० य० $= (4{\cdot}20^2 + 4{\cdot}00^2 + \dots + 3{\cdot}00^2 + 3\ 40^2)$ – स० का०

$= 821{\cdot}46 - 784\ 81$

$= 36{\cdot}65$

प्रसरण विश्लेषण सारणी,

विचरण स्रोत	स्व० को०	व० यो०	मा०व०यो०	F-मान
प्रतिदर्शों के बीच	3	5 16	1 72	$\frac{1\ 72}{0{\cdot}56}=3\ 071$
प्रतिदर्शों के अन्दर	56	31·48	0 56	
पूर्ण	59			

$\alpha = .05$ और (3,56) स्व० को० के लिए F का सारणीबद्ध मान (परि० प-5.2) 2 76 है जो कि F के परिकलित मान से कम है। अत: इससे यह निष्कर्ष निकलता है कि भिन्न प्रकार के रोगियों में सीरम एलब्यूमिन की माध्य मात्रा में एक दूसरे से सार्थक अन्तर है।

युगल माध्यों की तुलना

यदि प्रसरण विश्लेषण के अन्तर्गत F-परीक्षा द्वारा निराकरणीय परिकल्पना H_0 को अस्वीकार कर दिया गया हो तो इसका अभिप्राय है कि H_1 को स्वीकार किया है। इस स्थिति में यह जानना आवश्यक हो जाता है कि $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots, \mu_k$ उपचार माध्यों में से कौन से माध्य एक दूसरे से सार्थक रूप में भिन्न हैं और कौन से माध्य समान हैं या सब ही माध्य एक दूसरे से सार्थक रूप में भिन्न हैं।

इन युगल माध्यों में सार्थक अन्तर जानने की एक प्रचलित विधि, न्यूनतम सार्थक अन्तर न्यू० सा० अ० (least significant difference : LSD) विधि है जब कि,

$$\text{न्यू० सा० अ०} = \sqrt{s_e^2\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)} \times t_{.05(\text{error d f})} \quad \ldots(21.5)$$

सूत्र (21 5) में s_e^2 त्रुटि मा० व० यो० है और r_1 व r_2 जिन माध्यों की परीक्षा की जा रही है उन उपचारों (वर्गों) की क्रमश: पुनरावृत्ति संख्या है।

यदि $r_1=r_2=r$ हो तो,

$$\text{न्यू० सा० अ०} = \sqrt{\frac{2}{r}\ s_e^2}\ \ t_{.05(\text{error d. f.})} \quad \ldots(21.5.1)$$

यहाँ $t_{.05}$ प्रतिशत सार्थकता स्तर तथा त्रुटि स्वतन्त्रता कोटि के लिए सारणीबद्ध मान है।

उदाहरण 21.1 का आँकड़ा डॉ० एम० के सेठी, रीडर [illegible] अनुविभाग [illegible] उदयपुर के सौजन्य से प्राप्त हुआ।

यदि t का सारणीबद्ध मान 1 प्रतिशत सार्थकता स्तर व त्रुटि स्वतन्त्रता कोटि के लिए सूत्र में रख दें तो मख्या

$$\sqrt{\frac{2}{r} \quad s_e^2} \quad t_{01\,(\text{error d f })}$$

को अधिकतम सार्थकता अन्तर (most significant difference MSD) कहते हैं।

यदि किन्ही दो माध्यो मे अन्तर न्यू० सा० अ० मे अधिक या न्यू० सा० अ० के समान हो तो यह माना जाता है कि यह माध्य सार्थक रूप मे एक दूसरे मे भिन्न है और इसके विपरीत स्थिति मे माध्यो का समान अर्थात् सजातीय समझा जाता है। न्यूनतम सार्थक अन्तर को क्रान्तिक अन्तर क्रा० अ० (critical difference C D) भी कहते है।

युगल माध्यो की तुलना के हेतु न्यूनतम सार्थक अन्तर विधि उपयुक्त है यदि माध्यो के जोड़े जिनमें तुलना करना हो उनका चयन, प्रयोग करने से पूर्व ही कर लिया गया हो अन्यथा कुछ माध्यो मे अन्तर (comparison) प्रतिचयन विचरण के कारण स्वत ही वृहद् होता है। यदि यह अन्तर न्यू० सा० अ० से अधिक हो तो k, उपचारों की सख्या अधिक होने की स्थिति मे यह कहना कठिन हो जाता है कि यह दोनों उपचार माध्य सार्थक रूप मे एक दूसरे से भिन्न है क्योंकि इनका अन्तर प्रतिचयन विचरण के कारण भी वृहद् होने की शका रहती है। अतः यदि उपचारो की वृहत् सख्या ($k>2$), वृहद् हो और पहले से युगल माध्यो मे वैषम्य (Comparison or Contrast) निर्धारित नहीं किये गये हो तथा सब सम्भव युगल उपचार वैषम्यो मे तुलना करना हो तो न्यूनतम सार्थकता अन्तर विधि का प्रयोग करना उचित नही है। न्यूनतम सार्थकता अन्तर विधि के इस दोष को दूर करने के हेतु अन्वेषण कर्त्ताओं ने अनका विधियाँ सुझाई है जैसे स्टुडेन्ट न्यूमेन क्यूल्स परीक्षा (Student Newman Kuels test), टुकीज़ परीक्षा (Tukey's test) डकन की बहु-पराम परीक्षा (Duncan's multiple range test), शैफे-परीक्षा (Scheffe's test) आदि। यहाँ केवल डकन की बहु-पराम परीक्षा का वर्णन दिया गया है जो कि अपने गुणो के कारण एक अच्छी परीक्षा है।

डंकन-बहुपराम परीक्षा

यह परीक्षा अन्य की अपेक्षा उत्तम है। इस परीक्षा की विशेषता यह है कि इसमें एक न्यूनतम सार्थक पराम की युगल माध्यो मे अन्तर से तुलना न करके, क्रमिक माध्य श्रेणी मे वे एक दूसरे से कितनी दूरी पर हैं इस तथ्य को भी महत्त्व दिया गया है। दूरी के आधार पर भिन्न-भिन्न न्यूनतम सार्थक पराम ज्ञात किये जाते है और इन न्यूनतम पराम को तदनुसार युगल माध्यो मे अन्तर से तुलना करके उनके सार्थक रूप मे भिन्न होने या न होने का पता चल जाता है। यदि युगल माध्यो मे अन्तर न्यूनतम पराम के समान हो या इससे अधिक हो तो वे उपचार सार्थक रूप मे भिन्न माने जाते हैं अन्यथा नहीं। इस परीक्षा मे t मान की भाँति, D_p के मान 5% या 1% सार्थकता स्तर पर बी० डी० डकन (B D. Duncan) द्वारा दी गई सारणी (परि० प–15) का प्रयोग करके ज्ञात करते

हैं। डंकन की बहुपरास विधि को निम्न रूप में कार्यान्वित कर सकते हैं।

(1) उपचार माध्यों को किसी सारणी के एक ओर आरोही और दूसरी ओर अवरोही क्रम में लिख लेते हैं। इस सारणी की प्रत्येक कोष्ठिका में इन माध्यों के अन्तर लिख दिये जाते हैं। इस प्रकार सब सम्भव युगल उपचार माध्यों के अन्तर प्राप्त हो जाते हैं। चाहें तो अवरोही माध्य अनुक्रम में न्यूनतम माध्य और आरोही अनुक्रम की ओर अधिकतम माध्य छोड़ सकते हैं क्योंकि यह अन्तर पहले ही सारणी में आ जाते हैं।

(2) उपचार माध्य की मानक त्रुटि, सूत्र $\sqrt{\frac{s_e^2}{r}}$ द्वारा ज्ञात कर ली जाती है।

(3) पूर्व निर्धारण के अनुसार सार्थकता स्तर $\alpha = .05$ या .01 आदि ले लिये जाते हैं।

(4) डंकन-सारणी द्वारा माध्यों में दूरी p और त्रुटि स्वतन्त्रता कोटि n_2 व α सा० स्त० के लिए D_p के मान ज्ञात कर लिए जाते हैं। इन D_p के मान का संख्या $\sqrt{\frac{s_e^2}{r}}$ से गुणा करके परिकलित न्यूनतम परास ज्ञात हो जाता है। अधिकतम व न्यूनतम माध्य में दूरी 'p' उपचारों की संख्या के समान होती है। यह दूरी क्रमशः अगले माध्यों में एक-एक करके घटती जाती है जैसे माना कि पांच आरोही अंकित माध्य $\bar{X}_3$, $\bar{X}_1$, $\bar{X}_4$, $\bar{X}_5$ व $\bar{X}_2$ हैं। यहां $\bar{X}_3$ व $\bar{X}_2$ की दूरी $p=5$, $\bar{X}_1$ व $\bar{X}_2$ की दूरी $p=4$, $\bar{X}_3$ व $\bar{X}_5$ की दूरी $p=4$, $\bar{X}_3$ व $\bar{X}_4$ से दूरी $p=3$ या $\bar{X}_1$ व $\bar{X}_5$ से दूरी $p=3$ आदि है।

(5) सारणी में दिये अन्तरों की दूरी p के अनुसार न्यूनतम परास से तुलना करके उपचार माध्यों में अन्तर की सार्थकता के विषय में पहले दिये नियमानुसार निर्णय कर लिया जाता है। इस विधि के प्रयोग को निम्न उदाहरण द्वारा दिखाया गया है।

(6) प्रायोगिक अभिकल्पना कोई भी हो, डंकन की बहुपरास परीक्षा कार्य विधि वही रहती है। केवल अन्तर इतना करना होता है कि उपचारों के लिए अभिकल्पना के अनुसार त्रुटि माध्य वर्ग-योग का प्रतिस्थापन करके न्यूनतम सार्थक परास ज्ञात कर लिया जाता है।

उदाहरण 21.2 सोयाबीन की पांच प्रजातियों के युगल माध्यों में अन्तर की सार्थकता परीक्षा, उदाहरण (21.3) में दिये न्यास तथा प्रसरण विश्लेषण का प्रयोग करके, डंकन बहुपरास विधि द्वारा निम्न प्रकार कर सकते हैं।

पहले माध्यों में अन्तर के लिए सारणी निम्न प्रकार तैयार कर सकते हैं :—

प्रजाति क्रम संख्या		4	1	2	5	3
प्रजाति क्रम संख्या	माध्य	14 69	11 18	10 15	8 34	8·20
3	8 20	6 49	2 98	1 95	0·14	—
5	8 34	6 35	2 84	1 81	—	—
2	10.15	4 54	1 03	—	—	—
1	11·18	3 51	—	—	—	—
4	14·69	—	—	—	—	—

माना कि इन माध्यो में अन्तर की सार्थकता-परीक्षा 5 प्रतिशत सार्थकता स्तर पर करना है।

माध्य की मानक त्रुटि $s_{\overline{X}} = \sqrt{\frac{s_e^2}{r}} = \sqrt{\frac{3\ 18}{4}}$

$= 0\ 89$

सारणी (परि० घ–15) डकन के न्यूनतम सार्थक परासो का परिकलन $\alpha = 05$ और त्रुटि स्व० को० 12 के लिए इस प्रकार कर सकते हैं —

$D_{p\ 5} = 3\ 36 \times 89 = 2\ 99$

$D_{p-4} = 3\ 33 \times \cdot 89 = 2\ 96$

$D_{p-3} = 3\ 23 \times \cdot 89 = 2\ 87$

$D_{p-2} = 3{\cdot}08 \times 89 = 2\ 74$

उपचारो को आरोही क्रम में व्यवस्थित किया और उपचार माध्यो में दूरी के अनुसार अन्तरो की डकन के बहुपरास मानो से तुलना कर ली गई है। निम्न लेखाचित्रीय सरणी (graphical array) में निरर्थक अन्तरो के नीचे रेखा खींच दी गई है।

प्रजाति संख्या 3 5 2 1 4

उपर्युक्त रेखाओं से स्पष्ट है कि प्रजातियाँ V_3 व V_1 और V_3 व V_4, V_5 व V_4 V_2 व V_4 और V_1 व V_4 में माध्य अन्तर सार्थक है और अन्य युगल प्रजाति माध्यों में अन्तर निरर्थक है।

सांख्यिकीय प्रतिरूप उपागम

पूर्णतया यादृच्छिकीकृत अभिकल्पना, जिसमें कि प्रत्येक प्रयोगात्मक इकाई पर एक प्रेक्षण लिया गया हो, के लिए निम्न सांख्यिकीय प्रतिरूप दिया जाता है।

$$X_{ij} = \mu + \tau_i + e_{ij} \qquad (21\ 6)$$
$$i = 1, 2, \ldots K$$
$$j = 1, 2, \ldots r_i$$

जबकि X_{ij} j वें एकक को i वाँ उपचार देने के पश्चात् प्राप्त प्रेक्षित मान है।

μ समस्त माध्य प्रदर्शित करता है।

τ_i i वें उपचार का वास्तविक प्रभाव है।

e_{ij} j वें एकक का, जिसके लिए i वाँ उपचार दिया गया है, बाह्य कारकों के प्रभाव को प्रदर्शित करता है, इस पद को त्रुटि भी कहते हैं।

टिप्पणी यदि सब उपचारों के लिए समान पुनरावृत्ति संख्या 'r' हो तो

$$j = 1, 2, 3, \ldots, r$$

प्रतिरूप (21 6) के आधार पर प्रसरण विश्लेषण करने में कुछ कल्पनाएँ की जाती हैं जो कि निम्न प्रकार हैं —

(1) प्रेक्षण X_{ij} एक प्रसामान्य समग्र का अंश है।

(2) प्रेक्षणों X_{ij} से सम्बन्धित सभी प्रभाव योज्य (additive) हैं।

(3) प्रेक्षण और प्रभावी कारक रैखिक रूप से (linearly) सम्बन्धित हैं।

(4) μ को एक अचर माना गया है और सब τ_i व e_{ij} स्वतन्त्र हैं।

(5) e_{ij} का बंटन प्रसामान्य है और इसका प्राचल $(0, \sigma_e^2)$ है।

(6) τ_i का बंटन $N(0, \sigma_\tau^2)$ माना जाता है। साथ ही $\sum_i r_i \tau_i = 0$

(7) यह भी माना गया है कि उपचारों के प्रसरण सजातीय हैं। यदि प्रसरणों के सजातीय होने के विषय में शंका हो तो बार्टलेट (Bartlett) परीक्षा या अन्य किसी परीक्षा द्वारा सजातीयता की पुष्टि कर लेना चाहिए।

स्थिर प्रभाव प्रतिरूप

यदि अन्वेषण कर्ता की रुचि केवल k उपचारों के माध्य प्रभाव जानने तक ही सीमित हो अर्थात् जो भी परिणाम ज्ञात करने हों वह इन उपचारों तक ही सीमित रखने हों तो इन उपचारों के लिए प्रतिरूप को स्थिर प्रभाव प्रतिरूप कहते हैं। जैसे उपज पर किन्हीं खादों का प्रभाव जानना हो और किसी अन्य खाद के प्रति कोई परिणाम न निकालने हों या कुछ दवाइयों का प्रभाव जानना हो जब कि अन्य दवाइयों से कोई प्रयोजन न हो आदि। उपचारों के लिए जो भी सांख्यिकीय प्रतिरूप का चयन किया जाता है उसे स्थिर प्रभाव प्रतिरूप या प्रतिरूप I (Model I) कहते हैं। इस स्थिति में,

$$\sum r_i \tau_i = 0 \qquad \text{या} \qquad \sum_i \tau_i = 0$$

जब कि $r_i = r$, $(i = 1, 2, 3, \ldots, k)$ और $E(\tau_i) = \tau$

यादृच्छिक प्रभाव और प्रतिरूप

यदि प्रयोग में ऐसे उपचारो या कारको का प्रभाव जानना हो जो स्वय किसी समग्र के अंश के रूप मे हो तो इन उपचारो के लिए दिये गये प्रतिरूप को यादृच्छिक प्रभाव प्रतिरूप या प्रसरण-सघटक प्रतिरूप (Component of variance model) या प्रतिरूप II (model II) कहते हैं। जैसे किन्ही चूहो की जातियो मे लक्षणो का अध्ययन करना हो तो प्रयोग मे लिये गये चूहो को प्रजाति के यादृच्छिक प्रतिदर्श के रूप मे माना जायेगा। इनके अध्ययन मे जो भी लक्षण प्राप्त होंगे वह प्रजाति के अन्य चूहो के लिए वही सही होंगे। इसके अतिरिक्त एक प्रयोगशाला मे काम करने वाले कुछ तकनीशनो (Technicians) की दक्षता या कुशलता ज्ञात करना हो तो इन अनेक म से कुछ तकनीशनो को समग्र के एक प्रतिदर्श के रूप मे समझा जाता है। इनके द्वारा जो परिणाम प्राप्त होते हैं उन्हे इन तकनीशनो तक सीमित न रखकर, सम्पूर्ण समुदाय के लिए सत्य समझा जाता है. ऐसे उपचारो के हेतु प्रतिरूप को यादृच्छिक प्रभाव प्रतिरूप कहते हैं। इस प्रतिरूप से प्रत्येक उपचार τ, स्वतन्त्र रूप से $N(0, \sigma_\tau^2)$ बटित है तथा $E(\tau_i)=0$

मिश्रित प्रतिरूप

किसी भी साख्यिकीय प्रतिरूप मे μ एक निश्चित प्रभाव और e एक यादृच्छिक प्रभाव है। इस प्रकार सभी प्रतिरूपो को मिश्रित प्रतिरूप कहा जा सकता है। किन्तु μ या e के आधार पर किसी भी प्रतिरूप के प्रकार का निर्णय नही किया जाता है। इनके अतिरिक्त यदि एक से अधिक कारको या उपचारो वाले प्रतिरूप में कुछ प्रभाव निश्चित हो और कुछ प्रभाव यादृच्छिक हो तो ऐसे प्रतिरूप को मिश्रित प्रतिरूप कहते हैं। जैसे किसी चूहो की जातियो पर कुछ भोजनो का प्रभाव जानना हो तो यहां चूहो की जाति सम्बन्धी प्रभाव तो यादृच्छिक हैं और भोजनो के प्रभाव स्थिर प्रकार के हैं। अत. इस द्विधा वर्गीकृत प्रयोग के लिए साख्यिकीय प्रतिरूप को मिश्रित प्रतिरूप कहा जाता है।

टिप्पणी किसी भी प्रतिरूप को यादृच्छिक, स्थिर या मिश्रित कहा जा सकता है क्योंकि यह प्रयोगकर्ता के ऊपर निर्भर करता है कि वह उपचारो या कारको के प्रभाव किस रूप में जानना चाहता है। जैसे तकनीशनो की कुशलता सम्बन्धी प्रयोग मे केवल उन्ही तक परिणामो को सीमित रखा जाये जिन पर प्रयोग किया गया है तो तकनीशनो सम्बन्धी प्रभाव स्थिर प्रकार के हो जाते है और इस स्थिति मे प्रतिरूप स्थिर प्रभाव प्रतिरूप कहा जायेगा। इसी प्रकार का विवेचन अन्य समस्याओ के लिए भी दिया जा सकता है। अत. किसी भी प्रतिरूप का प्रकार उपचारो या कारको की परिभाषा तथा उनके क्षेत्र पर आधारित है। यही कारण है कि अधिकाशत: विश्लेषण स्थिर प्रभाव प्रतिरूप मानकर ही किये जाते हैं।

प्रतिरूप I व II की स्थिति मे पूर्ण यादृच्छिक अभिकल्पना के लिए प्रसरण विश्लेषण सारणी निम्न रूप मे दी जा सकती है :—

प्रतिरूप I : जब प्रति उपचार पुनरावृत्ति-सख्या असमान हो।

(सारणी 21.4)

विचरण स्रोत	स्व० को०	व० य०	मा० व० य०	F-मान	प्रत्याशित मा० व० य०
उपचारों के बीच	$(k-1)$	S_{TT}	$S_{TT}/k-1 = T$	T/E	$\sigma_e^2 + \frac{\sum_i r_i \tau_i^2}{(k-1)}$
प्रयोग त्रुटि	$\sum_i r_i - k = \sum_i (r_i - 1)$	S_{ee}	$S_{ee}/\sum_i (r_i - 1) = E$		σ_e^2
पूर्ण	$\sum_i r_i - 1$	$\sum_i \sum_j X_{ij}^2 - CF$			

यदि प्रति उपचार पुनरावृत्ति संख्या समान हो अर्थात् $r_i = r$ हो तो सारणी (21.4) में, $\sum_i (r_i - 1) = k(r-1)$ और $\sum_i r_i - 1 = (kr - 1)$ के समान हो जाता है।

प्रत्याशित मा० व० य० में पद $\sum_i r_i \tau_i^2 / k-1 = r \sum_i \tau_i^2 / k-1$

प्रतिरूप-II

(सारणी 21.5) जब प्रति उपचार पुनरावृत्ति-संख्या असमान हो

विचरण स्रोत	स्व० को०	व० य०	मा० व० य०	F-मान	प्रत्याशित मा०व०य०
उपचारों के बीच	$(k-1)$	S_{TT}	$S_{TT}/k-1 = T$	T/E	$\sigma_e^2 + r_0 \sigma_\tau^2$
प्रयोग त्रुटि	$\sum_i r_i - k = \sum_i (r_i - 1)$	S_{ee}	$S_{ee}/\sum_i (r_i - 1) = E$		σ_e^2
पूर्ण	$\sum_i r_i - 1$	$\sum_i \sum_j X_{ij}^2 - CF$			

जहाँ
$$r_0 = \frac{\sum_i r_i - \sum_i r_i^2 / \sum r_i}{(k-1)} \qquad ....(21.7)$$

यदि सारणी (21.5) में सब उपचारों के लिए पुनरावृत्ति संख्या समान हो अर्थात् $r_i = r$ हो तो,

$$\sum (r_i - 1) = k(r-1), \ \sum r_i - 1 = (kr - 1)$$

और

$$r_0 = \frac{kr - kr^2/kr}{(k-1)} = r \qquad ....(21.7.1)$$

ऊपर दी हुई सारणियों (21.4) व (21.5) से स्पष्ट है कि प्रसरण विश्लेषण दोनों प्रतिरूपों की स्थिति में वही रहता है। केवल उपर्युक्त सारणी में प्रत्याशित माध्य वर्ग योग में स्थिति के अनुसार परिवर्तन होता है। इसी अन्तर को प्रदर्शित करने के लिए उपर्युक्त सारणियाँ दी गई हैं। S_{TT} व S_{ee} आदि का परिकलन सारणी (21 3) के अनुरूप है।

पदानुक्रमानुसार वर्गीकरण की स्थिति में प्रसरण विश्लेषण

इस प्रकार के वर्गीकरण को समावेशी (nested) वर्गीकरण भी कहते हैं। कोई भी अध्ययन चाहे किसी प्रयोग पर आधारित हो या प्रतिदर्शी अध्ययन कहलाता है क्योंकि प्रयोगगत एकक एक प्रतिचयन यूनिट के अनुरूप है। अनेक अध्ययनों में प्रत्येक प्रतिचयन एकक में से उप प्रतिचयन करना होता है या प्रत्येक प्रयोगगत एकक पर एक ही लक्षण के लिए कई प्रेक्षण लेने होते हैं। जैसे —

(1) क्षेत्र प्रयोगों में प्राय पूर्ण प्रयोगगत भूखण्ड (plot) की उपज न लेकर, इसमें से कई पादों (quadrants) का यादृच्छिक रीति से प्रतिचयन करके, इनकी उपज (या अन्य किसी लक्षण) के प्रति माप ले लिये जाते हैं। इन प्रेक्षणों को प्रयोगगत एकक के प्रतिदर्श प्रेक्षण कहते हैं।

(2) एक क्षेत्र में स्थित कीटाणुओं पर किसी दवा का प्रभाव देखने या किन्हीं अन्य पदार्थों के कारण इनमें वृद्धि आदि देखने के हेतु प्रति उपचार के लिए कुछ कीटाणुओं का चयन करके समूह बना लिए जाते हैं और इन समूहों का कीटों पर इच्छित माप ले लिए जाते हैं। एक समूह का प्रत्येक कीट एक उप-प्रतिचयन एकक के रूप में माना जाता है।

(3) किसी फैक्ट्री द्वारा उत्पादित वस्तु को प्राय कई तरह से प्रयोग करके इसकी क्षमता या शुद्धता जानने के लिए प्रेक्षण लिए जाते हैं। इन प्रेक्षणों को उप-प्रतिचयन प्रेक्षणों के रूप में प्रयोग करते हैं।

(4) यदि एक पौधे या पेड़ पर एक उपचार प्रयुक्त किया गया है तो इस पर लगी हुई सब पत्तियों या फलों पर किसी लक्षण के प्रति माप लेना लगभग असम्भव है। अत इस पौधे या पेड़ से कुछ पत्तियों या फलों का यादृच्छिक रीति से चयन कर लिया जाता है और इन चयनकृत पत्तियों या फलों पर प्रेक्षण लिए जाते हैं अर्थात् उप-प्रतिचयन का प्रयोग किया जाता है। इसी प्रकार अनेक अन्य उदाहरण दिये जा सकते हैं और उप-प्रतिचयन का प्रयोग किसी भी अभिकल्पना की स्थिति में किया जा सकता है। इन उप प्रतिचयन एककों में प्रसरण का अलग से परिकलन करना अत्यधिक उपयोगी है क्योंकि इससे उप प्रतिचयन एकका में विचरण का पता चल जाता है। उप-प्रतिचयन की स्थिति में प्रसरण विश्लेषण निम्न प्रकार किया जाता है —

स्थिति (क) · माना कि पूर्णतया यादृच्छिकीकृत अभिकल्पना में k उपचार लिये गये हैं, प्रत्येक उपचार की पुनरावृत्ति संख्या r है और प्रत्येक प्रयोगगत एकक से m प्रेक्षण लिये गये हैं।

इस अभिकल्पना के लिये सांख्यिकीय प्रतिरूप है,

$$X_{iju}=\mu+\tau_i+e_{ij}+\eta_{iju} \qquad \text{....}(21\ 8)$$

$$i=1, 2, 3, \ldots, k$$
$$j=1, 2, 3, \ldots, r$$
$$u=1, 2, 3, \ldots, m$$

X_{iju}, τ_i व e_{ij} प्रतिरूप (21.6) के अनुसार हैं और η_{iju}, j वें एकक में जिसे i वां उपचार दिया गया है, uवें उप-प्रतिचयन यूनिट का प्रभाव है। इसे (i, j, u) वें प्रतिचयन एकक की त्रुटि भी कहते हैं। इस प्रतिरूप के प्रति भी यह माना गया है कि μ एक अचर है और $e_{ij} \sim N(0, \sigma_e^2)$ व $\eta_{iju} \sim N(0, \sigma_\eta^2)$ इस विशेष स्थिति में प्रसरण विश्लेषण सारणी (21.6) के अनुसार कर सकते हैं। यहाँ परिकल्पना $H_0: \tau_1=\tau_2= \ldots =\tau_k$ की परिशुद्ध परीक्षा की जाती है।

सारणी (21.6) में प्रतिचयन त्रुटि के लिए स्व० कोटि, व०यो०, पूर्ण स्व० कोटि व व०यो० में से उपचार व प्रयोग त्रुटि की स्व० को० व व० यो० घटाकर ज्ञात करते हैं जैसा कि ऊपर सारणी में स्पष्ट दिखाया गया है।

σ_e^2 का आकलित मान,

$$s_e^2 = \frac{E-S}{m} \qquad \ldots(21.9)$$

और i वें उपचार माध्य की मानक त्रुटि,

$$SE(\overline{X}_i) = \sqrt{\frac{E}{rm}} \qquad \ldots(21.10)$$

प्राय: E का मान S से कम होता है $(E<S)$ अत: σ_e^2 का आकलक s_e^2 ऋणात्मक हो जाता है जो कि एक असम्भव मान है। ऐसी स्थिति में s_e^2 को शून्य मान लेते हैं तथापि यह एक अभिनत (biased) आकलक होता है। इस स्थिति में उपचारों की परीक्षा प्रतिचयन त्रुटि के विरुद्ध करते हैं या E व S को जोड़कर त्रुटि मा० व० यो० के रूप में प्रयोग करते हैं। कुछ व्यक्ति ऐसा मानते हैं कि यदि E, S के विरुद्ध परीक्षा करने पर निरर्थक हो तो उपचार प्रभावों की परीक्षा (E+S) या केवल S के विरुद्ध करना चाहिये। (E+S) लेने पर E व S की स्व० को० भी जोड़नी होती है।

यदि प्रयोग में उपचारों की पुनरावृत्ति-संख्या तथा प्रत्येक प्रयोगगत एकक से प्रतिदर्शी प्रेक्षणों की संख्या समान न हो तो परिकल्पना $H_0: \tau_1=\tau_2= \ldots =\tau_k$ की उपर्युक्त विधि से परीक्षा करना असम्भव है। अत: प्रयोग की योजना बनाते समय यथा सम्भव r व m के मान समान लेते हैं। किन्तु ऐसा करना प्रत्येक प्रयोग के लिए सम्भव नहीं है। इस स्थिति में $H_0: \tau_1=\tau_2=\ldots=\tau_k$ की परीक्षा निम्न प्रकार के विश्लेषण द्वारा करते हैं।

स्थिति (ब) माना कि पू० या० अ० के लिए गणितीय प्रतिरूप निम्न है, जिसमें k उपचार लिए गए हैं, उपचार T_i की पुनरावृत्ति संख्या r_i है और j वें एकक, जिसे i वां उपचार दिया गया है, में m_{ij} उपप्रतिचयन एककों की संख्या है,

(सारणी 21 6) पदानुक्रमानुसार वर्गीकरण के लिए प्रसरण विश्लेषण सारणी

विचरण स्रोत	स्व० को०	व० य०	मा० व० य०	F–मान	प्रत्याशित मा० व० य०
उपचारों के बीच	$(k-1)$	$\Sigma X^2_{i.}/rm - \frac{G^2}{rkm} = S_{TT}$	$S_{TT}/k-1 = T$	T/E	$\sigma^2_\eta + m\,\sigma_e^2 + mr\,\sigma^2_\tau$
प्रयोग त्रुटि	$k\,(r-1)$	$\sum_i \left\{ \sum_j \frac{X_{ij.}^2}{m} - \frac{X_i^2}{rm} \right\} = S_{ee}$	$S_{ee}/r(k-1) = E$		$\sigma^2_\eta + m\,\sigma_e^2$
प्रतिचयन त्रुटि	$rk\,(m-1)$	$\sum_i \sum_j \left\{ \sum_u X^2_{iju} - \frac{X_{ij.}^2}{m} \right\} = S_{XX}$	$S_{XX}/rk(m-1) = S$		σ^2_η
पूर्ण	$krm-1$	$\sum_u \sum_j \sum_i X^2_{iju} - \frac{G^2}{rkm}$			

$$X_{iju} = \mu + \tau_i + e_{ij} + \eta_{iju} \qquad \text{....(21.11)}$$

$$i = 1, 2, 3, \ldots, k$$

$$j = 1, 2, 3, \ldots, r_i$$

$$u = 1, 2, 3, \ldots, m_{ij}$$

इस प्रकार की स्थिति समाज विज्ञान, पशु अनुवंशिकी (animal genetics) या वनस्पति विज्ञान आदि मे प्राय पाई जाती है क्योंकि इनमें एक कुल (family) और प्रत्येक कुल की कई-कई सन्तति या प्रभेद और प्रत्येक सन्तति या प्रभेद पर कई-कई प्रेक्षण लेने होते है जिनकी संख्या प्राय समान नही होती है। इस प्रकार की समस्याओं का अध्ययन करने के लिए प्रतिरूप (21.11) का प्रयोग करके, परिकल्पना

$$H_0 : \tau_1 = \tau_2 = \ldots = \tau_k$$

की परीक्षा प्रसरण विश्लेषण सारणी (21.7) बनाकर की जा सकती है।

जबकि $n = \sum_i \sum_j m_{ij}$ = उपप्रतिचयन एककों की कुल संख्या

यहाँ

$$a_1 = \frac{n - \sum_i \left(\sum_j m_{ij}^2 / \sum_j m_{ij}\right)}{\sum_i (r_i - 1)} \qquad \text{....(21.12)}$$

$$a_2 = \frac{\sum_i \left(\sum_j m_{ij}^2 / \sum_j m_{ij}\right) - \sum_i \sum_j m_{ij}^2 / n}{(k-1)} \qquad \text{....(21.13)}$$

यदि प्रतिरूप II का प्रयोग करें तो प्रसरण विश्लेषण सारणी (21.7) के अनुरूप होगी। केवल उपचारों के प्रत्याशित मान मे अन्तर हो जायेगा। इस स्थिति में प्रत्याशित उपचार मा० व० म० $\sigma_\eta^2 + a_2 \sigma_e^2 + a_3 \sigma_\tau^2$ के समान होता है, जहाँ

$$a_3 = \frac{n - \sum_i \left(\sum_j m_{ij}\right)^2 / n}{(k-1)} \qquad \text{...(21.14)}$$

$H_0 : \tau_1 = \tau_2 = \ldots = \tau_k$ की परीक्षा सारणी (21.7) द्वारा परिशुद्ध नहीं होती है क्योंकि $a_1 \neq a_2$ है। अत जहाँ तक सम्भव हो असमान पुनरावृत्ति तथा असमान उपप्रतिचयन एककों की संख्या को प्रयोग म नहीं लेना चाहिये। यदि ऐसा करना आवश्यक हो तो यह ध्यान रखना चाहिये कि उपचारों के प्रति परीक्षा परिशुद्ध नहीं है।

पदानुक्रमानुसार वर्गीकरण की स्थिति म अन्य अभिकल्पनाओं के लिए विश्लेषण अनुरूप सारणी बनाकर कर सकते है। सारणी मे अभिकल्पनाओं के अनुसार विचरण स्रोत बढ़ जाते है जिनके लिए तदनुसार स्वतन्त्रता-कोटि तथा वर्ग योग आदि ज्ञात कर लिए जाते है।

(सारणी 21.7)

विचरण स्रोत	स्व० को०	व० यो०	मा० व० यो०	F-मान	प्रत्याशित मा० व० यो०
उपचारों के बीच	$(k-1)$	$\sum_i \frac{X_{i..}^2}{m_{i.}} - \frac{G^2}{n} = S_{TT}$	$S_{TT}/k-1$ $=T$	T/E	$\sigma^2_\eta + a_2\sigma_e^2 + \frac{\sum_i(\sum_j m_{ij}^2)\tau_i}{(k-1)}$
प्रयोग त्रुटि	$\sum_i (r_i-1)$	$\sum_i \left\{\sum_j \frac{X_{ij.}^2}{m_{ij}} - \frac{X^2_{i..}}{m_{i.}}\right\} = S_{ee}$	$S_{ee}/\sum_i(r_i-1)$ $=E$		$\sigma^2_\eta + a_1\sigma_e^2$
प्रतिचयन त्रुटि	$\sum_i\sum_j(m_{ij}-1)$	$\sum_i\sum_j \left\{ \frac{\sum X^2_{iju}}{n} - \frac{X^2_{ij.}}{m_{ij}} \right\} = S_{xx}$	$S_{xx}/\sum_i\sum_j(m_{ij}-1)$		σ_η^2
पूर्ण	$(n-1)$	$\sum_i\sum_j\sum_u X^2_{iju} - \frac{G^2}{n}$			

अप्राप्त मान

यदि एक तरफा वर्गीकरण में कोई मान लुप्त हो गया हो तो इसका आकलन करने की आवश्यकता नहीं होती है। इस प्रयोगगत एकक को छोड़ दिया जाता है जैसे कि वह प्रयोग में सम्मिलित ही नहीं था। किसी भी प्रयोग में मान अप्राप्त होने की स्थिति अनेकों कारणों से उत्पन्न हो सकती है जैसे कीट या पशु सम्बन्धी प्रयोग में यह सम्भव है कि प्रयोग समाप्त होने से पूर्व ही कीट या पशु की मृत्यु हो जाये। क्षेत्र प्रयोगों में किसी भूखण्ड की उपज को पशु द्वारा खा जाने या नष्ट कर देने के कारण या आग लग जाने के कारण या कभी कभी किसी अन्य कारण से उपज ही न होने के कारण मान अप्राप्त हो जाते हैं, इसी प्रकार अन्य प्रयोगों में भी कुछ अन्य कारणों से अप्राप्त मान हो सकते हैं। पूर्णतया यादृच्छिकीकृत अभिकल्पना की स्थिति में इन अप्राप्त मान या मानों को छोड़ दिया जाता है और न्यास के प्रसरण विश्लेषण में स्वतन्त्रता कोटि शेष प्रेक्षणों के अनुसार ही होती है। शेष प्रेक्षणों का सामान्य रूप में प्रसरण विश्लेषण करके परिणाम निकाल लिए जाते हैं।

द्विधा वर्गीकरण की स्थिति में प्रसरण विश्लेषण

किसी प्रयोग की योजना बनाने से पूर्व, प्रयोगगत एककों के विषय में जानना अत्यन्त आवश्यक हो जाता है। इस विषय में अनभिज्ञता होने पर यह सम्भव है कि जो उपचारों के कारण अन्तर प्रतीत हो, वह वास्तव में उपचारों के कारण न होकर एककों में विद्यमान विचरण के कारण हो। ऐसी स्थिति में उपचारों के प्रति निर्णय यथार्थ नहीं होते हैं। इससे यह संकेत मिलता है कि उपचार एक से एककों को दिये जाने चाहिये। अत: एककों में विचरण होने की स्थिति में इनका वर्गीकरण इस प्रकार कर दिया जाता है कि प्रत्येक वर्ग में एकक समरूप हों और प्रत्येक उपचार एक वर्ग में एक बार प्रकट होता हो। इन वर्गों को *खण्ड* (block) या *पुनरावृत्ति* कहते हैं। जैसे :—

(1) क्षेत्र प्रयोगों में वर्गीकरण भूमि या मिट्टी की उर्वरता के आधार पर करना होता है।

(2) यह समझा जाता है कि एक ही फैक्ट्री द्वारा उत्पादित वस्तु या पदार्थ दक्षता या क्षमता या अन्य गुणों में एक समान होते हैं। अत: किसी खण्ड में एक फैक्ट्री द्वारा उत्पादित वस्तुएँ लेना उचित है।

(3) पशु सम्बन्धी अध्ययनों में आयु, नस्ल या शारीरिक भार आदि के आधार पर खण्डों की रचना की जाती है।

(4) सर्वेक्षण सम्बन्धी अध्ययनों में पारिवारिक आय, परिवार में सदस्यों की संख्या, व्यक्तियों के शिक्षा स्तर, रहने के स्थान, आदि निकष के आधार पर वर्गीकरण या स्तरीकरण किया जाता है।

इस प्रकार के उदाहरणों की कोई सीमा नहीं है। यहां केवल समझाने की दृष्टि से वर्गीकरण के लिए कुछ स्थितियाँ दी गई हैं।

इस वर्गीकरण के अन्तर्गत सदैव दो कारकों के प्रति परिकल्पनाओं की परीक्षा करनी होती है। एक तो वर्गों के माध्यों की समानता के प्रति और दूसरी उपचारों के माध्यों की समानता के प्रति सांख्यिकीय परीक्षा करनी होती है। यही कारण है कि इन वर्गीकृत प्रयोगों को द्विधा वर्गीकरण माना जाता है। द्विधा वर्गीकरण के आधार पर रचित प्रयोग यादृच्छिकीकृत पूर्ण खण्डक अभिकल्पना या० ख० अ० (Randomized complete block design : RBD) कहलाते हैं।

टिप्पणी : अपूर्ण खण्डक अभिकल्पना (Incomplete block design) भी द्विधा वर्गीकरण पर आधारित होते हैं। या० ख० अ० के लिए कुछ अन्य प्रतिबन्ध भी होते हैं।

एक यादृच्छिकीकृत खण्डक अभिकल्पना वह है जिसमें कि सजातीय प्रयोगगत एककों का वर्गों या खण्डकों में विनिधान कर लिया जाता है। इस खण्डक में एककों की संख्या, उपचारों की संख्या के समान होती है और प्रत्येक खण्डक में स्वतन्त्र और यादृच्छिकीकृत विधि से उपचारों का प्रयोगगत एककों में विनिधान कर दिया जाता है। इस प्रकार वर्गीकरण द्वारा अर्थात् खण्डकों की रचना से एक और विचरण स्रोत को नियन्त्रित कर लिया जाता है जिससे कि प्रयोग की दक्षता बढ़ जाती है। माना कि यादृच्छिकीकृत पूर्ण खण्डक अभिकल्पना में k उपचार हैं और पुनरावृत्ति संख्या (खण्डकों की संख्या) r है। इस प्रकार के प्रयोग को करने के पश्चात् प्रेक्षणों को सदैव निम्न सारणी के रूप में व्यवस्थित कर सकते हैं :—

सारणी (21 8)

उपचार	पुनरावृत्ति या खण्डक 1	2	3 .... j ....r	योग	माध्य
1	X_{11}	X_{12}	X_{13} ....X_{1j} ....X_{1r}	X_{1}	$\overline{X}_1$
2	X_{21}	X_{22}	X_{23} ....X_{2j} ... ...X_{2r}	X_{2}	$\overline{X}_2$
3	X_{31}	X_{32}	X_{33} ....X_{3j} ....X_{3r}	X_{3}	$\overline{X}_3$
⋮	⋮			⋮	⋮
i	X_{i1}	X_{i2}	X_{i3}........ X_{ij} ....X_{ir}	X_{i}	$\overline{X}_i$
⋮	⋮			⋮	⋮
k	X_{K1}	X_{K2}	X_{K3} ....X_{Kj} ....X_{Kr}	X_{K}	$\overline{X}_K$
योग	$X_{.1}$	$X_{.2}$	$X_{.3}$ ....$X_{.j}$........$X_{.r}$	$X_{..}=G$	

पूर्ण प्रेक्षणों की संख्या=kr

उपर्युक्त सारणी में (i, j) वाँ प्रेक्षण X_{ij} कहलाता है अर्थात् i वाँ उपचार जो j वीं पुनरावृत्ति में प्रयोगगत एककों को दिया गया है उसका किसी लक्षण के प्रति लिया गया मान X_{ij} है।

माना कि $X_{ij} \sim N(\mu_{ij}, \sigma^2)$

जहाँ $i=1, 2, 3, \ldots\ldots, k$

$j=1, 2, 3, \ldots\ldots, r.$

$$\sum_{j=1}^{r} X_{j} = \sum_{i=1}^{k} X_{i} = G = X.$$

यादृच्छिकीकृत पूर्ण खण्डक अभिकल्पना पर आधारित या द्विधा वर्गीकरण के अन्तर्गत किये गये प्रन्वेषण द्वारा प्राप्त न्यास का प्रसरण विश्लेषण पूर्ण यादृच्छिकीकृत अभिकल्पना या एक तरफा वर्गीकरण के समरूप ही किया जाता है। इसके लिए केवल इतना अन्तर करना होता है कि प्रसरण विश्लेषण सारणी में एक विचरण स्रोत पुनरावृत्ति या खण्डकों के कारण और बढ़ जाता है। दूसरे इस स्थिति मे उपचारों की पुनरावृत्ति-संख्या सदैव समान होती है।

यादृच्छिकीकृत पूर्ण खण्डक अभिकल्पना के लिए रैखिक सांख्यिकीय प्रतिरूप जिसमें कि प्रत्येक एकक पर एक प्रेक्षण लिया गया हो निम्न होता है —

$$X_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j + e_{ij} \quad (21.15)$$

जब कि $i=1,2,3 \ldots\ldots, k$

$j=1,2,3, \ldots\ldots, r$

प्रतिरूप I के लिए, $\Sigma \tau_i = \Sigma \beta_j = 0$ तथा $E(\tau_i) = \tau_i$ व $E(\beta_j) = \beta_j$

प्रतिरूप में μ समग्र माध्य है, τ_i, iवें उपचार का वास्तविक प्रभाव है, β_j, jवें खण्डक का वास्तविक प्रभाव है और e_{ij}, (i,j) वें एकक का त्रुटि प्रभाव है, प्रत्येक e_{ij}, स्वतन्त्र हैं और $N(0, \sigma_e^2)$ बंटित है। यहाँ परिकल्पनाओं

$H_0 \;\; \tau_i = \tau_p$ को $H_1 \;\; \tau_i \neq \tau_p$ के विरुद्ध परीक्षा (प्रतिरूप I) मे करनी होती है जबकि $i \neq p$ और $\Sigma \tau_i = 0$। इसी प्रकार

$H_0 \cdot \beta_j = \beta_l$ को $H_1 \;\; \beta_j \neq \beta_l$ के विरुद्ध परीक्षा करनी होती है, जबकि $j \neq l$ और $\Sigma \beta_j = 0$। न्यूनतम वर्ग विधि का प्रयोग करके प्राचलों का आकलन कर लिए जाता है और वर्ग योग ज्ञात कर लिये जाते हैं जिसकी गणितीय व्युत्पत्ति निम्न प्रकार है.— सांख्यिकीय प्रतिरूप (21.15) के स्थिर प्रभाव प्रतिरूप की स्थिति में आगणक तथा वर्ग-योग यहाँ ज्ञात किये गये हैं —

(21.15) के अनुसार,

$$e_{ij} = (X_{ij} - \mu - \tau_i - \beta_j)$$

या $$e_{ij}^2 = (X_{ij} - \mu - \tau_i - \beta_j)^2$$

समस्त प्रेक्षणों के लिए योग लेने पर,

$$\sum_i \sum_j e_{ij} = \sum_i \sum_j (X_{ij} - \mu - \tau_i - \beta_j)^2$$

माना कि

$$Q = \sum_i \sum_j (X_{ij} - \mu - \tau_i - \beta_j)^2$$

न्यूनतम वर्ग-विधि के अन्तर्गत $\sum_i \sum_j e_{ij}^2$ को न्यूनतम करना होता है। अतः Q का μ, τ_i, β_j के सम्बन्ध में क्रमशः आंशिक अवकलन करके शून्य के समान रखने पर μ, τ_i, β_j के आकलक ज्ञात हो जाते हैं।

$$\frac{\partial Q}{\partial \mu} = 2 \sum_i \sum_j (X_{ij} - \hat{\mu} - \tau_i - \beta_j) = 0$$

या $$\sum_i \sum_j (X_{ij} - \hat{\mu} - \tau_i - \beta_j) = 0$$

∵ $$-2 \neq 0.$$

$$\sum_i \sum_j X_{ij} - \sum_i \sum_j \hat{\mu} - r \sum_i \tau_i - k \sum_j \beta_j = 0$$

∴ $$\sum_i \sum_j X_{ij} - k\, r\, \hat{\mu} = 0$$

[∵ प्रतिरूप I के लिए $\sum_i \tau_i = \sum_j \beta_j = 0$]

∴ $$\hat{\mu} = \sum_i \sum_j X_{ij} / kr$$

$$= \overline{X} \qquad \text{...(21.16)}$$

इसी प्रकार

$$\frac{\partial Q}{\partial \tau_i} = -2 \sum_j (X_{ij} - \hat{\mu} - \hat{\tau}_i - \beta_j) = 0$$

या $$\sum_j (X_{ij} - \overline{X} - \hat{\tau}_i - \beta_j) = 0$$

$$\sum_j X_{ij} - \sum_j \overline{X} - \sum_j \hat{\tau}_i = 0$$

$$X_{i\cdot} - r\,\overline{X} - r\,\hat{\tau}_i = 0$$

या $$\hat{\tau}_i = \frac{X_{i\cdot}}{r} - \overline{X}$$

$$= (\overline{X}_{i\cdot} - \overline{X}) \qquad \text{....(21:17)}$$

और $\frac{\partial Q}{\partial \beta_j} = -2 \sum_{i} (X_{ij} - \hat{\mu} - \hat{\tau}_i - \hat{\beta}_j) = 0$

या $\sum_{i} X_{ij} - \sum_{i} \bar{X} - \sum_{i} \hat{\beta}_j = 0$

$$X_{.j} - k\bar{X} - k\hat{\beta}_j = 0$$

$$\therefore \quad \hat{\beta}_j = \frac{X_{.j}}{k} - \bar{X}$$

$$= (\bar{X}_{.j} - \bar{X}) \quad \text{....(21.18)}$$

प्रसरण विश्लेषण सारणी (21.4) में दिये वर्ग योगों को इस प्रकार समझाया जा सकता है। पूर्ण प्रसरण का विपाटन करके निम्न रूप में लिखा जा सकता है जिसमें कि सीधी ओर के व्यञ्जक क्रमशः खण्ड, उपचार और त्रुटि वर्ग योग को निरूपित करते हैं। त्रुटि वर्ग योग सर्वदा कुल वर्ग योग से अन्य वर्ग योगों के योग का अन्तर लेकर ज्ञात किया जा सकता है। अतः

$$\sum_i \sum_j (X_{ij} - \bar{X})^2 = \sum_i \sum_j \{(\bar{X}_{.j} - \bar{X}) + (\bar{X}_{i.} - \bar{X}) + (X_{ij} - \bar{X}_{.j} - \bar{X}_{i.} + \bar{X})\}^2$$

$$= \sum_i \sum_j (\bar{X}_{.j} - \bar{X})^2 + \sum_i \sum_j (\bar{X}_{i.} - \bar{X})^2 + \sum_i \sum_j (X_{ij} - \bar{X}_{.j} - \bar{X}_{i.} + \bar{X})^2 \quad \text{....(21.19)}$$

क्योंकि सभी क्रॉस गुणनफल (cross product) पद शून्य के समान हैं।

$$\sum_i \sum_j (X_{ij} - \bar{X})^2 = k \sum_j (\bar{X}_{.j} - \bar{X})^2 + r \sum_i (\bar{X}_{i.} - \bar{X})^2 + \sum_i \sum_j (X_{ij} - \bar{X}_{.j} - \bar{X}_{i.} + \bar{X})^2$$

$$= \left(\sum_j \frac{X_{.j}^2}{k} - \frac{G^2}{kr} \right) + \left(\sum_i \frac{X_{i.}^2}{r} - \frac{G^2}{kr} \right) + \text{त्रुटि व० य०} \quad \text{....(21.19.1)}$$

= खण्ड व० य० + उपचार व० य० + त्रुटि व० य०

माध्य वर्ग योगों के प्रत्याशित मान

(21.15) मान पर स्थिर प्रभाव प्रतिरूप की स्थिति में,

$$X_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j + e_{ij}$$

जबकि $\sum_i \tau_i = \sum_j \beta_j = 0$ और $e_{ij} \sim N(0, \sigma_e^2)$

प्रतिरूप को j के सम्बन्ध में जोड़कर व r से भाग देने पर

$$\frac{1}{r}\sum_j X_{ij} = \mu + \tau_i + 0 + \frac{1}{r}\sum_j e_{ij}$$

$$\bar{X}_i = \mu + \tau_i + \frac{1}{r} e_i$$

$$= \mu + \tau_i + \bar{e}_i \qquad (21.20)$$

इसी प्रकार प्रतिरूप को i के सम्बन्ध में जोड़कर, k से भाग देने पर

$$\bar{X}_j = \mu + \beta_j + \bar{e}_j \qquad (21.21)$$

अब i व j के सम्बन्ध में जोड़कर, kr से भाग देने पर,

$$\frac{1}{kr}\sum_i\sum_j X_{ij} = \mu + \frac{1}{kr}\sum_i\sum_j e_{ij}$$

या

$$\bar{X} = \mu + \bar{e} \qquad (21.22)$$

(i) त्रुटि वर्ग-योग का प्रत्याशित मान —

(21.19) द्वारा यह विदित है कि,

त्रुटि व० यो० $(S_{EE}) = \sum_i\sum_j (X_{ij} - \bar{X}_j - \bar{X}_i + \bar{X})^2$

$X_{ij}, \bar{X}_j, \bar{X}_i$ व $\bar{X}$ के उपर्युक्त दिये मान रखने पर,

$$S_{EE} = \sum_i\sum_j (\mu + \tau_i + \beta_j + e_{ij} - \mu - \beta_j - \bar{e}_j - \mu - \tau_i - \bar{e}_i + \mu + \bar{e})^2$$

$$= \sum_i\sum_j (e_{ij} - \bar{e}_j - \bar{e}_i + \bar{e})^2$$

$$= \sum_i\sum_j (e_{ij}^2 + \bar{e}_j^2 + \bar{e}_i^2 + \bar{e}^2 - 2e_{ij}\bar{e}_j - 2e_{ij}\bar{e}_i$$

$$+ 2e_{ij}\bar{e} + 2\bar{e}_j\bar{e}_i - 2\bar{e}_j\bar{e} - 2\bar{e}_i\bar{e})$$

$$= \sum_i\sum_j e_{ij}^2 + k\sum_j \bar{e}_j^2 + r\sum_i \bar{e}_i^2 + kr\,\bar{e}^2$$

$$- 2\sum_j \bar{e}_j \sum_i e_{ij} - 2\sum_i \bar{e}_i \sum_j e_{ij} + 2\bar{e}\sum_i\sum_j e_{ij}$$

$$+ 2\sum_j \bar{e}_j \sum_i \bar{e}_i - 2k\bar{e}\sum_j \bar{e}_j - 2r\bar{e}\sum_i \bar{e}_i$$

$$=\sum_i\sum_j e_{ij}^2+k\sum_j \bar{e}_j^2+r\sum_i \bar{e}_i^2+kr\,\bar{e}^2-2k\sum_j \bar{e}_j^2$$

$$-2r\sum_i \bar{e}_i^2+2kr\,\bar{e}^2+2kr\,\bar{e}^2-2kr\bar{e}^2-2kr\bar{e}^2$$

$$=\sum_i\sum_j e_{ij}^2-k\sum_j \bar{e}_j^2-r\sum_i \bar{e}_i^2+kr\,\bar{e}^2$$

$$E\,(S_{EE})=\sum_i\sum_j E\,(e_{ij}^2)-k\sum_j E\,(\bar{e}_j^2)-r\sum_i E\,(\bar{e}_i)+kr\,E\,(\bar{e}^2)$$

$$=kr\,\sigma_e^2-k\,\sigma_e^2-r\,\sigma_e^2+\sigma_e^2$$

$$=(r-1)\,(k-1)\,\sigma_e^2$$

हम जानते हैं कि त्रुटि मा० व० य० $=\dfrac{1}{(r-1)(k-1)}\;S_{EE}$

∴ त्रुटि माध्य वर्ग-योग का प्रत्याशित मान

$$E\left\{\frac{1}{(r-1)(k-1)}\;S_{EE}\right\}=\frac{1}{(r-1)(k-1)}\,E\,(S_{EE})$$

$$=\sigma_e^2 \qquad (19\ 23)$$

(ii) उपचार माध्य वर्ग-योग का प्रत्याशित मान

(21 19) की सहायता से,

उपचार व० यो० $(S_{TT})=\sum_i\sum_j(\bar{X}_i-\bar{X})^2$

(21 20) से $\bar{X}_i$ और (21 22) से $\bar{X}$ के मानों का प्रतिस्थापन करने पर

$$S_{TT}=\sum_i\sum_j(\mu+\tau_i+\bar{e}_i-\mu-\bar{e})^2$$

$$=\sum_i\sum_j(\tau_i+\bar{e}_i-\bar{e})^2$$

$$S_{TT}=\sum_i\sum_j(\tau_i^2+\bar{e}_i^2+\bar{e}^2+2\tau_i\,\bar{e}_i-2\tau_i\,\bar{e}-2\bar{e}_i\,\bar{e})$$

$$=\sum_i\sum_j\tau_i^2+\sum_i\sum_j\bar{e}_i^2+\sum_i\sum_j\bar{e}^2-2\sum_i\sum_j\bar{e}\bar{e}_i$$

$$\left[\because \sum_i\tau_i=0\right]$$

$$S_{TT}=r\sum_i\tau_i^2+r\sum_i\bar{e}_i^2+kr\,\bar{e}^2-2\,kr\,\bar{e}^2$$

$$=r\sum_i\tau_i^2+r\sum_i\bar{e}_i^2-kr\,\bar{e}^2$$

$$E\,(S_{TT})=E\,(r\sum_i\tau_i^2+r\sum_i\bar{e}_i^2-kr\,\bar{e}^2)$$

$$= r \sum_i \tau_i^2 + r \sum_i E(\bar{e}_i^2) - kr E(\bar{e}^2)$$

अतः अब $E(\bar{e}_i^2)$ और $E(\bar{e}^2)$ ज्ञात करना है।

$$(\bar{e}_i^2) = \left(\frac{1}{r} \sum_j e_{ij} \right)^2$$

$$= \frac{1}{r^2} \sum_j e_{ij}^2 + \frac{1}{r^2} \sum_{j \neq j'} e_{ij} e_{ij'}$$

$$= \frac{1}{r^2} \sum_j e_{ij}^2$$ [∵ सब e_{ij} स्वतन्त्र हैं और $N(0, \sigma_e^2)$ बंटित हैं।]

$$E(\bar{e}_i^2) = \frac{1}{r^2} \sum_j E(e_{ij}^2)$$

$$= \frac{1}{r^2} \sum_j V(e_{ij})$$

$$= \frac{1}{r^2} \cdot r \sigma_e^2$$

$$= \frac{\sigma_e^2}{r}$$

इसी प्रकार,

$$(\bar{e}^2) = \left(\frac{\sum_i \sum_j e_{ij}}{kr} \right)^2$$

$$= \sum_i \sum_j e_{ij}^2 / k^2 r^2 + \frac{1}{k^2 r^2} \sum_{i \neq i'} \sum_{j \neq j'} e_{ij} e_{i'j'}$$

$$\therefore \quad E(\bar{e}^2) = E\left(\frac{1}{kr} \sum_i \sum_j e_{ij} \right)^2$$

$$= \frac{1}{k^2 r^2} \sum_i \sum_j E(e_{ij}^2) +$$

$$= \frac{1}{k^2 r^2} \sum_{i \neq i'} \sum_{j \neq j} E(e_{ij} e_{i'j'})$$

$$=\frac{1}{k^2 r^2} \; kr\,\sigma_e^2+0$$

$$=\frac{\sigma_e^2}{kr}$$

$$\therefore \quad E(S_{rr})=r\sum_i \tau_i^2+r\sum_i \frac{\sigma_e^2}{r}-kr\frac{\sigma_e^2}{kr}$$

$$=r\sum_i \tau_i^2+k\,\sigma_e^2-\sigma_e^2$$

$$=r\sum_i \tau_i^2+(k-1)\,\sigma_e^2$$

उपचार मा० व० व० $(T)=\frac{1}{(k-1)}\,S_{rr}$

$$E(T)=\frac{1}{(k-1)}\,E(S_{rr})$$

$$\frac{r}{k-1}\sum_i \tau_i^2+\sigma_e^2$$

इसी प्रकार सिद्ध किया जा सकता है कि प्रतिरूप II के अन्तर्गत

$$E(T)=r\,\sigma_\tau^2+\sigma_e^2$$

(*iii*) *खण्डक माध्य वर्ग योग का प्रत्याशित मान* (21 19) के द्वारा,

खण्डक व० य० $(S_n)=\sum_i\sum_j(\bar{X}_j-\bar{X})^2$

(21 21) व (21 22) की सहायता से

$$S_n=\sum_i\sum_j(\mu+\beta_j+\bar{e}_j-\mu-\bar{e})^2$$

$$=k\sum_j\beta_j^2+k\sum_j\bar{e}_j^2-kr\,\bar{e}^2$$

अब $E(\bar{e}_j^2)$ ज्ञात करना है। $E(\bar{e}^2)$ का (ii) में ज्ञात किया जा चुका है।

$$E(\bar{e}_j^2)=E\left(\frac{1}{k}\sum_i e_{ij}\right)^2$$

$$=\frac{1}{k^2}\sum_i E(e_{ij}^2)+\frac{1}{k^2}\sum_{i\neq i'} E(e_{ij}\,e_{i'j})$$

$$=\frac{1}{k^2}\sum_{i}\sigma_e^2$$

$$=\sigma_e^2/k$$

$$\therefore \quad E(S_\pi)=k\sum_j \beta_j^2+k\sum_j E(\bar{e}_j^2)-kr\,E(\bar{e}^2)$$

$$=k\sum_j \beta_j^2+k\sum_j \frac{\sigma_e^2}{k}-kr\frac{\sigma_e^2}{kr}$$

$$=k\sum_j \beta_j^2+r\,\sigma_e^2-\sigma_e^2$$

$$=k\sum_j \beta_i^2+(r-1)\,\sigma_e^2$$

खण्डक मा० व० य० $(B)=\frac{1}{r-1}S_\pi$

$$\therefore \quad E(B)=E\left(\frac{S_\pi}{r-1}\right)$$

$$=\frac{1}{(r-1)}E(S_\pi)$$

$$=\frac{k}{r-1}\sum_j \beta_i^2+\sigma_e^2$$

इसी प्रकार यह सिद्ध किया जा सकता है कि प्रतिरूप II के अन्तर्गत,

$$E(B)=k\,\sigma_\beta^{\,2}+\sigma_e^2$$

यादृच्छिक पूर्ण खण्डक अभिकल्पना के लिए खण्डकों के आकलित मान तथा प्रत्याशित माध्य वर्ग योग ज्ञात करने की विधि का उपर्युक्त वर्णन, पाठकों को विधि से अवगत कराने तथा इन दोनों के तात्पर्य को बताने की दृष्टि से दिया गया है। उपर्युक्त वर्णन एक प्रयोगगत एकक पर एक प्रेक्षण लिए जाने की स्थिति में दिया गया है। इसी विधि का अनुकरण करते हुए आकलक एवं प्रत्याशित माध्य वर्ग योग अन्य स्थितियों तथा विभिन्न अभिकल्पनाओं के लिए ज्ञात किये जा सकते हैं। इन सभी में परिवर्तन अभिकल्पना के लिए लिये गये सांख्यिकीय प्रतिरूप के अनुसार करना होता है।

उपर्युक्त वर्ग योगों तथा प्रत्याशित माध्य वर्ग योगों का प्रयोग करके निम्न प्रसरण विश्लेषण सारणी (21 9) सुगमता से तैयार की जा सकती है।

(सारणी 21 9) या०ख०अ० के लिए प्रसरण विश्लेषण सारणी

विचरण स्रोत (i)	स्व० को० (ii)	व० यो० (iii)	मा० व० यो० (iv)	F-मान (v)	प्रत्याशित मा० व० यो० (vi)
ब्लॉक	$(r-1)$	$\frac{1}{k}\sum_j X^2_{.j} - \frac{G^2}{kr} = S_{rr}$	$\frac{S_{rr}}{r-1} = B$	$\frac{B}{s_e^2}$	$\sigma_e^2 + \frac{k}{r-1}\sum_j \beta_j^2 = \sigma_e^2 + k\sigma^2_\beta$
उपचार	$(k-1)$	$\frac{1}{r}\sum_i X_{i.}^2 - \frac{G^2}{kr} = S_{TT}$	$\frac{S_{TT}}{k-1} = T$	$\frac{T}{s_e^2}$	$\sigma_e^2 + \frac{r}{k-1}\sum_i \tau^2 = \sigma_e^2 + k\sigma_\tau$
प्रयोग त्रुटि	$(r-1)(k-1)$	$\sum_i\sum_j X_{ij}^2 - \frac{1}{k}\sum_j X_{.j}^2 - \frac{1}{r}\sum_i X_{i.}^2 + \frac{G^2}{kr} = S_{EE}$	$\frac{S_{EE}}{(r-1)(k-1)} = s_e^2$		σ_e^2
योग	$kr-1$	$\sum_i\sum_j X^2_{ij} - \frac{G^2}{kr}$			

एक उपचार माध्य की मानक त्रुटि $S.E=\sqrt{\frac{s_e^2}{r}}$

दो उपचार माध्यों में अन्तर $(\bar{X}_i - \bar{X}_p)$ जबकि $i \neq p$, की मानक त्रुटि

$$S.E = s_e\sqrt{\frac{2}{r}} = \sqrt{\frac{2s_e^2}{r}}$$

s_e^2, σ_e^2 का आकलित मान है।

σ_T का भी आकलन किया जा सकता है। माना कि σ^2_T का आकलित मान s_T^2 है जब कि

$$s^2_T = \frac{T - s_e^2}{r}$$

यदि चाहें तो इसी प्रकार σ_b^2 का आकलित मान s_b^2, सूत्र $\frac{B-E}{k}$ द्वारा ज्ञात कर सकते हैं। किन्तु व्यवहार मे केवल उपचारों में ही मुख्यता रुचि होने के कारण, s_b^2 का मान ज्ञात नहीं किया जाता है।

उदाहरण 21.3 सोयाबीन की पाँच प्रजातियों मे अन्तर की परीक्षा करने के हेतु एक प्रयोग किया गया। प्रयोग का विन्यास यादृच्छिकीकृत पूर्ण खण्डक अभिकल्पना था जिसमें की चार खण्डक थे। इस प्रयोग द्वारा प्रति भूखण्ड उपज (किलो॰ में) निम्न प्रकार थी —

(10×1.5 मी॰) प्रति भूखण्ड सोयाबीन की उपज (किलो॰ में)

क्रम	सोयाबीन प्रजाति	R_1	R_2	R_3	R_4	योग	माध्य
1	ब्राग (Bragg)	11 43	9 58	12 70	11 00	44 71	11·18
2	ली (Lee)	8 54	8 93	9 42	13 70	40 59	10 15
3	ली–68 (Lee–68)	6 01	6 56	7 95	12 30	32 82	8 20
4	जे॰–3 (J–3)	15 00	15 99	14 82	12 97	58 78	14 69
5	पंजाब–1 (Punjab 1)	7 54	7 22	8 97	9 65	33 38	8 34
	योग	48 52	48 28	53 86	59 62	210 28	

उदाहरण (21 3) का न्यास श्री वी॰ एल॰ चोपड़ा, राज कृषि महाविद्यालय, उदयपुर, के सौजन्य से प्राप्त हुआ।

$$\text{स० का०} = \frac{(210{\cdot}28)^2}{20} = 2210\ 88$$

$$\text{प्रजाति व० य०} = \tfrac{1}{4}\ (44\ 71^2 + ... + 33\ 38^2) - \text{स० का०}$$
$$= 2323\ 25 - 2210\ 88$$
$$= 112\ 37$$

$$\text{खण्ड व० य०} = \tfrac{1}{5}\ (48\ 52^2 + ... + 59\ 62^2) - \text{सं० का०}$$
$$= 2228\ 18 - 2210\ 88$$
$$= 17\ 30$$

$$\text{पूर्ण व० य०} = (11\ 43^2 + 8\ 54^2 + ... + 12\ 97^2 + 9\ 65^2) - \text{सं० का०}$$
$$= 2378\ 56 - 2210\ 88$$
$$= 167\ 68$$

प्रसरण विश्लेषण सारणी

विचरण स्रोत	स्व० को०	व०यो०	मा०व०यो०	F-मान
खण्ड	3	17·30	5 76	$\frac{5\ 76}{3\ 18} = 1{\cdot}81$
प्रजाति	4	112·37	28 09	$\frac{28\ 09}{3\ 18} = 8\ 83$
त्रुटि	12	38 01	3·18	
पूर्ण	19	167 68		

सारणी (प-5 2) द्वारा $F_{05\ 3\ 12} = 3\ 49$ जो कि 1 81 से अधिक है अत यहाँ H_0 $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4$ को स्वीकार कर लिया जाता है जिसका अभिप्राय है कि खण्डकों में सार्थक अन्तर नहीं है।

इसी प्रकार सारणीबद्ध $F_{05\ 4\ 12} = 3\ 26$ जो कि 8 83 से कम है अत

$$H_0 \quad \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \mu_5$$

को अस्वीकार कर दिया जाता है। इसका अभिप्राय है कि सोयाबीन की प्रजातियों में सार्थक माध्य अन्तर है। अब यह परीक्षा करना है कि इनमें से कौनसी प्रजातियाँ एक दूसरे से सार्थक रूप से भिन्न हैं। इस परीक्षा को डंकन-बहुपरास परीक्षा द्वारा किया जाना उपयुक्त है। इसको उदाहरण (21 2) में डंकन-बहुपरास परीक्षा की विधि को स्पष्ट

करने के हेतु दिया जा चुका है। इन प्रजातियों के युगल माध्य अन्तरों में सार्थकता की परीक्षा के विषय में जानने के लिए उदाहरण (21 2) को पढ़िये।

यादृच्छिकीकृत पूर्ण खण्डक अभिकल्पना में उपप्रतिचयन की स्थिति में प्रसरण विश्लेषण

उपप्रतिचयन का विस्तृत वर्णन पूर्णतया यादृच्छिकीकृत अभिकल्पना के साथ दिया जा चुका है। यादृच्छिकीकृत पूर्ण खण्डक अभिकल्पना की स्थिति में भी वही कारण तर्क-संगत है। माना कि प्रत्येक प्रयोगगत एकक से m उपप्रतिचयन एककों का चयन किया गया है अर्थात् प्रत्येक प्रयोगगत एकक पर m प्रेक्षण लिए गये हैं तो सांख्यिकीय प्रतिरूप निम्न होता है —

$$X_{iju} = \mu + \tau_i + \beta_j + e_{ij} + \eta_{iju} \qquad \text{....(21 16)}$$

$$i = 1, 2, 3, ..., k$$

$$j = 1, 2, 3, ..., r$$

$$u = 1, 2, 3, ..., m$$

इस प्रतिरूप के प्रत्येक प्राचल से आप परिचित हैं अतः इनका पुनः वर्णन करना व्यर्थ है। प्रत्येक e_{ij} स्वतन्त्र है और $N(0, \sigma_e^2)$ बंटित है और η_{iju} $N(0, \sigma_\eta^2)$ बंटित है।

स्थिर प्रभाव प्रतिरूप (प्रतिरूप I) की स्थिति में यह भी कल्पनाएँ की गई हैं कि

$$\sum_i \tau_i = \sum_j \beta_j = 0, \quad E(\beta_j) = \beta_j; \quad E(\tau_i) = \tau_i$$

यदि सब उपचारों का माध्य प्रभाव समान हो अर्थात् यदि

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = ... = \mu_k \quad \text{हो तो} \quad \tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = ... = \tau_k = 0$$

होगा। इस प्रतिबन्ध के परिणाम स्वरूप इस निष्कर्ष पर पहुँचते हैं कि उपचारों के प्रभाव की समानता की परीक्षा करने में हमें परिकल्पनाओं,

$$H_0 : \tau_i = 0, \; i = 1, 2, ..., k$$

या H_1 : इनमें से कम से कम एक τ_i शून्य नहीं है, में से एक को स्वीकार करना होता है।

(सारणी 21.10) प्रतिरूप I, व्यापक प्रसरण विश्लेषण सारणी जबकि यादृच्छिकीकृत पूर्ण खण्डक अभिकल्पनाओं में m प्रेक्षण प्रति एकक लिये गए हैं।

विचरण स्रोत	स्व०को०	व०यो०	मा०व०यो०	F–मान	प्रत्याशित मा०व०यो०
खण्डक	$(r-1)$	$\frac{1}{km}\sum_j X_{j.}^2 - \frac{G^2}{rkm} = S_{rr}$	$\frac{S_{rr}}{r-1} = B$	B/E	$\sigma_\eta^2 + m\sigma_e^2 + km \sum_j \frac{B_j^2}{r-1}$
उपचार	$(k-1)$	$\frac{1}{rm}\sum_i X_{i..}^2 - \frac{G^2}{rkm} = S_{TT}$	$\frac{S_{TT}}{k-1} = T$	T/E	$\sigma_\eta^2 + m\sigma_e^2 + rm \sum_i \frac{T_i^2}{k-1}$
प्रयोग त्रुटि	$(r-1)(k-1)$	$\frac{1}{m}\sum_i\sum_j X_{ij.}^2 - \frac{1}{rm}\sum_i X_{i..}^2 - \frac{1}{km}\sum_j X_{.j}^2 + \frac{G^2}{rkm} = S_{EE}$	$\frac{S_{EE}}{(r-1)(k-1)} = E$		$\sigma_\eta^2 + m\sigma_e^2$
प्रतिचयन त्रुटि	$kr(m-1)$	$\sum_i\sum_j\left(\sum_u X_{iju}^2 - \frac{X_{ij.}^2}{m}\right) = S_{XX}$	$\frac{S_{XX}}{rk(m-1)} = S$		σ_η^2
पूर्ण	$(rkm-1)$	$\sum_i\sum_j\sum_u X_{iju}^2 - \frac{G^2}{rkm}$			

जबकि $\sum_i \frac{T_i^2}{k-1} = \sigma_T^2$, और $\sum_j \frac{\beta_j^2}{r-1} = \sigma_\beta^2$

यहाँ σ_e^2 का आकलित मान,

$$s_e^2 = \frac{E-S}{m}$$

और σ_T^2 का आकलित मान,

$$s_T^2 = \frac{T-E}{rm}$$

उदाहरण 21.4 पाँच पोषक (Host) पौधों का लारवी (Larvae) की वृद्धि पर प्रभाव जानने के हेतु एक प्रयोग किया गया। प्रयोग को याहच्छिकीकृत पूर्ण खण्डक अभिकल्पना मे व्यवस्थित किया गया और तीन पुनरावृत्तियाँ ली गईं। प्रत्येक प्रयोगगत एकक से 10 लारवी का एक समूह लिया गया। तृतीय अन्तंरूप (III instar) के शरीर की लम्बाई प्रति लारवा मापने पर अग्रांकित अनुसार थी :—

इस न्यास का प्रसरण विश्लेषण तथा परिणामों का विवेचन निम्न प्रकार कर सकते हैं :—

दिये गये न्यास में प्रत्येक उपचार के लिए प्रयोगगत एकक मे 10 प्रेक्षण कीटों पर लिये गए हैं जिनको कि उपप्रतिचयन एककों के रूप में प्रयोग किया जा सकता है। इस स्थिति में न्यास का प्रसरण विश्लेषण निम्न प्रकार कर सकते हैं :

$$\text{स० का०} = \frac{(1234\ 74)^2}{150} = 10163{\cdot}2370$$

पुनरावृत्तियो के योग,

$$R_1 = 411{\cdot}28, \quad R_2 = 412\ 01, \quad R_3 = 411{\cdot}41$$

$$\text{पुनरावृत्ति व० य०} = \tfrac{1}{50}\{411{\cdot}28^2 + 412{\cdot}01^2 + 411\ 41^2\} - \text{स० का०}$$
$$= 10163\ 3332 - 10163\ 2270$$
$$= {\cdot}1062$$

उपचारो के योग

$$T_1 = 270{\cdot}10, \quad T_2 = 258{\cdot}30, \quad T_3 = 24^{\cdot}{\cdot}90, \quad T_4 = 236\ 30,$$
$$T_5 = 222{\cdot}10$$

$$\text{उपचार व० य०} = \tfrac{1}{30}\{270\ 10^2 + \ldots + 222{\cdot}10^2\} - \text{सं० का०}$$
$$= 10210\ 018 - 10163{\cdot}227$$
$$= 46\ 553$$

लारवी के शरीर की लम्बाई (मि॰ मी॰ में)

	पुनरावृत्ति	लारवी की क्रम संख्या 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	योग	माध्य	उपचार माध्य
पूनगामी (T₁)	R_1	9 00	8 90	9 00	9 00	9 98	8 90	9 00	9 00	9 00	9 00	89 78	8 98	
	R_2	9 10	9 00	8 98	8 96	9 00	9 00	9 00	9 10	9 00	9 00	90 16	9 02	9 20
	R_3	9 00	9 10	9 10	8 90	9 00	9 00	9 00	9 00	9 00	9 00	90 16	9 02	
रिजका (T_2)	R_1	8 70	8 60	8 50	8 50	8 60	8 60	8 60	8 60	8 70	8 70	86 10	8 61	
	R_2	8 60	8 50	8 70	8 70	8 70	8 70	8 60	8 70	8 70	8 70	86 00	8 66	8 63
	R_3	8 70	8 70	8 50	8 60	8 50	8 60	8 60	8 60	8 70	8 60	86 20	8 62	
चना (T_3)	R_1	8 20	8 20	8 50	8 80	8 30	8 50	8 30	8 20	8 20	8 30	83 50	8 35	
	R_2	8 10	8 10	8 20	8 20	8 20	8 30	8 30	8 20	8 30	8 20	82 10	8 21	8 26
	R_3	8 30	8 40	8 40	8 20	8 30	8 20	8 10	8 10	8 10	8 20	82 30	8 23	
मटर (T_4)	R_1	7 50	7 80	7 90	7 95	7 90	7 90	7 90	7 90	7 95	7 80	78 50	7 85	
	R_2	8 00	8 10	7 90	7 95	7 95	7 85	7 90	7 90	7 90	7 90	79 35	7 93	7 88
	R_3	7 95	7 95	7 95	7 80	7 80	7 80	7 95	7 95	7 95	7 80	78 45	7 84	
मण्डी (T_5)	R_1	7 10	7 10	7 20	7 20	7 50	7 50	7 50	7 50	7 30	7 50	73 40	7 34	
	R_2	7 20	7 50	7 50	7 50	7 30	7 30	7 30	7 50	7 70	7 60	74 40	7 44	7 40
	R_3	7 30	7 50	7 50	7 50	7 30	7 40	7 30	7 50	7 50	7 50	74 30	7 43	
												1234 70		

प्रयोगगत एककों के व० य०,

$= \frac{1}{10} \{ 89\ 78^2 + 90\ 16^2 + \ldots + 74\ 40^2 + 74\ 30^2 \}$–स० का०

$= 10210 - 018 - 10163\ 227$

$= 46{\cdot}791$

प्रयोग त्रुटि $= 46\ 791 - 46{\cdot}553 - {\cdot}0062$

$= 0\ 2318$

पूर्ण व० य० $= (9\ 00^2 + 8\ 90^2 + \ldots + 7\ 50^2 + 7\ 50^2)$–स० का०

$= 10245\ 1787 - 10163\ 2270$

$= 81\ 9517$

प्रसरण विश्लेषण सारणी

विचरण स्रोत	स्व० को०	व० य०	मा० व० य०	F-मान
पुनरावृत्ति	2	1062	0531	
उपचार	4	46·553	11 638	44 69
प्रयोग त्रुटि	8	0·2318	0 0289	
प्रतिचयन त्रुटि	135	35 1607	0 2604	
पूर्ण	149	81 9517		

प्रयोग त्रुटि, प्रतिचयन त्रुटि से कम है अत त्रुटि के रूप मे प्रतिचयन त्रुटि का ही प्रयोग किया गया है। यदि चाहें तो इस स्थिति में दोनो त्रुटियो को जोडकर भी त्रुटि वर्ग यो॰ के रूप मे प्रयोग कर सकते हैं।

सारणी (परि० प–5.1) द्वारा $\alpha = .01$ व $(2, 8)$ स्व० को० के लिए F का मान 4 46 है जो कि F के परिकलित मान से बहुत कम है अत उपचारो का लारवी की शरीर की लम्बाई पर अत्यधिक प्रभाव है।

युगल उपचारो मे सार्थकता की परीक्षा डकन की बहुपरास परीक्षण या न्यूनतम सार्थक अन्तर की सहायता से कर सकते हैं। यहां न्यूनतम सार्थक अन्तर परीक्षा का ही प्रयोग किया गया है। यदि अधिक परिशुद्धि से परीक्षा करनी हो तो डकन की बहुपरास परीक्षा का ही प्रयोग करना चाहिए।

अत सूत्र (21 5 1) की सहायता से,

सा० अ० $= \sqrt{\frac{2}{80}\ 2604} \times 2\ 306$

$= 01736 \times 2\ 306$

$= 1318 \times 2\ 306$

$= 3038$

उपचार माध्यों को अवरोही क्रम में रख दिया और जिन युगल माध्यों में अन्तर 3038 से कम है उनके नीचे रेखा खींच दी। यह उपचार निरर्थक अन्तर को प्रदर्शित करते हैं।

9 00 8 63 8 26 7 88 7 40

सब ही युगल माध्यों में अन्तर 3038 से अधिक है अतः प्रत्येक उपचार का प्रभाव *एक-दूसरे से सार्थक रूप में भिन्न है।*

यादृच्छिकीकृत पूर्ण खण्डक अभिकल्पना में एक अप्राप्त मान हो तो प्रसरण विश्लेषण

किसी प्रयोग में लुप्त मान किसी भी कारण से हो सकता है। इन कारणों का पूर्णतया यादृच्छिकीकृत अभिकल्पना में अप्राप्त मान की स्थिति में पहले ही दिया जा चुका है। यह बात ध्यान देने योग्य है कि ऐसी कोई विधि नहीं है कि जिसके द्वारा अप्राप्त मान का ज्ञान किया जा सकता हो। इन अप्राप्त मान के आकलन करने का उद्देश्य केवल इतना ही है कि जो न्यास विद्यमान हैं उनके द्वारा प्रयोग के विषय में अधिकतम सूचना प्राप्त हो जाए और प्रयोगगत त्रुटि कम से कम रहे। ऐसा करना इस कारण आवश्यक है कि एक या एक से अधिक प्रेक्षण अप्राप्त होने पर प्रयोग को पूर्णतया रद्द नहीं किया जा सकता है। अतः प्रयोगगत प्रेक्षणों का विश्लेषण करते समय पहले अप्राप्त मान का आकलन निम्न सूत्र से कर लेते हैं। इस आकलित मान को अप्राप्त मान के स्थान पर रखकर यादृच्छिकीकृत पूर्ण खण्डक अभिकल्पना के लिए सामान्य रूप में प्रसरण विश्लेषण कर लिया जाता है, किन्तु विश्लेषण में एक परिवर्तन अवश्य करना होता है वह यह है कि कुल स्वातन्त्र्य संख्या में से एक (*अप्राप्त प्रेक्षणों की संख्या के समान संख्या*) घटा देते हैं जिससे परिणाम-स्वरूप प्रयोग त्रुटि की स्वतन्त्र तदनुसार स्वातन्त्र्य संख्या कम हो जाती है।

सारणी (21 8) के अनुसार यदि i वें उपचार के लिए लुप्त मान j वें खण्ड में स्थित है तो उसका आकलित मान

$$\hat{X} = \frac{kT' + rB' - G'}{(r-1)(k-1)} \qquad .(21\ 17)$$

जब कि T', i वें उपचार के लिए प्राप्त प्रेक्षणों का योग है और B', j वें स्तम्भ में विद्यमान प्रेक्षणों का योग है अर्थात् यह उस स्तम्भ का योग है जिसमें कि अप्राप्त मान है और G', प्रयोग के ज्ञात प्रेक्षणों का योग है जिनकी संख्या $(kr-1)$ है जब कि उपचारों की संख्या k है और r पुनरावृत्तियों की संख्या है। अप्राप्त मान के आकलित मान का प्रयोग करने से उपचार वर्ग योग वास्तविक से कुछ अधिक हो जाता है। अतः इस वर्ग योग में संशोधन करना होता है। यह संशोधन राशि है,

$$G_{rr} = \frac{(kT' + B' - G')^2}{k(k-1)(r-1)^2} \qquad (21\ 18)$$

$$= \frac{\{B' - (k-1)\hat{X}\}^2}{k(k-1)} \qquad ...(21.18\ 1)$$

उपचार वर्ग योग में से, राशि C_{TT} को घटाकर शुद्ध उपचार वर्ग योग ज्ञात हो जाता है। इस संशोधन को न करने की स्थिति में कभी-कभी उपचारों में सार्थक अन्तर न होते हुए भी यह अन्तर सार्थक सिद्ध हो जाते हैं। क्योंकि अप्राप्त मान के आकलित मान को रखने पर उपचार वर्ग-योग में ऊर्ध्वकारी अभिनति (upward bias) आ जाती है। अतः इस शुद्धि का अवश्य प्रयोग करना चाहिए।

अप्राप्त मान वाले उपचार के माध्य तथा अन्य किसी उपचार के माध्य में अन्तर की मानक त्रुटि SE′ निम्न होती है

$$SE' = \sqrt{s_e^2 \left\{ \frac{2}{r} + \frac{k}{r(r-1)(k-1)} \right\}} \qquad \ldots(21.19)$$

टिप्पणी. यदि एक से अधिक मान अप्राप्त हों तो उनका आकलन करके या सहप्रसरण विश्लेषण (अध्याय 22) की सहायता से विश्लेषण किया जा सकता है। इन विधियों का समुचित विवरण जानने के लिए प्रयोगगत अभिकल्पनाओं व उनके विश्लेषण सम्बन्धी पुस्तक का अध्ययन करें। सहप्रसरण की सहायता से विश्लेषण विधि का संक्षिप्त विवरण अध्याय (23) में दिया गया है।

उदाहरण 21.5. गेहूँ के 8 जीनोटाइप (genotype) में दृश्य-रूपी स्थिरता (phenotypic stability) की परीक्षा करने के हेतु एक प्रयोग किया गया इस प्रयोग का विन्यास याद्दच्छिकीकृत पूर्ण खण्डक अभिकल्पना में किया गया जिसमें चार पुनरावृत्तियाँ रखी गईं। किन्तु किसी दुर्घटना से इसमें एक प्रेक्षण मान लुप्त हो गया। प्रयोग में शेष प्राप्त मान निम्न सारणी के अनुसार थे —

प्रजातियाँ	पुनरावृत्तियाँ				योग	माध्य
	R_1	R_2	R_3	R_4		
V_1	63·30	74 20	70 10	56 20	268 80	67·20
V_2	84·30	86·95	77 00	$(\hat{X})$	327 06	81·76
V_3	78 90	81 65	70·60	73 15	304·30	76 08
V_4	72·80	85 50	73·15	82·40	313 85	78 46
V_5	76 25	81 40	88·10	71 00	316 75	79 19
V_6	84 00	76 60	66·55	77·85	305 00	76 35
V_7	69 20	60 50	66 40	56 30	252 40	63 10
V_8	81·20	72 85	81·80	82 20	318 05	79 51
योग	614 95	619 65	593·70	499 10 (577 91)	2327 40 (2406 21)	
माध्य	76·87	77 46	74·21	62·39		

$\hat{X}$–अप्राप्त मान (कोष्ठकों में मान, आकलित मान रखने पर प्राप्त मान हैं)
(21·17) से अप्राप्त मान का आकलित मान,

$$\hat{X} = \frac{8 \times 248{\cdot}25 + 4 \times 499{\cdot}10 - 2327{\cdot}40}{(4-1)(8-1)}$$

$$= \frac{1655{\cdot}00}{21}$$

$$= 78{\cdot}81$$

$\hat{X}$ के मान को अप्राप्त मान के स्थान पर रखने पर,

V_2 का योग $= 327{\cdot}06$

$$\text{सं० का०} = \frac{(2406{\cdot}21)^2}{32}$$

$$= 180932{\cdot}70$$

$$\text{खण्डक व० यो०} = \tfrac{1}{8}\,(614{\cdot}95^2 + 619{\cdot}65^2 + 593{\cdot}70^2 + 577{\cdot}91^2) - \text{सं० का०}$$

$$= 181073{\cdot}65 - 180932{\cdot}70$$

$$= 140{\cdot}95$$

$$\text{प्रजाति व० यो०} = \tfrac{1}{4}\,(268{\cdot}80^2 + \ldots + 318{\cdot}05^2) - \text{सं० का०}$$

$$= 182134{\cdot}78 - 180932{\cdot}70$$

$$= 1202{\cdot}08$$

प्रजाति वर्ग योग के लिए सूत्र (21.18.1) की सहायता से संशोधन राशि,

$$C_{77} = \frac{(499{\cdot}10 - 7 \times 78{\cdot}81)^2}{8 \times 7} = \frac{(52{\cdot}57)^2}{56}$$

$$= 49{\cdot}33$$

अतः प्रजातियों का शुद्ध व० यो० $= 1202{\cdot}08 - 49{\cdot}35$

$$= 1152{\cdot}73$$

$$\text{पूर्ण व० यो०} = (68{\cdot}30^2 + 84{\cdot}30^2 + \ldots + 56{\cdot}30^2 + 82{\cdot}20^2) - \text{सं० का०}$$

$$= 183059{\cdot}68 - 180932{\cdot}70$$

$$= 2126{\cdot}98$$

$$\text{त्रुटि व० यो०} = 2126{\cdot}98 - 140{\cdot}95 - 1152{\cdot}73$$

$$= 833{\cdot}30$$

प्रसरण विश्लेषण सारणी

विचरण स्रोत	स्व० मा०	व० य०	मा० व० य०	F-मान
खण्ड	3	140 95	46 98	1·13
प्रजातियाँ	7	1152 73	164 68	3 95
प्रयोग त्रुटि	20	833 30	41·65	
पूर्ण	30	2126 98		

प्रजातियों के लिए F का परिकलित मान, $\alpha = 05$ और (7, 20) स्व० मा० के लिए F के सारणी (परि० प–5 2) मान द्वारा प्राप्त मान 2 52 से अधिक है। अतः इससे सिद्ध होता है कि प्रजातियों में सार्थक अन्तर है। किन्हीं भी दो प्रजाति माध्यों में अन्तर की त्रुटि,

जिनके लिए अप्राप्त मान नहीं है

$$S_E = \sqrt{\frac{2 \times 41{\cdot}65}{4}}$$

$$= 4\ 56$$

प्रजाति V_2 तथा अन्य किसी प्रजाति के माध्यों में अन्तर की मानक त्रुटि सूत्र (21.19) के द्वारा निम्न है —

$$S_E' = \sqrt{41{\cdot}65\left(\frac{2}{4} + \frac{8}{4 \times 3 \times 7}\right)}$$

$$= \sqrt{41\ 65 \times 6}$$

$$= \sqrt{24\ 99}$$

$$= 5\ 0$$

अत S_E व S_E' का प्रयोग करके युगल प्रजाति माध्यों में अन्तर की सार्थकता परीक्षा न्यूनतम सार्थक अन्तर विधि द्वारा या डंकन बहुपरास परीक्षा द्वारा कर सकते हैं। जिन युगल माध्यों में V_2 की किसी अन्य प्रजाति से परीक्षा करनी हो तो S_E' का प्रयोग करना चाहिए अन्यथा S_E का प्रयोग करना चाहिए। यहाँ माध्यों में परीक्षा करके नहीं दिखाई गई है क्योंकि पाठक पहले दी हुई विधि द्वारा परीक्षा स्वयं सुगमता से कर सकते हैं।

लैटिन-वर्ग अभिकल्पना की स्थिति में प्रसरण विश्लेषण

यह द्विप्रतिबन्धी अभिकल्पना है अर्थात् इसमें अनुसंधानकर्त्ता प्रयोगगत एककों पर दो प्रकार के प्रतिबन्धों को लेकर खण्डक बनाता है। ये खण्डक एक लक्षण के अनुसार पंक्ति की ओर और दूसरे लक्षण के अनुसार स्तम्भ की ओर सजातीय होते हैं। प्रत्येक पंक्ति व

स्तम्भ एक पूर्ण खण्डक (पुनरावृत्ति) होता है। इस प्रयोग अभिकल्पना में प्रत्येक उपचार हर एक पंक्ति व हर एक स्तम्भ में एक ही बार आता है अर्थात् प्रत्येक पंक्ति व स्तम्भ एक पूर्ण पुनरावृत्ति है। इस प्रकार यहाँ उपचारों पर, स्तम्भ व पंक्ति की ओर लिये गए लक्षणों में पड़ने वाले प्रभाव का नियन्त्रण हो जाता है। साथ ही इन लक्षणों में अन्तर के प्रति परिकल्पनाओं की भी परीक्षा कर ली जाती है। लैटिन-वर्ग अभिकल्पना में पंक्तियों, स्तम्भों व उपचारों की संख्या सदैव समान होती है। यदि यह संख्या r है तो इस लैटिन-वर्ग को (r×r) क्रम का कहते हैं। इस अभिकल्पना को कृषि, जैव विज्ञान व प्रौद्योगिक प्रयोगों के लिए प्रायः उपयुक्त समझा जाता है। जैसे —

यदि किसी कृषि में दो दिशाओं में उर्वरता परिवर्तित होती हो तो इस क्षेत्र को इन दिशाओं के अनुसार लाक्षिक पंक्ति व स्तम्भ खण्डकों में विभाजित कर दिया जाता है और फिर प्रत्येक खण्डक को उपचारों की संख्या के समान भूखण्डों में विभाजित कर देते हैं और प्रत्येक भूखण्ड को नियमानुसार एक उपचार निर्दिष्ट कर दिया जाता है।

इसी प्रकार यदि जैव प्रयोग में यदि कुछ भोज्यों (feeds) का गायों के दूध उत्पादन पर प्रभाव देखना है तो इन बातों की ओर ध्यान देना आवश्यक है। गाय की दूध उत्पादन-क्षमता उसकी नस्ल व स्तन्यस्रवण (lactation) पर अधिक निर्भर करती है। अतः भोज्यों का प्रभाव जानने के लिए यह आवश्यक है कि इन दो कारकों को नियन्त्रित किया जाये। इसके लिए एक ही नस्ल की गाय एक खण्डक में पंक्ति की ओर व एक ही स्तन्यस्रवण की गाय एक खण्डक में स्तम्भ की ओर ले ली जाती है। प्रत्येक खण्डक में पंक्ति की ओर अलग-अलग नस्ल की गाय व स्तम्भ की ओर अलग-अलग स्तन्यस्रवण की गाय ली जाती हैं। इस प्रकार यहाँ दूध के उत्पादन सम्बन्धी भोज्यों में अन्तर, नस्लों में अन्तर व स्तन्यस्रवणों में अन्तर के प्रति परिकल्पनाओं की परीक्षा इस प्रयोग में प्राप्त न्यादर्श के प्रसरण विश्लेषण के द्वारा निम्न प्रकार कर सकते हैं। लैटिन-वर्ग विन्यास-क्रम निम्न प्रकार के होते हैं :—

(4×4) क्रम के लैटिन-वर्ग का विन्यास निम्न प्रकार का होता है —

	स्तम्भ			
पंक्ति	B	C	D	A
	D	A	B	C
	C	D	A	B
	A	B	C	D

(5×5) क्रम के लैटिन-वर्ग का विन्यास इस प्रकार का होता है :—

	स्तम्भ				
	A	B	C	D	E
	C	D	E	A	B
पंक्ति	D	E	A	B	C
	B	C	D	E	A
	E	A	B	C	D

आदि

एक प्रेक्षण प्रति प्रयोगगत एकक की स्थिति मे $(r \times r)$ क्रम के लैटिन-वर्ग के लिए एक घात सांख्यिकीय प्रतिरूप निम्न होता है :—

$$X_{ijl} = \mu + T_i + \beta_j + \rho_l + e_{ijl} \qquad \text{....(21.20)}$$

जहाँ $i, j, l = 1, 2, 3, \ldots, r$

प्रतिरूप (21.20) मे ρ_l, l वीं पंक्ति के प्रभाव को निरूपित करता है ।

μ, τ_i, β_j व e_{ijl} क्रमशः समग्र माध्य, i वें उपचार के प्रभाव, j वें स्तम्भ के प्रभाव व प्रति एकक त्रुटि को निरूपित करते हैं । प्रत्येक e_{ijl} स्वतन्त्र हैं और $N(0, \sigma_e^2)$ बंटित है ।

स्थिर प्रभाव प्रतिरूप (प्रतिरूप I) की स्थिति में,

$$\sum_i \tau_i = \sum_j \beta_j = \sum_l \rho_l = 0, \quad E(\tau_i) = \tau_i\,;\ E(\beta_j) = \beta_j;\ E(\rho_l) = \rho_l$$

लैटिन-वर्ग अभिकल्पना के लिए प्रसरण विश्लेषण सारणी मे यादृच्छिकीकृत ब्लाक अभिकल्पना की अपेक्षा एक विचरण स्रोत और बढ़ जाता है अन्यथा पूर्ण विधि लगभग वही रहती है ।

माना कि लैटिन-वर्ग मे प्रेक्षणो के लिए l वीं पंक्ति का योग R_l, j वें स्तम्भ का योग C_j, i वें उपचार का योग T_i और कुल प्रेक्षणो का योग G है तो $(r \times r)$ क्रम के लैटिन-वर्ग के लिए व्यापक प्रसरण-विश्लेषण सारणी (21.11) है ।

$$\text{जबकि} \quad \sum_l \frac{\rho_l^2}{r-1} = \sigma_\rho^2;\ \sum_j \frac{\beta_j^2}{r-1} = \sigma_\beta^2;\ \sum_i \frac{T_i^2}{r-1} = \sigma_T^2$$

अतः पंक्ति, स्तम्भ व उपचार के प्रत्याशित मा० व० य० को क्रमशः

$$(\sigma_e^2 + r\,\sigma_\rho^2),\ (\sigma_e^2 + r\,\sigma_\beta^2) \text{ व } (\sigma_e^2 + r\,\sigma_T^2)$$

के रूप में लिख सकते हैं ।

उदाहरण 21.6 : जई (Oats) की चार प्रजातियो की तुलना के हेतु भूमि के क्षेत्र को 16 भूखण्डों में विभाजित करके 4×4 लैटिन-वर्ग अभिकल्पना का प्रयोग किया गया जिससे मिट्टी की उर्वरता का पता चल सके । भूखण्डको की उपज पौंडो मे निम्न पायी गई जबकि अक्षर A, B, C, D प्रजातियो को प्रदर्शित करते हैं । प्रजातियो के प्रभाव मे समानता के प्रति परिकल्पना की परीक्षा कीजिए । क्या लैटिन-वर्ग का प्रयोग करना उपयुक्त है ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए ।

(सारणी 21.11) $(r \times r)$ लैटिन-वर्ग के लिए प्रसरण विश्लेषण सारणी

विचरण स्रोत	स्व० को०	व० य०	मा० व० य०	F-मान	प्रत्याशित मा० व० य०
पंक्ति	$(r-1)$	$\frac{1}{r}\sum_{l} R_l^2 - \frac{G^2}{r^2} = R_{rr}$	$\frac{R_{rr}}{r-1} = R$	$\frac{R}{s_e^2}$	$\sigma_e^2 + \frac{r}{r-1}\sum_{l} \rho_l^2$
स्तम्भ	$(r-1)$	$\frac{1}{r}\sum_{j} C_j^2 - \frac{G^2}{r^2} = C_{rr}$	$\frac{C_{rr}}{r-1} = C$	$\frac{C}{s_e^2}$	$\sigma_e^2 + \frac{r}{r-1}\sum_{j} \beta_j^2$
उपचार	$(r-1)$	$\frac{1}{r}\sum_{i} T_i^2 - \frac{G^2}{r^2} = S_{rr}$	$\frac{S_{rr}}{(r-1)} = S$	$\frac{S}{s_e^2}$	$\sigma_e^2 + \frac{r}{r-1}\sum_{i} T_i^2$
प्रयोग त्रुटि	$(r-1)(r-2)$	अन्तर द्वारा $= E_{rr}$	$\frac{E_{rr}}{(r-1)(r-2)} = s_e^2$		σ_e^2
पूर्ण	(r^2-1)	$\sum_{i}\sum_{j}\sum_{l} X_{ijl}^2 - \frac{G^2}{r^2}$			

					योग
	C	D	B	A	
	47	40	50	57	194
	B	A	C	D	
	49	53	37	29	168
	D	C	A	B	
	28	34	46	37	145
	A	B	D	C	
	48	44	25	30	147
योग	172	171	158	153	654

(आई० सी०ए० आर०, 1966)

प्रजातियों के प्रभाव में अन्तर तथा लैटिन वर्ग की उपयुक्तता की परीक्षा के लिए प्रसरण विश्लेषण निम्न प्रकार कर सकते हैं —

$$\text{स० का०} = \frac{(654)^2}{16} = 26732.25$$

उपचार योग $A = 204,\ B = 180,\ C = 148,\ D = 122$

$$\text{पंक्ति व० यो०} = \tfrac{1}{4}\,(194^2 + 168^2 + 145^2 + 147^2) - \text{स० का०}$$
$$= 27123.50 - 26732.25$$
$$= 391.25$$

$$\text{स्तम्भ व० यो०} = \tfrac{1}{4}\,(172^2 + 171^2 + 158^2 + 153^2) - \text{स० का०}$$
$$= 26799.50 - 26732.25$$
$$= 67.25$$

$$\text{उपचार व० यो०} = \tfrac{1}{4}\,(204^2 + 180^2 + 148^2 + 122^2) - \text{स० का०}$$
$$= 27701.00 - 26732.25$$
$$= 968.75$$

$$\text{पूर्ण व० यो०} = (47^2 + 49^2 + \ldots + 37^2 + 30^2) - \text{स० का०}$$
$$= 28168.00 - 26732.25$$
$$= 1435.75$$

प्रसरण विश्लेषण सारणी

विचरण स्रोत	स्व. को.	व. यो.	मा. व. यो.	F-मान
पंक्ति	3	391 25	130 42	91 84
स्तम्भ	3	67 25	22 42	15 78
उपचार	3	968 75	322 92	227 40
त्रुटि	6	8·50	1·42	
पूर्ण	15	1435 75		

$\alpha = 01$ और (3,6) स्व० को० के लिए F का सारणी (परि० प-5 2) द्वारा प्राप्त मान 9 78 है। पंक्ति स्तम्भ व उपचार के लिए परिकलित F मान सारणीबद्ध मान से अधिक है अत. इससे यह निष्कर्ष निकलता है कि पंक्तियों में सार्थक अन्तर है और इसी प्रकार स्तम्भों में सार्थक अन्तर है। यह सार्थक अन्तर होने का अभिप्राय है कि मिट्टी की उर्वरता में द्विगुणी विचरण था। अत. लेटिन-वर्ग अभिकल्पना का प्रयोग करने से उपचारों में अन्तर की परीक्षा में परिशुद्धि की वृद्धि हुई है। उपचारों में भी अत्यधिक सार्थक अन्तर है जिसका अभिप्राय है कि मक्का की प्रजातियाँ एक-दूसरे से सार्थक रूप में भिन्न हैं। इन प्रजातियों में से कौनसी प्रजातियाँ एक दूसरे से सार्थक रूप में भिन्न हैं इसकी परीक्षा न्यूनतम सार्थक अन्तर की सहायता से निम्न प्रकार कर सकते हैं। प्रजातियों की माध्य उपज A=51, B=45, C=37, D=30 5

$$\text{न्यू० सा० अ०} = \sqrt{\frac{2s_e^2}{r}}\; t\,(05)(6)$$

$$= \sqrt{\frac{2\times 8\,5}{4}} \times 2\,447$$

$$= \sqrt{4\,25} \times 2\,447$$

$$= 2\,06 \times 2{\cdot}447$$

$$= 5\,04$$

A	B	C	D
51	45	37	30 5

किन्हीं दो प्रजातियों की माध्य उपज में अन्तर न्यू० सा० अ० से अधिक है अत सब प्रजातियाँ सार्थक रूप में एक-दूसरे से भिन्न हैं।

एक अप्राप्त मान

यदि लैटिन-वर्ग अभिकल्पना की स्थिति में प्रयोग करते समय किसी कारण से एक

प्रेक्षण मान लुप्त हो गया हो तो इसका आकलन करना होता है। इस आकलित मान को अप्राप्त प्रेक्षण के स्थान पर प्रतिस्थापित करके सामान्य रूप मे प्रसरण विश्लेषण कर लिया जाता है। इस विश्लेषण सारणी मे केवल इतना परिवर्तन करना होता है कि पूर्ण स्वतन्त्र कोटि को एक कम कर दिया जाता है जिसके परिणामस्वरूप प्रयोग त्रुटि की भी स्वतन्त्रता कोटि एक कम हो जाती है। अप्राप्त मान का आकलन निम्न सूत्र द्वारा किया जा सकता है :

$$X = \frac{r\,(R'+C'+T') - 2G'}{(r-1)\,(r-2)} \qquad \text{....(21 21)}$$

जबकि सूत्र (21.21) मे R' व C' क्रमश उस पंक्ति व स्तम्भ मे प्रेक्षणो का योग है जिसमे अप्राप्त मान घटित होता है, T' उस उपचार के लिए प्रेक्षणो का योग है जिसका मान अप्राप्त है। G' कुल विद्यमान प्रेक्षणो का योग है। जैसेकि यादृच्छिकीकृत पूर्ण खण्डक प्रभिकल्पना में अप्राप्त मान का आकलित मान प्रतिस्थापित करने के पश्चात् परिकलित उपचार वर्ग योग मे संशोधन करना होता है वैसे ही लैटिन-वर्ग प्रभिकल्पना की स्थिति मे संशोधन राशि निम्न होती है —

$$C_{TT} = \left\{ \frac{(r-1)\,T'+R'+C'-G'}{(r-1)\,(r-2)} \right\}^2 \qquad \text{....(21.22)}$$

राशि C_{TT} को परिकलित उपचार वर्ग योग मे से घटाकर शुद्ध उपचार वर्ग योग ज्ञात हो जाता है।

अप्राप्त मान वाले उपचार माध्य और अन्य किसी उपचार माध्य मे अन्तर की मानक त्रुटि निम्न होती है .—

$$SE' = \sqrt{s_e^2 \left\{ \frac{2}{r} + \frac{1}{(r-1)(r-2)} \right\}} \qquad \text{....(21.23)}$$

उदाहरण 21.7 : एक (4×4) लैटिन वर्ग प्रभिकल्पना का विन्यास तथा उपचारो के तदनुसार गेहूँ की उपज (क्विटल प्रति हैक्टर) निम्न प्रकार थी। अक्षर A, B, C, D, उपचारों को, स्तम्भ गेहूँ की किस्मो को और पंक्तियाँ खादो को प्रदर्शित करती हैं। प्रति भूखण्ड की उपज लेते समय, एक भूखण्ड की उपज लिखने से रह गई।

	स्तम्भ				योग
	A–42	B–38	C–50	D–46	176
	C–46	D–42	A–42	B–42	172
पंक्ति	D–46	C–*	B–42	A–46	134
	B–38	A–54	D–38	C–46	176
योग	172	134	172	180	658

एक अप्राप्त मान का आकलन एवं न्यास का प्रसरण विश्लेषण निम्न प्रकार कर सकते हैं :—

$$C' = 46 + 50 + 46$$
$$C' = 142$$

सूत्र (21 21) के द्वारा अप्राप्त मान का आकलित मान,

$$\hat{X} = \frac{4(134+134+142) - 2 \times 658}{(4-1)(4-2)}$$

$$\hat{X} = \frac{1640 - 1316}{6}$$

$$= \frac{324}{6} = 54$$

इस मान को अप्राप्त मान के स्थान पर रखने पर निम्न प्रेक्षण सारणी प्राप्त हो जाती है —

				योग
A – 42	B–38	C–50	D–46	176
C – 46	D–42	A–42	B–42	172
D – 46	(C – 54)	B–42	A–46	188
B – 38	A–54	D–38	C–46	176
172	188	172	180	712

उपचार वर्ग योग के लिए संशोधन राशि, सूत्र (21 22) के अनुसार निम्न है —

$$C_{TT} = \left\{ \frac{3 \times 142 + 134 + 134 - 658}{3 \times 2} \right\}^2$$

$$= 36\ 00$$

उपचार-योग,

A = 184, B = 160, C = 196, D = 172

$$\text{स० का०} = \frac{(712)^2}{16} = 31684\ 00$$

$$\text{स्तम्भ व०यो०} = \tfrac{1}{4}\ (172^2 + 188^2 + 172^2 + 180^2) - \text{सं० का०} =$$
$$31728\ 00 - 31684{\cdot}00 = 44\ 00$$

पंक्ति व०य०$=\frac{1}{4}(176^2+712^2+188^2+176^2)$ – स० का०
$=3172000-3168400$
$=3600$

उपचार व०य०$=3186400-3168400$
$=18000$

संशोधित उपचार व० य०$=18000-3600=14400$

पूर्ण व० य०$=(42^2+46^2+....+46^2+46^2)$ – स० का०
$=3206400-3168400$
$=38000$

अतः प्रसरण विश्लेषण सारणी निम्न है :—

विचरण स्रोत	स्व० को०	व० य०	मा० व० य०	F–मान
पंक्ति	3	36 00	12·00	
स्तम्भ	3	44 00	14 67	
उपचार	3	180 00	60 00	2.50
		(144 00)	(48 00)	(2 00)
त्रुटि	5	120 00	24 00	
पूर्ण	14	380 00		

टिप्पणी उपर्युक्त सारणी मे संशोधित उपचार व० य०, मा० व० य० व F–मान कोष्ठकों में दिखाये गये हैं। $\alpha=05$ तथा (3,5) स्व० को० के लिए F का सारणीबद्ध मान 5 41 पंक्ति, स्तम्भ तथा उपचार तीनों के लिए परिकलित F–मान, सारणीबद्ध F–मान से कम है अतः इससे यह निष्कर्ष निकलता है कि विभिन्न उपचारो के प्रति समानता की परिकल्पना को स्वीकार कर लिया जाता है।

उपचार माध्यों मे अन्तर निरर्थक होने के कारण इनके युगल माध्यों में अन्तर की सार्थकता की परीक्षा करने की आवश्यकता नही है।

ग्रीसीय-लैटिन वर्ग अभिकल्पना की स्थिति में प्रसरण-विश्लेषण

यह लैटिन-वर्ग अभिकल्पना का उन्नत रूप है जिसमें कि प्रयोगगत एककों में विद्यमान एक और विचरण स्रोत को नियन्त्रित करते हैं क्योंकि प्रारम्भ में इस अभिकल्पना की रचना ग्रीक व लैटिन अक्षरो को प्रयोग करके की गई थी। इसी कारण इसका नाम ग्रीकीय-लैटिन-वर्ग अभिकल्पना पड़ा। इस अभिकल्पना व विन्यास की विशेषता यह है कि प्रत्येक ग्रीक व लैटिन अक्षर प्रत्येक पंक्ति व प्रत्येक स्तम्भ मे केवल एक बार आता है और इसके अतिरिक्त प्रत्येक लैटिन अक्षर, ग्रीक अक्षर के साथ एक बार ही आता है। इस प्रकार

प्रसरण विश्लेषण सारणी में पंक्ति, स्तम्भ व लैटिन अक्षरों (उपचारों) के अतिरिक्त ग्रीक अक्षरों, जो कि एक कारक को निरूपित करते हैं, के कारण विचरण और बढ़ जाता है। प्रसरण विश्लेषण सामान्य रूप में ही होता है। इस प्रकार की अभिकल्पना का प्रारूप निम्न प्रकार का होता है।

(5×5)		क्रम का ग्रीकोय लैटिन-वर्ग		
A_α	B_β	C_γ	D_δ	E_θ
C_θ	D_α	E_β	A_γ	B_δ
D_β	E_γ	A_δ	B_θ	C_α
E_δ	A_θ	B_α	C_β	D_γ
B_γ	C_δ	D_θ	E_α	A_β

टिप्पणी (1) अन्य किसी भी क्रम का ग्रीकोय-लैटिन वर्ग की रचना इसी प्रकार की होती है।

(2) (5 × 5) क्रम का केवल एक ही ग्रीकोय वर्ग सम्भव नहीं है। तथापि अन्य वर्गों की रचना परस्पर लांबिक लैटिन वर्गों (Mutually Orthogonal Latin Square) की सहायता से की जा सकती है। इसका वर्णन जानने के लिए पुस्तक 'The Design and Analysis of Experiments' by Kempthorne O को पढ़िये।

(3) इस अभिकल्पना में लैटिन अक्षर या ग्रीक अक्षर में से किसी को भी उपचार मान सकते हैं।

जब कि L_m, m वें ग्रीक अक्षर के लिए प्राप्त प्रेक्षणों का योग है। अन्य सभी संकेत लैटिन वर्ग अभिकल्पना के अनुरूप है। $\sigma_\rho^2, \sigma_B^2, \sigma_L^2, \sigma_T^2$ क्रमशः पंक्ति, स्तम्भ ग्रीक अक्षर व उपचारों के लिए प्रायिक माध्य वर्ग योग है। ग्रीकोय-लैटिन वर्ग के प्रसरण-विश्लेषण में यह बात ध्यान देने के योग्य है कि प्रयोग त्रुटि की स्वातन्त्र्य-संख्या $(r-1)(r-3)$ के समान है। अतः (5×5) व अन्य क्रम के वर्गों की स्थिति में त्रुटि की स्वातन्त्र्य संख्या पर्याप्त रहती है।

बहु-उपादानीय प्रयोगों का प्रसरण विश्लेषण

यदि एक प्रयोग में नाइट्रोजन व फास्फोरस खादों की विभिन्न मात्राओं का एक दूसरे सहित प्रभाव गेहूँ की उपज पर देखना हो तो बहु-उपादानीय प्रयोग अत्यन्त उपयुक्त है। इसी प्रकार किसी अन्य प्रयोग में दो या दो से अधिक कारकों के प्रभाव तथा एक की

सारणी 21.12 $(r \times r)$ क्रम के ग्रीसीय-लैटिन वर्ग की स्थिति में प्रसरण विश्लेषण सारणी

विचरण स्रोत	स्व० को०	व० यो०	मा० व० यो०	F-मान	प्रत्याशित मा० व० यो०
पंक्ति	$(r-1)$	$\sum_{i} R_i^2 - \frac{G^2}{r^2} = R_{rr}$	$\frac{R_{rr}}{r-1} = R$	R/E	$\sigma_e^2 + r\sigma_\rho^2$
स्तम्भ	$(r-1)$	$\sum_{j} C_j^2 - \frac{G^2}{r^2} = C_{rr}$	$\frac{C_{rr}}{r-1} = C$	C/E	$\sigma_e^2 + r\sigma_\beta^2$
ग्रीक-प्रकार	$(r-1)$	$\sum_{m} L_m^2 - \frac{G^2}{r^2} = L_{rr}$	$\frac{L_{rr}}{r-1} = L$	L/E	$\sigma_e^2 + r\sigma_L^2$
लैटिन-प्रकार	$(r-1)$	$\sum_{l} T_l^2 - \frac{G^2}{r^2} = T_{rr}$	$\frac{T_{rr}}{r-1} = T$	T/E	$\sigma_e^2 + r\sigma_T^2$
प्रयोग त्रुटि	$(r-1)(r-3)$	अन्तर द्वारा $= E_{rr}$	$\frac{E_{rr}}{(r-1)(r-3)} = E$		σ_e^2
पूर्ण	r^2-1	$\sum_{i,j,l,m} X^2_{ijlm} - \frac{G^2}{r^2}$			

उपस्थिति में अन्य के प्रभाव में परिवर्तन जानने के लिए बहु-उपादानीय प्रयोग अत्यन्त उपयोगी हैं।

एक उपचारों का समूह जो कि दो या दो से अधिक उपचार और प्रत्येक उपचार के दो या दो से अधिक स्तरों (levels) के संचयों (combinations) को निरूपित करता है उसे बहु-उपादानीय विन्यास (factorial arrangement) कहते हैं। इन संचयों को उपचारों के रूप में उपयोग किया जाता है। इन्हें किसी भी अभिकल्पना जैसे याद्दृच्छिकीकृत पूर्ण खण्डक अभिकल्पना, लैटिन वर्ग अभिकल्पना या अन्य किसी अभिकल्पना में उपचारों के स्थान पर प्रयोग किया जाता है।

बहु-उपादानीय प्रयोग अत्यन्त उपयोगी हैं क्योंकि इसमें अनेक कारकों (factors) के प्रभाव एक साथ ही ज्ञात किये जा सकते हैं। बहु-उपादानीय प्रयोगों में उपचारों तथा प्रयोग परिस्थितियों के सब सम्भव संचयों को प्रयोग करके, उपचारों के मुख्य प्रभावों (main effects) एवं एक-दूसरे से परस्पर-क्रिया प्रभावों (interaction effects) का आकलन एक साथ ही किया जा सकता है।

इन प्रयोगों में मुख्य प्रभाव (main effect) से अभिप्राय किसी उपचार के एक स्तर पर इसके अन्य स्तर या स्तरों की अपेक्षा माध्य प्रभाव के समान होता है जबकि अन्य कारकों या उपचारों का स्तर स्थिर हो।

किन्हीं दो कारकों (उपचारों) में परस्परक्रिया (interaction) किसी एक कारक के विभिन्न स्तरों द्वारा किसी अन्य कारक के भिन्न स्तरों की उपस्थिति में एक-सा प्रभाव प्रदर्शित करने की असफलता का प्रतीक है अर्थात् किसी एक कारक के विभिन्न स्तरों का प्रभाव (प्रभावी क्षमता) किसी अन्य कारक के विभिन्न स्तरों के कारण परिवर्तित हो जाता है। अतः कारकों में इस परिवर्ती प्रभाव को परस्परक्रिया कहते हैं।

उपादानीय प्रयोग अन्वेषणों के हेतु अत्यधिक उपयोगी सिद्ध हुए हैं क्योंकि इन प्रयोगों की सहायता से यह पता लगाया जाता है कि किन उपचारों के मुख्य प्रभाव सार्थक हैं और किन उपचारों में परस्परक्रिया है या नहीं है। यदि उपचारों में परस्पर-क्रिया है तो यह कारकों का कौन-सा संचय है कि जिसके द्वारा सर्वोत्तम परिणाम प्राप्त होते हैं। जैसे खाद सम्बन्धी प्रयोगों में यह ज्ञात करना हो कि नाइट्रोजन (N), फास्फोरस (P) व पोटाश (K) की कितनी-कितनी मात्रा खेत में लगाई जाये कि सबसे अधिक उपज हो। यह सर्वोत्तम संचय उन्हीं स्तरों के परास में होता है जिनमें उपचारों या कारकों की परीक्षा की गई है।

पशु सम्बन्धी प्रयोगों में उनको भोजन खाने की विधि लिंग या नस्ल आदि में परस्पर-क्रिया को जाना जा सकता है। इसी प्रकार खाद्य प्रयोगों में प्रोटीन व कार्बोहाइड्रेट (Proteins and Carbohydrates) के स्तरों में परस्पर-क्रिया व शिक्षा सम्बन्धी प्रयोगों में अध्यापन विधियों व विद्यार्थियों की आयु में परस्पर-क्रिया आदि के विषय में जानकारी प्राप्त करने में बहु-उपादानीय प्रयोग सहायक हैं।

किसी प्रयोग में यदि n कारक (उपचार) लिये गये हैं और प्रत्येक कारक के p स्तर हैं तो इसे p^n बहु-उपादानीय प्रयोग कहते हैं। यदि प्रत्येक कारक के स्तर क्रमशः

p, q, r.... हो तो इसे $p \times q \times r \times ....$ बहु-उपादानीय प्रयोग कहते हैं। इन प्रयोगों का प्रसरण विश्लेपण देने से पूर्व अंकन-पद्धति (notations) तथा मुख्य प्रभाव व परस्पर-क्रिया प्रभाव वैषम्य (contrast) के रूप में प्रदर्शित करने के विषय में बताना आवश्यक प्रतीत होता है।

किसी कारक के प्रभाव बड़े अक्षरों A, B, C, ... द्वारा और कारकों को छोटे अक्षरों a, b, c, ... आदि में क्रमश निरूपित करते हैं। इन अक्षरों के अनुलग्न कारकों के स्तर को प्रदर्शित करते हैं जैसे $A_i, B_j, C_k, ...$ या $a_i, b_j, c_k, ...$ आदि। इन बड़े अक्षरों का गुणन AB या ABC दो कारकों या तीन कारकों की परस्पर-क्रिया को निरूपित करता है। इन्हें क्रमश: प्रथम व द्वितीय क्रम की परस्परक्रिया कहते हैं। संचय $a_i b_j c_k$, a के i वें, b के j वें तथा c के k वें स्तर के संचय को निरूपित करता है। इस संचय को सुगमता की दृष्टि से ijk के द्वारा भी प्रदर्शित कर सकते हैं। इस स्थिति में यह स्वयं मान लिया जाता है कि संचय-अनुलग्न क्रमश a, b व c से संलग्न है।

किसी प्रयोग में मुख्य प्रभाव व परस्परक्रिया प्रभाव ज्ञात करने तथा उनकी सार्थकता-परीक्षा करने के हेतु वैषम्य (contrasts) अत्यन्त उपयोगी है। अत इनका जानना हितकर है। यदि किसी प्रयोग में k उपचार लिये गये हैं और प्रत्येक उपचार की समान पुनरावृत्ति संख्या 'r' है तो कोई भी रैखिक फलन,

$$Z_p = l_{p1} T_1 + l_{p2} T_2 + ... + l_{pk} T_k \qquad ....(21.24)$$

एक वैषम्य कहलाता है यदि,

$$l_{p1} + l_{p2} + ... l_{pk} = 0$$

अर्थात्,

$$\sum_{i=1}^{k} l_{pi} = 0$$

हो। वैषम्य Z_p के कारण वर्ग योग, जो कि उपचार वर्ग योग का एक अवयव है, निम्न होता है:—

$$\frac{Z_p^2}{r(l_{p1}^2 + l_{p2}^2 + ... + l_{pk}^2)} \qquad ....(21\ 25)$$

प्रत्येक वैषम्य की स्व० को० 1 होती है।

माना कि Z_q कोई अन्य वैषम्य है तो,

$$Z_q = l_{q1} T_1 + l_{q2} T_2 + ... + l_{qk} T_k$$

जबकि $\quad \sum_i l_{qi} = 0$

Z_p व Z_q लम्बकोणीय कहलाते हैं यदि,

$$l_{p1} l_{q1} + l_{p2} l_{q2} + \quad + l_{pk} l_{qk} = 0 \qquad (21.26)$$

अर्थात् $\sum_{i=1}^{k} l_{pi}\, l_{qi}=0$

इन लम्बकोणीय वैपम्यों की अधिकतम संख्या $(k-1)$ हो सकती है।

जैसे यदि T_1, T_2, T_3 तीन उपचार हैं और प्रत्येक की 3 पुनरावृत्ति संख्या है। माना कि इनके द्वारा कुल प्रेक्षण मान, $T_1=40$ $T_2=15$ व $T_3=20$ है तो दो लम्बकोणीय वैपम्य निम्न हो सकते हैं —

$Z_1=T_1-2\ T_2+T_3$, यहाँ $Z_1=40-2\times 15+20$

$Z_2=T_1-T_3$ और $Z_2=40-20$

और इनके द्वारा सघटक वर्ग योग है,

$$S^2_1=\frac{(40-2\times 15+20)^2}{3(1+4+1)}=\frac{30\times 30}{3\times 6}$$

$$=50.00$$

$$S^2_2=\frac{(40-20)^2}{3(1+1)}=\frac{20\times 20}{6}=66.67$$

इसी प्रकार यदि प्रत्येक उपचार की पुनरावृत्ति-संख्या समान न होकर, भिन्न हो तो, वैपम्य को निम्न प्रकार दिया जा सकता है। इस स्थिति में k उपचारों का रैखिक फलन, जबकि उपचार T_i की पुनरावृत्ति संख्या r_i $(i=1, 2, 3, ...r)$ है

$$Z_p=l_{p1}T_1+l_{p2}T_2+....+l_{pk}T_k \qquad ....(21.27)$$

वैपम्य कहलाता है यदि,

$$r_1\, l_{p1}+r_2\, l_{p2}+....+r_k\, l_{pk}=0$$

या $\sum_i r_i\, l_{pi}=0$

और इस वैपम्य के कारण सघटक वर्ग योग,

$$=\frac{Z_p^2}{(r_1\, l^2_{p1}+r_2\, l^2_{p2}+....+r_k\, l^2_{pk})} \qquad ....(21.28)$$

माना Z_q कोई अन्य वैपम्य है जहाँ

$$Z_q=l_{q1}T_1+l_{q2}T_2+...+l_{qk}T_k \qquad ....(21.29)$$

Z_p और Z_q लम्बकोणीय कहलाते हैं यदि

$$r_1\, l_{p1}\, l_{q1}+r_2\, l_{p2}\, l_{q2}+...+r_k\, l_{pk}\, l_{qk}=0 \qquad ....(21.30)$$

वैषम्य के विषय में उपर्युक्त जानकारी की सहायता से मुख्य प्रभावों तथा परस्पर-क्रियाओं को वैषम्यों के रूप में निम्न प्रकार दे सकते है :—

माना एक 2^2 प्रयोग को किया गया है जिसका अभिप्राय है कि प्रयोग में दो कारक (A और B) हैं और दोनो कारकों के दो स्तर हैं जो कि माना 0,1 हैं। इस प्रकार कारकों के चार संचय a_1b_1, a_1b_0, a_0b_1 व a_0b_0 सम्भव हैं। मुख्य प्रभाव A और B तथा परस्परक्रिया AB को निम्न रूप मे दिया जा सकता है —

$$A=(a-1)(b+1)=(a_1-a_0)(b_1+b_0)$$
$$=ab-b+a-1\equiv a_1b_1-a_0b_1+a_1b_0-a_0b_0$$
$$=b(a-1)+1(a-1)=(a_1-a_0)b_1+(a_1-a_0)b_0$$

अर्थात् $ab=a_1b_1,\ b=a_0b_1,\ a=a_1b_0,\ 1=a_0b_0$

वैषम्य A को देखने से पता चलता है कि यह a के 1 स्तर का, a के 0 स्तर की अपेक्षा प्रभाव बताता है जबकि b का स्तर a के दोनों स्तरों के लिए समान रहता है।

उपचार A का माध्य प्रभाव $=\dfrac{1}{2r}\ (a_1b_1-a_0b_1+a_1b_0-a_0b_0)$

जब कि r पुनरावृत्ति–संख्या है।

इसी प्रकार $B=(a+1)\ (b-1)=(a_1+a_0)(b_1-b_0)$
$$=ab-a+b-1=(a_1b_1-a_1b_0+a_0b_1-a_0b_0)$$
$$=(b-1)a+(b-1)1=(b_1-b_0)a_1+(b_1-b_0)a_0$$

पहले की भांति B का माध्य प्रभाव वैषम्य के मान का $2r$ से भाग देने पर ज्ञात हो जाता है।

परस्परक्रिया AB के लिए वैषम्य निम्न होता है —

$$AB=(a-1)(b-1)=(a_1-a_0)(b_1-b_0)$$
$$=ab-a-b+1=a_1b_1-a_1\,b_0-a_0\,b_1+a_0b_0$$
$$=(b-1)\ a-1\ (b-1)=(b_1-b_0)a_1-(b_1-b_0)a_0$$

AB का माध्य प्रभाव, वैषम्य के मान को 2r से भाग देने पर प्राप्त हो जाता है।

(2) इसी प्रकार 2^n प्रयोग के किसी भी मुख्य प्रभाव या परस्परक्रिया प्रभाव ज्ञात करने के लिए वैषम्य बना सकते हैं। वैषम्य का मान संचयों के प्रेक्षित मान वैषम्य मे रखकर ज्ञात करते हैं जिसे कि $2^{n-1}r$ से भाग देने पर माध्य मान ज्ञात हो जाता है। किसी भी मुख्य प्रभाव या परस्परक्रिया प्रभाव के कारण वर्ग योग वैषम्य मान के वर्ग को $2^n r$ से भाग देने पर ज्ञात हो जाता है। इन माध्य प्रभावों तथा वर्ग योगों को बिना वैषम्य के भी ज्ञात कर सकते है जिनका वर्णन बाद में दिया गया है।

सांख्यिकीय प्रतिरूप

यदि प्रयोग मे दो कारक A व B लिए गये हैं, जिसमे A के p स्तर है और B के q

स्तर हैं और प्रयोग का विन्यास याद्दच्छिकीकृत पूर्ण खण्डक अभिकल्पना मे किया गया है जिसमे पुनरावृत्ति सख्या r है तो सांख्यिकीय प्रतिरूप निम्न होता है —

$$X_{ijk}=\mu+\alpha_i+\beta_j+\rho_k+(\alpha\beta)_{ij}+e_{ijk} \qquad ....(21.31)$$

$$i=0,1,2,........(p-1)$$

$$j=0,1,2,.......(q-1)$$

$$k=1,2,.......r$$

जबकि प्रतिरूप (21.31) मे μ वास्तविक माध्य प्रभाव है। α_i, β_j वास्तविक मुख्य प्रभाव है और $(\alpha\beta)_{ij}$ वास्तविक परस्परक्रिया है। ρ_k k वी पुनरावृत्ति का वास्तविक प्रभाव है। सब e_{ijk} एक-दूसरे से स्वतन्त्र हैं और $e_{ijk} \sim N(0, \sigma_e^2)$

इसी प्रकार यदि तीन कारक हैं जिनके कि स्तर क्रमश p,q व m हैं। माना सबको को याद्दच्छिकीकृत पूर्ण खण्डक अभिकल्पना में रखा गया है और इसमे r खण्डक हैं तो सांख्यिकीय प्रतिरूप निम्न होता है —

$$X_{ijlk}=\mu+\alpha_i+\beta_j+\gamma_l+\rho_k+(\alpha\beta)_{ij}+(\alpha\gamma)_{il}+(\beta\gamma)_{jl}$$

$$+(\alpha\beta\gamma)_{ijl}+e_{ijlk} \qquad ....(21.32)$$

$$i=0,1,2,3,......(p-1)$$

$$j=0,1,2,......(q-1)$$

$$l=0,1,2,......(m-1)$$

$$K=1,2,3,......r$$

जबकि μ वास्तविक माध्य प्रभाव है। α,β,γ तीन कारको A,B,C के क्रमशः वास्तविक मुख्य प्रभाव हैं और $(\alpha\beta)$, $(\alpha\gamma)$ व $(\beta\gamma)$ प्रथम क्रम की और $(\alpha\beta\gamma)$ द्वितीय क्रम की परस्परक्रियाओ के वास्तविक प्रभाव हैं।

e_{ijlk} प्रयोग त्रुटि है जो कि एक-दूसरे से स्वतन्त्र हैं व $N(0, \sigma_e^2)$ बंटित हैं। इन प्रतिरूपो के लिए न्यूनतम वर्ग-विधि का प्रयोग करके, प्राचलो के आकलन तथा वर्ग योग ज्ञात कर सकते हैं। प्रसरण विश्लेषण सारणी निम्न रूप मे दी जा सकती है। प्रसरण विश्लेषण की सहायता से यहाँ परिकल्पनाओ की परीक्षा करते हैं कि

(i) A या B या C के मुख्य प्रभाव सार्थक हैं या नहीं।

(ii) परस्पर, क्रिया AB, AC, BC सार्थक है या नही अर्थात् प्रथम क्रम की परस्परक्रियाओ की सार्थकता-परीक्षा की जाती है।

(iii) परस्परक्रिया ABC सार्थक है या नही अर्थात् द्वितीय क्रम की परस्परक्रिया की सार्थकता की परीक्षा की जाती है।

प्रतिरूप (21.31) के लिए मुख्य प्रभाव A व B के वर्ग योग व परस्परक्रिया AB के कारण वर्ग योग निम्न सूत्रो की सहायता से ज्ञात कर सकते हैं। यह सूत्र न्यूनतम वर्ग विधि द्वारा प्राप्त किये जा सकते हैं —

दो कारकों के लिए व्यापक प्रसरण-सारणी जबकि प्रयोग विन्यास यादृच्छिकीकृत पूर्ण खण्डक अभिकल्पना में है।

सारणी (21.13) (प्रतिरूप I)

विचरण स्रोत	स्व० को०	व० यो०	मा० व० यो०	F-मान	प्रत्याशित मा० व० यो०
पुनरावृत्ति	$(r-1)$	R_{XX}	$R_{XX}/r-1 = R'$	$R'/s_e^2 = F_R$	$\sigma_e^2 + \frac{pq}{r-1} \sum_k \rho_k^2$
उपचार	$(pq-1)$	T_{XX}	$T_{XX}/(pq-1) = T'$	$T'/s_e^2 = F_T$	
A	$(p-1)$	A_{XX}	$A_{XX}/p-1 = A'$	$A'/s_e^2 = F_A$	$\sigma_e^2 + \frac{rq}{p-1} \sum_i \alpha_i^2$
B	$(q-1)$	B_{XX}	$B_{XX}/q-1 = B'$	$B'/s_e^2 = F_B$	$\sigma_e + \frac{rp}{q-1} \sum_j \beta_j^2$
A×B	$(p-1)(q-1)$	$(AB)_{XX}$	$\frac{(AB)_{XX}}{(p-1)(q-1)} = (AB)'$	$(AB)'/s_e^2 = F_{AB}$	$\sigma_e^2 + \frac{r}{(p-1)(q-1)} \sum_i \sum_j (\alpha\beta)_{ij}^2$
प्रयोग त्रुटि	$(r-1)(pq-1)$	E_{XX}	$\frac{E_{XX}}{(r-1)(pq-1)} = s_e^2$		σ_e^2
पूर्ण	$rpq-1$	S_{XX}			

तीन कारकों के लिए व्यापक प्रसरण-विश्लेषण सारणी जबकि विन्यास यादृच्छिकीकृत पूर्ण खण्डक प्रतिकल्पना में है।

सारणी (21 14) (प्रतिरूप I)

विचरण स्रोत	स्व० को०	व० यो०	मा० व० यो०	F-मान
पुनरावृत्ति	$(r-1)$	R_{XX}	$\frac{R_{XX}}{r-1}=R'$	$R'/s_e^2=F_R$
उपचार B	$(pqm-1)$ $(q-1)$	T_{XX} B_{XX}	$T_{XX}(pqm-1)=T'$ $B_{XX}(q-1)=B'$	$T'/s_e^2=F_T$ $B'/s_e^2=F_B$
A×B	$(p-1)(q-1)$	$(AB)_{XX}$	$\frac{(AB)_{XX}}{(p-1)(q-1)}=(AB)'$	$\frac{(AB)'}{s_e^2}=F_{AB}$
C	$(m-1)$	C_{XX}	$\frac{C_{XX}}{m-1}=C'$	$\frac{C'}{s_e^2}=F_C$
A×C	$(p-1)(m-1)$	$(AC)_{XX}$	$\frac{(AC)_{XX}}{(p-1)(m-1)}=(AC)'$	$\frac{(AC)'}{s_e^2}=F_{AC}$
B×C	$(q-1)(m-1)$	$(BC)_{XX}$	$\frac{(BC)_{XX}}{(q-1)(m-1)}=(BC)'$	$\frac{(BC)'}{s_e^2}=F_{BC}$
A×B×C	$(p-1)(q-1)(m-1)$	$(ABC)_{XX}$	$\frac{(ABC)_{XX}}{(p-1)(q-1)(m-1)}=(ABC)'$	$\frac{(ABC)'}{s_e^2}=F_{ABC}$
प्रयोग त्रुटि	$(r-1)(pqm-1)$	E_{XX}	$\frac{E_{XX}}{(r-1)(pqm-1)}=s_e^2$	
पूर्ण	$(rpqm-1)$			

$$\text{व०य०}\ (A) = \left(\frac{1}{qr} \sum_j X^2_{\cdot j \cdot} - \frac{X^2_{\cdots}}{pqr}\right)$$

$$\text{व०य०}\ (B) = \left(\frac{1}{pr} \sum_i X^2_{i\cdot\cdot} - \frac{X^2_{\cdots}}{pqr}\right)$$

$$\text{व०य०}\ (AB) = \left(\frac{1}{r} \sum_i \sum_j X_{ij\cdot}^2 - \frac{X^2_{\cdots}}{pqr}\right) - \text{व०य०}\ A - \text{व०य०}\ B$$

प्रतिरूप (21.32) के लिए मुख्य प्रभाव व प्रथम क्रम की परस्परक्रियाओं के लिए वर्ग योग ऊपर की भाँति सूत्रों से ज्ञात कर सकते हैं। इन सूत्रों में आवश्यकतानुसार अनुलग्नों तथा भाजक (Divison) मे अन्तर करना होता है। तीन कारकों की परस्परक्रिया के लिए व० य० निम्न सूत्र की सहायता से ज्ञात कर सकते हैं —

$$\text{व०य०}\ ABC = \left(\frac{1}{r} \sum_i \sum_j \sum_l X_{ijl}^2 - \frac{X^2_{\cdots}}{pqm}\right) - \{\text{व०य०}\ A$$
$$+\ \text{व०य०}\ B + \text{व०य०}\ C + \text{व०य०}\ (AB)$$
$$+\ \text{व०य०}\ (AC) + \text{व०य०}\ (BC)\}$$

उपर्युक्त सूत्रों की सहायता से वर्ग योग निकाल कर व्यापक प्रसरण सारणी तैयार कर ली जाती है और विभिन्न निराकरणीय परिकल्पनाओं के विषय में नियमानुसार निर्णय कर लिया जाता है। मुख्य प्रभाव व परस्परक्रियाओं के वर्ग योग द्विक व त्रिमुखी सारणी बनाकर इन सूत्रों का प्रयोग करके सीधे परिकलित कर लिए जाते हैं जैसा कि साधित (solved) उदाहरण से स्पष्ट हो जायेगा।

टिप्पणी (1) उपर्युक्त सारणियों में यह बात ध्यान देने योग्य है कि मुख्य प्रभावों व परस्पर-क्रियाओं की स्वातन्त्र्य संख्याओं का योग व वर्ग योगों का योग क्रमश: उपचारों की स्व० को० व व० य० के समान होता है।

(2) यदि आवश्यकता हो तो प्रतिरूप II के लिए भी नियमानुसार मा०व०य० दिये जा सकते हैं।

(3) 2^n उपादानीय प्रयोगों की स्थिति में p,q,m आदि के मान 2 के समान होते हैं।

(4) सारणी (21.14) में प्रत्याशित मा०व०य० नहीं दिये गये हैं। यदि आवश्यकता हो तो सारणी (21.13) के समरूप सूत्र पाठक स्वयं लिख सकते हैं।

उदाहरण 21.8. मक्का की उपज पर खरपतवार का प्रभाव तथा इनको दूर करने के लिए एक घासपातनाशी (Herbicide) का प्रभाव जानने के लिए प्रयोग किया गया। प्रयोग में खरपतवार (W) की चार जातियाँ, प्रत्येक के लिए बीज बोने की पाँच मात्राओं (S) का प्रयोग किया गया और घासपातनाशी (H) के दो स्तर लिये गये। इस प्रयोग का यादृच्छिकीकृत पूर्ण खण्डक अभिकल्पना में व्यवस्थित किया गया जिसमें कि चार पुनरा-

वृत्तियो को लिया गया। माना कि खरपतवार की जातियाँ W_1, W_2, W_3, W_4 हैं और बीज बोने की मात्राएँ S_1 S_2 S_3 S_4 S_5 है तथा दो स्तरो पर घासपातनाशी H_0 व H_1 द्वारा निरूपित किया गया है तो इनके 40 संचयो के अनुसार चार पुनरावृत्तियो मे प्रयोग द्वारा प्राप्त मक्का की उपज नीचे सारणी मे दी गई है।

मक्का की उपज (क्विंटल प्रति हेक्टर)

क्रम	उपचार संचय	R_1	R_2	R_3	R_4	योग	माध्य
1	$S_1 W_1 H_0$	33.0	11.4	22.6	15.8	82.8	20.70
2	$S_1 W_1 H_1$	33.8	22.6	13.4	18.3	88.1	22.02
3	$S_1 W_2 H_0$	8.5	12.0	7.4	10.8	38.7	9.67
4	$S_1 W_2 H_1$	21.0	11.2	7.0	9.8	49.0	12.25
5	$S_1 W_3 H_0$	36.4	11.6	14.7	9.8	72.5	18.12
6	$S_1 W_3 H_1$	28.8	38.0	18.0	8.8	93.6	3.40
7	$S_1 W_4 H_0$	6.0	24.6	5.8	5.6	42.0	10.50
8	$S_1 W_4 H_1$	13.5	13.4	31.9	9.0	67.8	16.95
9	$S_2 W_1 H_0$	16.5	32.4	33.0	28.4	110.3	27.57
10	$S_2 W_1 H_1$	33.4	30.4	13.6	39.0	116.4	29.10
11	$S_2 W_2 H_0$	25.0	35.8	30.8	8.0	99.6	24.50
12	$S_2 W_2 H_1$	13.4	20.8	11.8	20.4	66.4	16.60
13	$S_2 W_3 H_0$	18.8	18.0	17.0	12.0	65.8	16.45
14	$S_2 W_3 H_1$	32.8	25.0	15.0	15.7	88.5	22.12
15	$S_2 W_4 H_0$	26.7	30.6	13.8	24.5	95.6	23.90
16	$S_2 W_4 H_1$	12.0	23.4	33.4	16.4	85.2	21.30
17	$S_3 W_1 H_0$	12.8	18.0	18.8	18.2	67.8	16.95
18	$S_3 W_1 H_1$	25.9	31.0	32.4	24.5	113.8	28.45
19	$S_3 W_2 H_0$	17.6	23.2	20.6	13.5	74.9	18.72
20	$S_3 W_2 H_1$	15.4	28.4	11.0	18.4	73.2	18.30
21	$S_3 W_3 H_0$	21.2	14.4	30.2	20.8	86.6	21.65
22	$S_3 W_3 H_1$	20.0	20.8	15.6	14.0	70.4	17.60
23	$S_3 W_4 H_0$	24.6	31.6	8.0	15.0	79.2	19.80

24.	$S_4 W_4 H_1$	14·6	26·2	28·6	32·2	101 6	25·40
25.	$S_4 W_1 H_0$	28·7	30 0	26 0	7·4	92·1	23 02
26.	$S_4 W_1 H_1$	24 0	28 2	14·6	18 4	85 2	21 30
27.	$S_4 W_2 H_0$	23 6	37·5	16 0	18 0	95 1	23·77
28.	$S_4 W_2 H_1$	34 8	22 2	26 8	20·8	104·6	26·15
29.	$S_4 W_3 H_0$	32·6	26 2	24·7	11·1	74·6	23 65
30.	$S_4 W_3 H_1$	22 8	34 0	20 2	13·7	90 7	22 67
31.	$S_4 W_4 H_0$	20 2	20 4	6 8	12 0	59 4	14 85
32.	$S_4 W_4 H_1$	23 8	41 7	24 6	10 6	100 7	25 17
33.	$S_5 W_1 H_0$	31 2	33·8	26 6	28 0	11 96	29 90
34.	$S_5 W_1 H_1$	29 5	16·4	30 4	17 4	93·7	23 42
35.	$S_5 W_2 H_0$	38·4	14 6	15·6	14 4	83 0	20 75
36.	$S_5 W_2 H_1$	20 6	20·4	10 6	13 0	64 6	16·15
37.	$S_5 W_3 H_0$	21·0	31 6	13·0	14·0	79 6	19·90
38.	$S_5 W_3 H_1$	15·0	20·2	14 2	20 0	69·4	17·35
39.	$S_5 W_4 H_0$	22·0	22·8	12·4	23·8	81·0	20 25
40.	$S_5 W_4 H_1$	37·4	24·0	31·4	21·4	114·2	28·55
	योग	937·3	978·8	768·3	672·9	3359·3	

उपर्युक्त बहु-उपादानीय प्रयोग के न्यास का प्रसरण विश्लेषण तथा प्राप्त परिणामों का निर्वचन निम्न प्रकार कर सकते हैं :—

सबसे पहले दी हुई विधि के अनुसार निम्न मात्राओं का परिकलन किया।

1. स० का० $= \frac{(3357{\cdot}2)^2}{160} = 70442{\cdot}44$

2. पूर्ण व०य० $= (33{\cdot}0^2+33{\cdot}8^2+\ldots+23{\cdot}8^2+21{\cdot}4^2)$ — स० का०
$= 82023\ 59 - 70442{\cdot}44$
$= 11581{\cdot}15$

3. पुनरावृत्ति व०य० $= \frac{1}{40}(937\ 3^2+978\ 8^2+968{\cdot}3^2+672{\cdot}9^2)$ स०का०
$= 71991{\cdot}50 - 70442\ 44$
$= 1549\ 06$

4 उपचार व०य० $= \frac{1}{4}(82.8^2+88.1^2+ \quad +81.0^2+114.2^2)$-स०रा०

$=74134.34-70442.44$

$=3691.90$

5 त्रुटि व० य० $=11581-1549.06-3691.90$

$=6340.19$

अब उपचार वर्ग योग के घटकों के वर्ग योग अर्थात् मुख्य प्रभावों एवं परस्परक्रियाओं के लिए वर्ग योग निम्न प्रकार ज्ञात कर सकते हैं —

पहले निम्न सारणी की रचना की—

(S×W) सारणी

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	योग	माध्य
W_1	170.9	226.7	181.6	177.3	213.3	969.8	24·24
W_2	87·7	166.0	148.1	199.7	147.6	749.1	18.72
W_3	166·1	154.3	157.0	185.3	149.0	811.7	20.30
W_4	109.8	180.8	180.8	160.1	195.2	826·7	20.60
योग	534.5	727·8	667.5	722·4	705.1	3357·3	
माध्य	16.70	22.74	20.86	22·57	22.3		

6. बीज बोने की मात्राओं (S) के कारण,

व०य०$=\frac{1}{32}(534.5^2+727·8^2+667.5^2+722.4^2+705·1^2)$–स०रा०

$=71249.0-70442·4$

$=806.6$

7. सरपतवार जातियों (W) के कारण

व०य०$= \frac{1}{4}$ $(969.8^2+749.1^2+811·7^2+826.7^2)$ – स०रा०

$= 71098.8-70442.4$

$= 556.4$

8 परस्पर क्रिया S×W के कारण,

व०य०$= \frac{1}{8}$ $(170.9^2+87.7^2+....+195.2^2)$ – सं०रा०

–व०य०(S)–व०य०(W)

$= 72888.6-70442·4-806.6-556.4$

$= 1083.2$

(S×H) सारणी

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	योग	माध्य
H_0	236 0	371 3	308·5	341 2	363 2	1620 2	20 2
H_1	298 5	356 5	359 0	381 2	341 9	1737 1	21·7
योग	534 5	727 8	667·5	722·4	705 1	3357·3	

9 घामसातत्याशी (H) के कारण,

व०प० $= \frac{1}{80}$ (1620 2² + 1737 1²) − स०का०

= 70532 05 − 70442 40

= 89 6

10 परस्परक्रिया S×H के कारण

व०प० $= \frac{1}{16}$ (236 0² + 298·5² + ... + 363·2² + 341 9²) − सं०का०

− व०प० (S) − व०प० (H)

= 71521 76 − 70442·4 − 806·6 − 89·6

= 183·3

(W×H) सारणी

	W_1	W_2	W_3	W_4	योग
H_0	472 6	391 3	399 1	357·2	1620 2
H_1	497 2	357 8	412 6	469 5	1737 1
योग	969 8	749 1	811 7	826·7	3357 3

परस्परक्रिया (W×H) के कारण,

व०प० $= \frac{1}{20}$ (472·6² + 497 2² + ... + 357·2² + 469 5²)

− स० का० − व०प० (W) − व०प० (H)

= 71461 8 − 70442·4 − 556 4 − 89 6

= 373 4

परस्परक्रिया $S \times W \times H$ के कारण,

व०प० = उपचार व०प० − (S + W + H + S×W + S×H + W×H) व०प०

= 3691·9 − (806 6 + 556·4 + 89·6 + 1083 2 + 183 3 + 373 4)

= 599·4

प्रसरण विश्लेषण सारणी

विचरण स्रोत	स्व० को०	व०यो०	मा०व०यो०	F-मान	F-के सारणीबद्ध मान पर α = ·05
पुनरावृत्ति	3	1549 35	516 35	9·53*	2 68
उपचार	39	3691·90	94 66	1 75*	1 50
S	4	806 6	201 65	3·72*	2 45
W	3	556 4	185 5	3 42*	2 68
S×W	12	1083 2	90 27	1·67	1·83
H	1	89 6	89·6	1·65	3 92
S×H 7	4	183 3	45·82	0·84	2 45
W×H	3	373 4	124 47	2·30	2 68
S×W×H	12	599 4	49·2	0 91	1·83
प्रयोग त्रुटि	117	6340 19	54 18		
पूर्ण	158	11581·15			

उपर्युक्त सारणी में जिन परिकलित F मानों पर तारक चिह्न (*) बना है वह अपने तदनुसार कारकों में 5% सार्थकता स्तर पर सार्थक अन्तर को प्रदर्शित करते हैं। स्पष्टतः पुनरावृत्तियों व उपचारों में सार्थक अन्तर सिद्ध होता है। उपचारों के संघटकों में से केवल मुख्य प्रभाव S व W सार्थक हैं जिसका अभिप्राय है कि बीज बोने की पाँच मात्राओं का उपज पर प्रभाव सार्थक रूप में एक-दूसरे से भिन्न है। इसी प्रकार सरगनदार की चार जातियाँ भी सार्थक रूप में एक-दूसरे से भिन्न हैं। विभिन्न मुख्य प्रभावों तथा परस्पर क्रियाओं की मानक त्रुटि निम्न प्रकार ज्ञात कर सकते हैं —

$$S \text{ के माध्य की मानक त्रुटि} = \sqrt{\frac{\text{त्रुटि मा० व० यो०}}{r \times q \times m}}$$

$$= \sqrt{\frac{54 \cdot 18}{4 \times 4 \times 2}}$$

$$= 1{\cdot}3011$$

$$W \text{ के माध्य की मानक त्रुटि} = \sqrt{\frac{\text{त्रुटि मा०व०यो०}}{r \times p \times m}}$$

$$= \sqrt{\frac{54 \cdot 18}{4 \times 5 \times 2}}$$

$$= 1 \cdot 1638$$

S × W के माध्य की मानक त्रुटि $= \sqrt{\frac{\text{त्रुटि मा०व०य०}}{r \times H}}$

$$= \sqrt{\frac{54 \cdot 18}{4 \times 2}}$$

$$= 2 \cdot 60 \cdot 24$$

H के माध्य की मानक त्रुटि $= \sqrt{\frac{\text{त्रुटि मा०व०य०}}{r \times q}}$

$$= \sqrt{\frac{54 \cdot 18}{4 \times 4 \times 5}}$$

$$= 0 \cdot 8229$$

W × H के माध्य की मानक त्रुटि $= \sqrt{\frac{\text{त्रुटि मा०व०य०}}{r \times p}}$

$$= \sqrt{\frac{54 \cdot 18}{4 \times 5}}$$

$$= 1 \cdot 6459$$

S × H के माध्य की मानक त्रुटि $= \sqrt{\frac{\text{त्रुटि मा०व०य०}}{r \times q}}$

$$= \sqrt{\frac{54 \cdot 18}{4 \times 4}}$$

$$= 1 \cdot 8401$$

S × W × H के माध्य की मानक त्रुटि $= \sqrt{\frac{\text{त्रुटि मा०व०य०}}{r}}$

$$= \sqrt{\frac{54 \cdot 18}{4}}$$

$$= 3 \cdot 6803$$

अब तक दी हुई विधि द्वारा किसी भी बहुउपादानीय प्रयोग का प्रसरण विश्लेषण कर सकते हैं। किन्तु 2^n बहुउपादानीय प्रयोग का प्रसरण विश्लेषण करने की येट्स ने एक अति सुगम विधि दी है जिसे येट्स विधि कहते हैं। यह विधि निम्न प्रकार है —

येट्स विधि—इस विधि का प्रयोग उपचारों के मुख्य प्रभाव तथा उनके कारण वर्ग-योग ज्ञात करने के लिए निम्न प्रकार कर सकते हैं—

(1) कारकों के संचयों को क्रम में लिख दिया। यहाँ यह ध्यान रखना चाहिये कि उपचार के लिए अक्षर लिखने के तुरन्त बाद उसका (उसके अक्षरों के) संचय देना आवश्यक है।

(2) संचयों को लिखने के पश्चात् अगले स्तम्भ में उपचार योगों को लिख दिया जाता है।

(3) अब तीसरे स्तम्भ में संचयों के लिए दिये गये युग्म मानों का प्रारम्भ से क्रम से जोड़ दिया जाता है। इस प्रकार इस स्तम्भ में ऊपर की आधी संख्याएँ ज्ञात हो जाती हैं। फिर बाकी संख्याएँ प्रत्येक युग्म के दूसरे मान में से पहला मान घटाकर ज्ञात कर ली जाती हैं।

(4) क्रिया 3 को फिर से करके अगला स्तम्भ तैयार कर लिया जाता है। यदि प्रयोग में n कारक हैं तो इस क्रिया को दोहराकर n स्तम्भ तैयार करने होते हैं।

(5) अन्तिम स्तम्भ में पहली संख्या को छोड़कर अन्य संख्याएँ उपचारों के पूर्ण प्रभाव को निरूपित करती हैं। इन संख्याओं को $2^{n-1}r$ से भाग करके उपचारों के माध्य प्रभाव ज्ञात कर लिये जाते हैं जबकि r पुनरावृत्तियों की संख्या है।

(6) अन्तिम स्तम्भ की पहली संख्या सदैव कुल प्रेक्षणों के योग के समान होती है। इसका वर्ग करके $2^n r$ से भाग देने पर संशोधन कारक ज्ञात हो जाता है। इसके बाद की संख्याओं का क्रमशः वर्ग करके $2^n r$ से भाग देने पर तदनुसार उपचारों के वर्ग योग ज्ञात हो जाते हैं। इन वर्ग योगों का प्रसरण विश्लेषण सारणी में प्रयोग करके, सार्थकता परीक्षा सामान्य रूप से कर ली जाती है।

परिकलन में त्रुटि की जाँच

(i) विषम और सम संचयों के उपचारों का योग अलग अलग करके परिकलन के लिए दी गई सारणी में प्रत्येक स्तम्भ के नीचे रख लिया जाता है।

(ii) प्रत्येक स्तम्भ का योग ज्ञात करके उसके नीचे रख दिया जाता है।

(iii) उपचार योगों से अगले स्तम्भों में ऊपर से युग्म की आधी संख्याओं के योग ज्ञात करके इन आधी संख्याओं के नीचे रख लिये जाते हैं।

(iv) जाँच के लिए देखिये कि पिछले स्तम्भ का योग, अगले स्तम्भ के ऊपर से युग्म की आधी संख्याओं के योग के समान है।

(v) दूसरी जाँच यह है कि एक स्तम्भ और इससे पिछले स्तम्भ के योगों में अन्तर, पिछले स्तम्भ की सम और विषम क्रम की संख्याओं के योग के अन्तर के समान होता है। उपर्युक्त विधि का प्रयोग निम्न उदाहरण में किया गया है —

उदाहरण 21.9 : मक्का की दो प्रजातियों, गंगा–5 (Ganga–5) और बस्सी (Bassi) पर फासफोरस व पोटास की दो-दो मात्राओं का प्रभाव जानने के लिए एक प्रयोग किया गया। फासफोरस की मात्राएँ 0 और 45 किलो॰ प्रति एकड़ और पोटास की मात्रायें 0 और 30 किलो॰ प्रति एकड़ ली गईं। मक्का की दोनों प्रजातियों (0, 1) तथा फासफोरस के दो स्तरों (0, 1) व पोटास के दोनों स्तरों (0, 1) के आठ संचयों को यादृच्छिकीकृत पूर्ण खण्डक अभिकल्पना में नियोजित किया गया। प्रयोग में चार पुनरावृत्तियाँ ली गईं। मक्का की उपज प्रति भूखण्ड (10 मी॰ × 15 मी॰) निम्न सारणी में दी गई है:—

उपचार संचय (VPK)	R_1	R_2	R_3	R_4	योग
(1)	4 58	2 69	4·02	3·40	14·69
k	3·59	3·57	4·00	3·26	14·42
k	4 08	3 62	3·42	4 23	15·35
pk	2·50	4·05	4 30	2 78	13 63
v	1 82	4 08	3·60	2 06	11·56
vk	4 27	4·57	4·60	4 24	17·68
vp	2·79	4·42	3·60	1·50	12·31
vpk	3·15	3 94	4·51	2·20	13 80
	26·78	30 94	32·05	23·67	113·44

इस प्रयोग के न्यास का प्रसरण-विश्लेषण येट्स-विधि द्वारा निम्न प्रकार कर सकते हैं। अतः उपचार संचयों के माध्य प्रभाव एवं वर्ग-योग ज्ञात करने के लिए निम्न सारणी तैयार की गई.—

उपचार संचय	उपचार योग	(i)	(ii)	(iii)	उपचार माध्य	संघटकों के वर्ग-योग
(1)	14·69	29·11	58 09	113 44	3·54	402 14
k	14·42	28 98	55 35	5 62	0 35	0 987
p	15·35	29 24	– 1 99	– 3·26	– 0·20	0·332
pk	13 63	26·11	7 61	– 6 08	– 0 39	1·155
योग		113 44	119 06	109 72		
v	11·56	– 0 27	– 0 13	– 2·74	– 0·77	0·235
vk	17·68	– 1·72	– 3 13	9 60	0 60	2·880
vk	12·31	6·12	– 1·45	– 3·00	– 0 19	0 281
vpk	13·80	1·49	– 4 63	– 3 18	– 0 20	0 361
विषम क्रम-संख्याओं के संचयों का योग	53 91	64·20	54 52	104·44		
सम क्रम-संख्याओं के संचयों का योग	59 53	54 86	55 20	5 96		
कुल योग	113 44	119 06	109·72	110 40		

सामान्य विधि के अनुसार,

पुनरावृत्ति व० यो० $= \frac{1}{8} \{ 26.78^2 + 30.94^2 + 32.05^2 + 23.67^2 \}$ – स० का०

$= 407.64 - 402.14$

$= 5.50$

उपचार व० यो० $= \frac{1}{4} \{ 16.69^2 + \ldots + 13.80^2 \}$ – स० का०

$= 408.33 - 402.14$

$= 6.19$

पूर्ण व० यो० $= \{ 4.58^2 + 3.59^2 + \ldots + 1.50^2 + 2.20^2 \}$ – स० का०

$= 424.98 - 402.14$

$= 22.84$

त्रुटि व० यो० $= 22.84 - 6.19 - 5.50$

$= 11.15$

अतः प्रसरण विश्लेषण सारणी है,

विचरण स्रोत	स्व० को०	व० यो०	मा० व० यो०	F-मान
पुनरावृत्ति	3	5.50	1.83	3.45
उपचार	7	6.19	0.88	1.66
त्रुटि	21	11.15	0.53	1.66
पूर्ण	31	22.84		

α = .05 व (3, 21) स्व० को० के लिए F का सारणी (परि० प-5.2) द्वारा प्राप्त मान = 3.07 और α = .05 व (7, 21) स्व० को० के लिए F का सारणीबद्ध मान = 2.50 है। ये परिकलित मानों की सारणीबद्ध तदनुसार F मानों से तुलना करने पर विदित होता है। पुनरावृत्तियों में सार्थक अन्तर है किन्तु उपचारों में अन्तर निरर्थक है। अतः उपचार माध्यों की सार्थकता की अलग अलग परीक्षा करने की आवश्यकता नहीं है।

$$\text{एक उपचार माध्य की मानक त्रुटि} = \sqrt{\frac{s_e^2}{2^{n-2} \cdot r}}$$

$$= \sqrt{\frac{0.53}{2 \times 4}}$$

$$= 0.257$$

प्रत्येक मुख्य प्रभाव व परस्परक्रिया की सार्थकता-परीक्षा इनके लिए F-मान ज्ञात करके, $\alpha = \cdot 05$ सा० स्तर व (1, 21) स्व० को० के लिए सारणीबद्ध F_{α} से तुलना करके सामान्य रूप में कर सकते हैं।

बहु-उपादानीय प्रयोग में उपप्रतिचयन की स्थिति में प्रसरण विश्लेषण

अब तक जो उपादानीय प्रयोग सम्बन्धी प्रसरण विश्लेषण दिया गया उन सब में प्रति प्रयोगगत एकक से एक ही प्रेक्षण लिया गया था। किन्तु अनेकों प्रयोगों में एक एकक से कई उपप्रतिचयन एककों का चयन कर लिया जाता है। इस स्थिति में प्रसरण विश्लेषण सारणी (21.10) की सहायता से किया जा सकता है। यहाँ उस सारणी से यह भिन्नता होती है कि विचरण स्रोत के स्तम्भों में उपचारों को मुख्य प्रभाव व परस्पर क्रियाओं में विपाटित करना होता है। इतना ही नहीं प्राय प्रत्येक प्रतिचयन एकक पर कई-कई प्रेक्षण लेने होते हैं। ऐसी स्थिति में माना कि प्रति प्रयोगगत एकक से 'n' प्रतिचयन एककों का चयन किया गया है और प्रति प्रतिचयन पर u प्रेक्षण लिए गये हैं। $p \times q$ उपादानीय प्रयोग के लिए जिसमें यादृच्छिकीकृत पूर्ण खण्डक अभिकल्पना का प्रयोग किया गया है, द्रष्टव्य पृ० 581 प्रसरण विश्लेषण सारणी (21.15)।

यदि प्रयोगगत एकक से प्रतिचयन नहीं किया गया हो तो $n=1$ होगा और उपर्युक्त सारणी में $n=1$ रख देने से इस स्थिति के लिए प्रसरण सारणी का प्रारूप ज्ञात हो जाता है। यदि एक प्रेक्षण प्रति प्रतिचयन यूनिट लिया गया हो तो $u=1$ होता है। u का मान 1 रख देने पर उपयुक्त सारणी प्राप्त हो जाती है। यदि $n=1$, $u=1$ हो तो स्पष्टतया सारणी (21.15) और (21.13) एक समान हो जाती हैं। वर्ग योगों को सामान्य ढंग से परिकलित किया जा सकता है।

तीन या तीन से अधिक कारक होने की स्थिति में व्यापक प्रसरण सारणी पहले की भाँति बना सकते हैं। इस सारणी में विचरण स्रोत के स्तम्भ में मुख्य प्रभाव तथा परस्पर-क्रियाओं की तदनुसार संख्या बढ़ जाती है इन्हीं के अनुसार स्वातन्त्र्य कोटि तथा अन्य मानों में परिवर्तन करना होता है।

व्यवहार में बहुत अधिक कारक या कारकों के अधिक स्तर लेना उचित नहीं है क्योंकि इस स्थिति में सचयों की संख्या अत्यधिक बढ़ जाती है और इनका प्रयोग में प्रबन्ध करना कठिन हो जाता है इसके अतिरिक्त उच्चतर क्रम की परस्परक्रियाओं की सार्थकता-परीक्षा के पश्चात् निर्वचन करना भी कठिन है। यदि किसी प्रयोग में अनेक कारक लेना आवश्यक हो तो इस स्थिति में तृतीय या अधिक क्रम की परस्परक्रियाओं की सार्थकता-परीक्षा अलग से नहीं करते हैं तथापि इन्हें प्रयोग त्रुटि में सम्मिलित कर लिया जाता है।

एक पुनरावृत्ति की स्थिति में प्रसरण विश्लेषण

यदि कारकों की संख्या अधिक हो (अर्थात् चार या चार से अधिक हो) और प्रत्येक कारक के कई स्तर हो तो सचयों की संख्या इतनी अधिक हो जाती है कि प्रयोग विन्यास में एक से अधिक पुनरावृत्ति लेनी सम्भव नहीं होती है। इसके कई कारण हो सकते हैं,

(सारणी 21 15)

विचरण स्रोत	स्व० को०	व०यो०	मा०व०	F-मान	प्रत्याशित मा०व०
पुनरावृत्ति	$(r-1)$	R_{xx}	$\frac{R_{xx}}{r-1}=R'$	$R'/s_e^2=F$	$\sigma^2+\frac{nupq}{(r-1)}\sum_k \rho_k^2$
उपचार	$(pq-1)$	T_{xx}	$\frac{T_{xx}}{pq-1}=T'$	$T'/s_e^2=F_T$	
A	$(p-1)$	A_{xx}	$\frac{A_{xx}}{p-1}=A'$	$A'/s_e^2=F_A$	$\sigma^2+\frac{rpnu}{p-1}\sum_i \alpha_i^2$
B	$(q-1)$	B_{xx}	$\frac{B_{xx}}{q-1}=B'$	$B'/s_e^2=F_B$	$\sigma^2+\frac{rpnu}{q-1}\sum_j \beta_j^2$
A × B	$(p-1)(q-1)$	$(AB)_{xx}$	$\frac{(AB)_{xx}}{(p-1)(q-1)}(AB)'$	$(AB)'/s_e^2=F_{AB}$	$\sigma^2+\frac{rnu}{(p-1)(q-1)}\sum_i\sum_j(\alpha\beta)_{ij}^2$
प्रयोग त्रुटि	$(r-1)(pq-1)$	E_{xx}	$E_{xx}/(r-1)(pq-1)=E'$		$\sigma_u^2+n\sigma_\eta^2+nu\,\sigma_e^2=\sigma^2$
प्रतिचयन त्रुटि	$rpq(n-1)$	S_{xx}	$S_{xx}/rpq(n-1)=S'$		$\sigma_u^2+n\sigma_\eta^2$
प्रतिप्रेक्षण प्रति प्रतिचयन एकक त्रुटि	$rpqn(u-1)$	O_{xx}	$O_{xx}/rpqn(u-1)=O'$		σ_u^2
पूर्ण	$rpqnu-1$				

उदाहरण (21 8) का न्यास डॉ० जे० के० वर्मा, कृषि महाविद्यालय, उदयपुर के सौजन्य से प्राप्त हुआ।

एक तो यह कि प्रयोगगत सामग्री एक से अधिक पुनरावृत्ति के लिए उपलब्ध न हो। दूसरे प्रयोग का सचालन दुष्कर हो जाय। तीसरे यह कि कई पुनरावृत्तियों के प्रेक्षण लेने के लिए समय नहीं हो। इस प्रकार की समस्या रसायन शास्त्र तथा मृदा विज्ञान (Soil Science), सम्बन्धी प्रयोगो म प्राय उत्पन्न होती है क्योंकि प्रत्येक रसायनिक विश्लेषण पर्याप्त समय लेता है। कभी-कभी ऐसी कठिनाई क्षेत्र प्रयोगो मे भी सामने आती है अत इन प्रयोगो मे केवल एक ही पुनरावृत्ति लेते हैं और उच्च क्रम की परस्परक्रियाओ को प्रयोग त्रुटि के स्थान पर प्रयोग कर लिया जाता है। उच्च क्रम की परस्परक्रिया म तृतीय क्रम या इससे अधिक क्रम की परस्परक्रियाएँ ली जाती है। यदि द्वितीय क्रम की परस्परक्रिया मे रुचि न हो अर्थात् प्रयोग की दृष्टि से यह महत्त्वपूर्ण न हो तो इसे भी प्रयोग त्रुटि मे सम्मिलित कर सकते हैं।

पूर्ण संकरण

बहु-उपादानीय प्रयोगों म सचयो की सख्या अत्यधिक हो जाने पर याद्दच्छिकीकृत पूर्ण खण्डक अभिकल्पना म, पुनरावृत्ति (खण्डक) की सजातीयता बनाए रखना असम्भव हो जाता है। पुनरावृत्ति की सजातीयता के लिए यह आवश्यक है कि उचित आकार के खण्डक का गठन किया जाय। खण्डक का आकार वृहत् होने की स्थिति म या तो सकरण का प्रयोग करके आकार को घटाते हैं या अन्य किसी अभिकल्पना का चयन करना होता है।

सकरण से अभिप्राय एक पुनरावृत्ति (पूर्ण खण्डक) को दो या दो से अधिक खण्डको म विभाजित करना है जिसम कि प्रत्येक खण्डक स्वय म सजातीय होता है। इस खण्डक को असम्पूर्ण ब्लाक (Incomplete blocks) कहते हैं क्योंकि एक खण्डक मे कुछ उपचार सचय विद्यमान होते हैं और कुछ विद्यमान नहीं होते है। इस प्रकार प्रयोग त्रुटि कम हो जाती है जिसके परिणामस्वरूप सकरणित (confounded) उपचार सचय को छोडकर अन्य उपचारो की परीक्षा अधिक परिशुद्धि से होती है। इसका कारण यह है कि जो भी उपचार सचय असम्पूर्ण ब्लाकों की रचना म प्रयोग किये जाते हैं उनके प्रति सूचना असम्पूर्ण ब्लाकों मे अन्तर के साथ मिश्रित हो जाती है जिसको कि पृथक् नहीं किया जा सकता है। अतः जिस उपचार का सकरण किया गया होता है, उसे प्रसरण विश्लेषण सारणी मे प्रयोग त्रुटि के साथ जोड देते है अर्थात् इस उपचार के सघटक को विचरण स्रोत के स्तम्भ मे अलग से नहीं दिखाया जाता है। अत इसके प्रति सार्थकता की परीक्षा नहीं करनी होती है। सकरण करते समय यह सावधानी बरतनी चाहिये कि केवल उसी उपचार-सघटक (वैपम्य) का सकरण किया जाये जो महत्त्वपूर्ण न हो या जो सबसे कम महत्त्व का हो। व्यवहार मे अधिकाशत उच्चतर क्रम की परस्परक्रिया या परस्परक्रियाओ को सकरण हेतु लिया जाता है। इस प्रकार यदि एक ही उपचार सचय का सब पुनरावृत्तियो मे सकरण करते हैं तो इस सकरण क्रिया को पूर्ण सकरण (complete confounding) कहते हैं।

संकरण अभिकल्पना के लिए व्यापक प्रसरण सारणी बहु-उपादानीय प्रयोगो की भाँति

तैयार की जाती है। यहाँ संकरित प्रभाव (मुख्य प्रभाव या परस्परक्रिया) की स्वातन्त्र्य कोटि तथा वर्ग योग को प्रयोग त्रुटि के साथ जोड़ दिया जाता है। संकरण का प्रयोग अनेक अभिकल्पनाओं में किया जा सकता है जैसे यादृच्छिकीकृत पूर्ण खण्डक अभिकल्पना, लैटिन वर्ग अभिकल्पना आदि। व्यापक प्रसरण विश्लेषण सारणी उस अभिकल्पना के आधार पर ही तैयार की जाती है जिसका प्रयोग किया गया है। व्यवहार में अधिकतर यादृच्छिकी-कृत पूर्ण खण्डक अभिकल्पना का ही प्रयोग होता है। इन सबके लिए प्रसरण विश्लेषण सारणियाँ यहाँ अलग नहीं दी गई हैं क्योंकि यह 2^n उपादानीय प्रयोगों के अनुरूप है। माना एक 2^3 बहु उपादानीय प्रयोग में यदि परस्परक्रिया ABC का संकरण किया गया है जिसमें प्रति पुनरावृत्ति में दो असम्पूर्ण ब्लाक हैं यदि प्रयोग का विन्यास यादृच्छिकीकृत पूर्ण खण्डक अभिकल्पना में किया गया है तो प्रसरण विश्लेषण सारणी की रूपरेखा निम्न होती है —

विचरण स्रोत	स्व० को०
खण्डक (ब्लाक)	$(2r-1)$
पुनरावृत्ति	$(r-1)$
पुनरावृत्तियों में ब्लाक	r
A	1
B	1
A×B	1
C	1
A×C	1
B×C	1
प्रयोग त्रुटि	$6(r-1)$
पूर्ण	$(8r-1)$

उपर्युक्त सारणी के लिए व० य० मा० व० य० तथा F-मान सामान्य रूप से ज्ञात करके मुख्य प्रभावों तथा परस्परक्रियाओं की सार्थकता की परीक्षा की जा सकती है।

आंशिक संकरण

प्रायः ऐसी स्थिति उत्पन्न होती है कि किसी भी उपचार के संघटक को महत्वपूर्ण नहीं समझा जा सकता है। साथ ही सब उपचार संचयों का एक खण्डक में रखना समांगीयता की दृष्टि से अनुचित समझा जाता है तो ऐसी स्थिति में आंशिक संकरण एक उचित विधि है। आंशिक संकरण के अन्तर्गत प्रत्येक पुनरावृत्ति में विभिन्न उपचार प्रभाव का संकरण

किया जाता है। यह उपचार प्रभाव वह होते हैं जिनमें अन्य की अपेक्षा कम रुचि होती है। प्राय यह उपचार प्रभाव उच्च क्रम की परस्पर-क्रियाएँ होती हैं। इस प्रकार की सकरण क्रिया को आंशिक सकरण कहते हैं। इस प्रयोग विन्यास द्वारा सकरणित उपचार के प्रभाव को उन पुनरावृत्तियों की सहायता से ज्ञात किया जाता है जिनमें कि इन उपचार प्रभाव का सकरण नहीं किया गया है। इस प्रकार वे उपचार जिनका कि सकरण नहीं किया गया है अधिक परिशुद्ध से आकलित किये जाते हैं और इनकी परीक्षा सकरणित उपचारों की अपेक्षा अधिक परिशुद्ध होती हैं। जैसे 2³ प्रयोग के लिए एक यादृच्छिकीकृत पूर्ण खण्डक अभिकल्पना की स्थिति में जिसमें कि तीन पुनरावृत्तियाँ ली गई हैं और इनमें क्रमश उपचार प्रभाव AB, BC व AC का सकरण किया गया है, प्रसरण विश्लेषण-सारणी की रूपरेखा निम्न होती है —

विचरण स्रोत	स्व० सं०
खण्डक	5
पुनरावृत्ति	2
पुनरावृत्तियों के खण्डक	3
A	1
B	1
C	1
AB	1
BAC	1
BC	1
ABC	1
प्रयोग त्रुटि	11
पूर्ण	23

इस स्थिति में सकरणित उपचार प्रभावों के वर्ग-योग उन पुनरावृत्तियों से परिकलित किये जाते हैं जिनमें इनका सकरण नहीं किया गया है और अन्य वर्ग-योग किया गया है और अन्य वर्ग-योग सामान्य रूप में परिकलित किए जाते हैं। शेष सारणी को व्यापक रूप से पूर्ण करके परिणाम प्राप्त कर लिए जाते हैं। इसी प्रकार की प्रसरण विश्लेषण सारणियाँ अन्य अभिकल्पनाओं के लिए नियमानुसार बनाई जा सकती हैं।

विपाटित क्षेत्र अभिकल्पना

यह भी एक प्रकार की बहु-उपादानीय अभिकल्पना है जिसमें एक कारक के मुख्य प्रभाव का मुख्य क्षेत्रों के साथ सकरण है। यहाँ मुख्य क्षेत्र से अभिप्राय एक प्रयोगगत एकक से है जो आकार में बड़ी है। प्राय प्रयोगों में कुछ ऐसे उपचार होते हैं कि जिनके लिए छोटी

प्रयोगगत एककों का लेना उचित नहीं है अर्थात् इन उपचारों को छोटे एककों पर ठीक प्रकार से प्रयुक्त नहीं किया जा सकता है। जैसे सिंचाई की कुछ ऐसी कार्य प्रणाली है जिनके लिए वृहद् भूखण्डों की आवश्यकता होती है, तापक्रम सम्बन्धी अनुसंधानों में सम्पूर्ण पौधा घर (Green house) को एक ही तापक्रम पर रक्खा जा सकता है। सेंकने की भट्टी (Baking oven) हिमीकरण यूनिट (freezing unit) आदि सम्बन्धी प्रयोगों में वृहद् प्रयोगगत यूनिटों की आवश्यकता होती है।

इस अभिकल्पना में दो या दो से अधिक कारकों या उपचारों का विभिन्न स्तरों पर होना आवश्यक है। इन उपचारों में से एक उपचार को उसके भिन्न भिन्न स्तरों पर एक पुनरावृत्ति के मुख्य क्षेत्रों में यादृच्छिक रीति से नियत कर दिया जाता है फिर प्रत्येक मुख्य क्षेत्र को दूसरे उपचारों के स्तरों के समान संख्या में उपक्षेत्रों में विभाजित कर दिया जाता है और इन उप क्षेत्रों में दूसरे उपचार को विभिन्न स्तरों पर यादृच्छिकी विधि से निर्दिष्ट कर दिया जाता है। यादृच्छिकीकरण की क्रिया को प्रत्येक क्षेत्र में स्वतन्त्र रूप से किया जाता है। यदि प्रयोग में कोई तीसरा शोधन विभिन्न स्तरों पर हो तो उपक्षेत्र को इस तीसरे उपचार के स्तरों की संख्या के अनुसार विभाजित कर दिया जाता है। इन क्षेत्रों को उप उपक्षेत्र कहते हैं। तीसरे उपचार को अपने विभिन्न स्तरों पर इन उप उपक्षेत्रों में यादृच्छिक रीति से निर्दिष्ट कर दिया जाता है और इस यादृच्छिकीकरण की क्रिया को प्रत्येक उपक्षेत्र में स्वतन्त्र रूप से किया जाता है। इस बात को इस प्रकार भी कह सकते हैं कि तीसरे उपचार के लिए प्रत्येक उपक्षेत्र को मुख्य क्षेत्र के रूप में समझा जा सकता है। इस प्रकार सैद्धान्तिक दृष्टि से कितने ही उपचारों को विभिन्न स्तरों पर लिया जा सकता है पर इनकी संख्या अधिक हो जाने पर प्रयोग को सुचारु रूप से संचालन करना लगभग असम्भव हो जाता है अतः अधिकांशतः तीन से अधिक उपचारों को नहीं लेते हैं। प्रयोग में आवश्यकतानुसार पुनरावृत्तियों की संख्या ले ली जाती है।

माना एक प्रयोग में दो कारक A व B हैं जिनके स्तर क्रमशः 3 व 4 हैं। A को मुख्य क्षेत्र में और B को उपक्षेत्र में लिया गया है। माना प्रयोग में 3 पुनरावृत्तियाँ हैं तो प्रयोग का विन्यास निम्न प्रकार का होता है —

पुनरावृत्ति 1			पुनरावृत्ति 2			पुनरावृत्ति 3		
a_1	a_0	a_2	a_0	a_2	a_1	a_0	a_1	a_2
b_1	b_2	b_0	b_2	b_1	b_3	b_0	b_1	b_2
b_3	b_0	b_3	b_1	b_2	b_2	b_2	b_3	b_1
b_2	b_1	b_2	b_0	b_3	b_0	b_3	b_2	b_0
b_0	b_3	b_1	b_3	b_0	b_1	b_1	b_0	b_3

यदि प्रयोग में तीन कारकों A,B व C को सम्मिलित किया गया है जिनके स्तर क्रमश. 3, 4 व 2 हैं तो प्रयोग का विन्यास निम्न प्रकार का होता है। माना कि यहाँ प्रयोग में केवल दो पुनरावृत्तियाँ ली गई है —

पुनरावृत्ति 1			पुनरावृत्ति 2		
a_1	a_2	a_2	a_0	a_1	a_2
$c_1\ b_1\ c_n$	$c_n\ b_2\ c_1$	$c_1\ b_0\ c_n$	$c_1\ b_n\ c_n$	$c_n\ b_2\ c_1$	$c_n\ b_1\ c_1$
$c_n\ b_n\ c_1$	$c_1\ b_n\ c_n$	$c_0\ b_2\ c_1$	$c_0\ b_2\ c_1$	$c_0\ b_1\ c_1$	$c_1\ b_2\ c_0$
$c_n\ b_e\ c_1$	$c_1\ b_1\ c_n$	$c_n\ b_1\ c_1$	$c_1\ b_1\ c_n$	$c_1\ b_0\ c_n$	$c_n\ b_1\ c_1$
$c_1\ b_2\ c_0$	$c_1\ b_3\ c_0$	$c_0\ b_3\ c_1$	$c_1\ b_3\ c_0$	$c_0\ b_3\ c_1$	$c_1\ b_0\ c_0$

इसी प्रकार का विन्यास किन्ही अन्य उपचार संख्याओ और उनके स्तरो के अनुसार दिया जा सकता है।

विपाटित क्षेत्र अभिकल्पना में सभी उपचारों के मुख्य प्रभाव या परस्परक्रियाओं की तुलना समान सूक्ष्मता (Precision) से नहीं होती है। वह उपचार जो मुख्य क्षेत्र को निर्दिष्ट किया जाता है उसके द्वारा कम सूचना प्राप्त होती है अर्थात् उपक्षेत्र में दिये गये उपचार या परस्परक्रिया की अपेक्षा मुख्य क्षेत्र उपचार प्रभावो की कम सूक्ष्मता से परीक्षा होती है। इस कारण उस उपचार को जिसके लिए बड़े आकार के प्रयोगगत एककों की आवश्यकता हो या जिस उपचार में कम रुचि हो मुख्य क्षेत्र में नियत करना चाहिये। उपक्षेत्र में दिये गये उपचार की अपेक्षा, उप-उपक्षेत्र में दिये उपचार के प्रति अधिक सूचना प्राप्त होती है तथा परिणाम अधिक परिशुद्ध होते हैं। यही क्रम चलता रहता है। इस तथ्य की पुष्टि प्रसरण-विश्लेषण सारणी में प्रयोग त्रुटियों को देखने से भी होती है। मुख्य क्षेत्र के लिए प्रयोग-त्रुटि की स्वातन्त्र्य-संख्या, उपक्षेत्र के लिए दी गई प्रयोग त्रुटि की स्वातन्त्र्य-संख्या से सदैव कम होती है। इसी प्रकार उपक्षेत्र के लिए प्रयोग त्रुटि की स्व० को०, उप-उपक्षेत्र के लिए प्रयोग त्रुटि की स्व० को० से कम होती है। इस अभिकल्पना के लिए सांख्यिकीय प्रतिरूप व व्यापक प्रसरण विश्लेषण सारणी की रूपरेखा निम्न होती है —

सांख्यिकीय प्रतिरूप

माना कि उपक्षेत्र अभिकल्पना में दो कारक (उपचार) A और B है जिनके स्तर क्रमश. p और q हैं। माना कि उपचार A को मुख्य क्षेत्र में और उपचार B को उपक्षेत्र में दिया गया है। प्रयोग में पुनरावृत्ति-संख्या r है तो प्रतिरूप निम्न होता है :—

$$X_{ijk} = \mu + \alpha_i + \rho_k + e_{ik} + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \eta_{ijk} \qquad \text{....(21.33)}$$

$$i = 1, 2, 3, \ldots, p$$

$$j = 1, 2, 3, \ldots, q$$

$$k = 1, 2, 3, \ldots, r$$

और $\quad e_{ik} \sim N\ (0, \sigma_e^2) \quad \eta_{ijk} = N\ (0, \sigma^2_{\eta}\ )$

उपर्युक्त विपाटित क्षेत्र प्रभिकल्पना के लिए प्रसरण विश्लेषण सारणी
(प्रतिरूप I)
सारणी 21 16

विचरण स्रोत	स्व० को०	व० यो०	मा० व० यो०	F–मान	प्रत्याशित मा० व० यो०
मुख्यक्षेत्र					
पुनरावृत्ति	$(r-1)$	R_{xx}	$\frac{R_{xx}}{(r-1)}=R'$	$\frac{R'}{E_a'}=F_R$	$\sigma^2_a+q\sigma^2_\eta+\frac{pp}{r-1}\sum_k \rho_k^2$
A	$(p-1)$	A_{xx}	$\frac{A_{xx}}{(p-1)}=A'$	$A'/E'_a=F_a$	$\sigma^2_a+q\sigma^2_\eta+\frac{rb}{p-1}\sum_i \alpha^2$
त्रुटि (a)	$(r-1)\ (p-1)$	$(E_a)_{xx}$	$\frac{(E_a)_{xx}}{(r-1)\ (p-1)}=E_a'$		$\sigma_a^2+q\sigma^2_\eta$
उपक्षेत्र					
B	$(q-1)$	B_{xx}	$\frac{B_{xx}}{q-1}=B'$	$B'/E_b'=F_b$	$\sigma^2_\eta+\frac{rp}{q-1}\sum_j \beta^2_j$
A×B	$(p-1)\ (q-1)$	$(AB)_{xx}$	$\frac{(AB)_{xx}}{(p-1)(q-1)}=(AB)'$	$\frac{(AB)'}{E'_b}=E_{ab}$	$\sigma^2_\eta+\frac{r}{(p-1)(q-1)}\sum_i\sum_j(\alpha\beta)_{ij}^2$
त्रुटि (b)	$p\ (r-1)(q-1)$	$(E_b)_{xx}$	$\frac{(E_b)_{xx}}{p\ (r-1)(q-1)}=E_b'$		σ^2_η
कुल	$rpq-1$	$\sum_{i,j,k} X^2_{ijk}-\frac{G^2}{rpq}$			

प्रतिरूप (21 33) में ρ_k, kवीं पुनरावृत्तियों का वास्तविक प्रभाव है e_{ik} मुख्य क्षेत्रों के लिए प्रयोग त्रुटि है और η_{ijk} उपक्षेत्रों के लिए प्रयोग त्रुटि है। μ व्यापक माध्य है। α, β_j, $(\alpha\beta)_{ij}$ क्रमश: मुख्य प्रभाव A व B और परस्परक्रिया A B के वास्तविक प्रभाव हैं।

इन प्रसरण विश्लेषण के हेतु, वर्ग योग सामान्य विधि से ज्ञात किये जा सकते हैं जिसकी विधि बहुउपादानीय प्रयोगों के साथ पहले ही दी जा चुकी है।

यदि प्रयोगों में तीन या तीन से अधिक उपचार हों तो उपर्युक्त सांख्यिकीय प्रतिरूप को विस्तारित किया जा सकता है।

युगल माध्यों में अन्तर की मानक त्रुटि

(1) मुख्य क्षेत्र उपचार के दो स्तरों में माध्य अन्तर की मानक त्रुटि

$$s_{\bar{d}}=\sqrt{\frac{2E'_a}{rq}} \qquad \text{....(21.34)}$$

(2) उपक्षेत्र उपचार के दो स्तरों में माध्य अन्तर की मानक त्रुटि,

$$s_{\bar{d}}=\sqrt{\frac{2E'_a}{rp}} \qquad \text{....(21.35)}$$

(3) परस्पर क्रिया के दो स्तरों में माध्य अन्तर की मानक त्रुटि,

$$s_{\bar{d}}=\sqrt{\frac{2(AB)'}{rp}} \qquad \text{....(21.36)}$$

(4) a के दो माध्यों के अन्तर की मानक त्रुटि जबकि b का स्तर वही हो,

$$s_{\bar{d}}=\sqrt{\frac{2\{(q-1)E_b+E_a\}}{rq}} \qquad \text{....(21 37)}$$

उपर्युक्त मानक त्रुटियों के प्रति सूत्रों में अकन पद्धति सारणी (21.16) के अनुसार है। इसी प्रकार से मानक त्रुटि के प्रति सूत्र उप-उपक्षेत्र के लिए भी दिये जा सकते हैं। इन सूत्रों में केवल भाजन में अन्तर करना होता है। इससे अतिरिक्त उपचारों में अन्तरों की संख्या बढ़ जाती है।

उदाहरण 21 9 : मक्का की पांच प्रजातियों में अन्तर तथा प्रत्येक पर नाइट्रोजन के चार स्तरों का प्रभाव जानने के हेतु प्रयोग किया गया। प्रयोग का विन्यास विपाटित क्षेत्र अभिकल्पना में किया गया जिसमें तीन पुनरावृत्तियाँ थीं। मक्का की प्रजातियों को मुख्य क्षेत्र में तथा नाइट्रोजन की मात्राओं को उपक्षेत्र में दिया गया। प्रत्येक उपक्षेत्र का आकार 10मी० × 1.5मी० रक्खा गया है, इस प्रयोग द्वारा प्राप्त मक्का की उपज किलो-ग्राम प्रति भूखण्ड निम्न थी :—

मक्का के दानो की उपज (किलोग्राम प्रति भूखण्ड)

मक्का की प्रजाति	नाइट्रोजन का स्तर (किलो० प्रति हेक्टर)	R_1	R_2	R_3	योग	माध्य
	0	4 25	12·24	10 88	27·37	9 12
v_1	60	6 25	4 59	7·24	18 08	6 03
	120	7 04	10 24	4·91	22 19	7·40
	180	6·65	9 61	6 66	22 92	7 64
	0	10 84	9 01	7 81	27·66	9 22
v_2	60	16 45	11 27	8 65	36 37	12 12
	120	10 76	7·14	6 44	24·34	8 11
	180	6 42	7 85	8·48	22 75	7·58
	0	4·60	5 76	3 76	14·12	4·77
v_3	60	7 27	8 32	3·16	18·75	6 25
	120	9 08	11 40	8 73	29 21	9 74
	180	10·88	9 63	7 40	27 91	9·30
	0	6 31	5 30	6 93	18·54	6·18
v_4	60	5 64	7 16	6 92	19 72	6·57
	120	6·33	7 68	6 99	21·00	7·00
	180	2 59	3 61	2 27	8·47	2·82
	0	2 46	2 28	3·74	8 48	0 83
v_5	60	6·32	7 01	10 35	23 68	7 89
	120	5 69	6 85	5 96	18 50	6 17
	180	6 96	7 22	10 47	24 65	8 22
योग		142·76	154 17	137 75	434 71	

इस प्रयोग के न्यास का विश्लेषण एवं प्राप्त परिणामो का निर्वचन निम्न प्रकार कर सकते हैं। प्रसरण विश्लेषण के हेतु निम्न संख्याओं का परिकलन किया —

मुख्य क्षेत्र के लिए वर्ग योग निम्न सारणी बनाकर सुगमता से ज्ञात कर सकते हैं —

	R_1	R_2	R_3	योग
v_1	24·19	36 68	29 69	90 56
v_2	44 47	35 27	31 38	111·12
v_3	31 83	35 11	23 05	89 99
v_4	20 87	23 75	23·11	67 73
v_5	21 43	23 36	30 52	75 31
योग	142 79	154 17	137 75	434 71

$$\text{स० का०} = \frac{(434\ 71)^2}{60}$$

$$= 3149\ 54$$

$$\text{पुनरावृत्ति व०य०} = \frac{1}{20}\ (142\ 79^2 + 154\ 17^2 + 137\ 75^2) - \text{स० का०}$$

$$= 3156\ 62 - 3149\ 54$$

$$= 7\ 08$$

$$\text{V के कारण व०य०} = \frac{1}{12}\ (90\ 56^2 + 111\ 12^2 + 89\ 99^2 + 67\ 73^2 + 75{\cdot}31^2) - \text{स० का०}$$

$$= 3242\ 15 - 3149\ 54$$

$$= 92\ 61$$

मुख्य क्षेत्र योग $V_1R_1 = 4\ 25 + 6\ 25 + 7\ 04 + 6\ 65 = 24\ 19, \ldots\ldots,$
$V_5R_3 = 3\ 74 + 10\ 35 + 5\ 96 + 10\ 47 = 30\ 52$

$$\text{मुख्य क्षेत्र पूर्ण व०य०} = \frac{1}{4}\ (24{\cdot}19^2 + 44\ 47^2 + \ldots + 23\ 11^2 + 30\ 52^2) - \text{स०का०}$$

$$= 3316\ 40 - 3149\ 54$$

$$= 166\ 86$$

$$\text{त्रुटि (a)} = 166\ 86 - \ 92\ 61 - 7\ 08$$

$$= 67\ 16$$

$N_0 = 96\ 17,\ N_{60} - 116\ 60,\ N_{120} = 115\ 24,\ N_{180} = 106\ 70$

$$\text{N के कारण व०य०} = \frac{1}{15}\ (96\ 17^2 + 116\ 60^2 + 115\ 24^2 + 106\ 70^2) - \text{स०का०}$$

$$= 3167\ 29 - 3149\ 54$$

$$= 17\ 75$$

$$= \frac{1}{3}\ (27\ 37^2 + 18\ 08^2 + \quad + 18\ 50^2 + 24\ 65^2) - \text{स० का०}$$

$$= 3366\ 54 - 3149\ 54$$

$$= 217\ 00$$

$V \times N$ व०य० = उपचार व०य० − N व०य० − V व०य०

$= 217\ 00 - 92\ 61 - 17\ 75$

$= 106\ 64$

पूर्ण व०यो० $= (4\ 25^2 + 6\ 25^2 + \quad 5\ 96^2 + 10\ 47^2)$ − स०का०

$= 3594\ 53 - 3149\ 54$

$= 444\ 99$

व्यापक प्रसरण-विश्लेषण सारणी

विचरण स्रोत	स्व० को०	व०यो०	मा०व०यो०	F-मान	सारणीबद्ध 5%-F-मान
मुख्य क्षेत्र					
पुनरावृत्ति	2	7 08	3 54	0 42	4 46
V	4	92 61	23 15	2 75	3 84
त्रुटि (a)	8	67 16	8 39		
उपक्षेत्र					
N	3	17 75	5 92	1 15	2 92
V×N	12	106 64	8 89	1 74	2 09
त्रुटि	30	153 75	5 12		
पूर्ण	59	444 99			

उपर्युक्त सारणी के अन्तिम स्तम्भ में दिये F के सारणी (परि० प०-5 2) द्वारा प्राप्त मानों से तदनुसार परिकलित F-मानों की तुलना करने पर ज्ञात होता है कि कोई भी मुख्य प्रभाव या परस्परक्रिया सार्थक नहीं है।

V के माध्य की मानक त्रुटि $= \sqrt{\dfrac{E_a}{r \times q}}$

$= \sqrt{\dfrac{8\ 39}{3 \times 4}}$

$= 0\ 8361$

N के माध्य की मानक त्रुटि $= \sqrt{\dfrac{E_b}{r \times p}}$

$= \sqrt{\dfrac{5\ 12}{3 \times 5}}$

$= 5842$

N के माध्य की किसी एक प्रजाति के लिए मानक त्रुटि

$$= \sqrt{\frac{E_b}{r}} = \sqrt{\frac{5.12}{3}} = 1.3063$$

एक प्रजाति की, N के किसी एक स्तर पर मानक त्रुटि,

$$= \sqrt{\frac{(q-1)\ E_b + E_a}{r \times q}} = \sqrt{\frac{3 \times 5.12 + 8.39}{3 \times 4}} = 1.4068$$

विपाटित खण्डक या पट्टी क्षेत्र अभिकल्पना

कभी-कभी प्रयोग मे लिए गये दो उपचार ऐसे होते हैं कि उनमे से किसी एक को भी लघु प्रयोग एकको मे प्रयुक्त करना सम्भव नही होता है या उन दोनो उपचारो के मुख्य प्रभाव का परिशुद्धि से आकलन करने या उनके प्रति परिकल्पनाओ की परिशुद्धि से परीक्षा करने का उद्देश्य नही होता है। किन्तु इन उपचारो की परस्परक्रिया मे अभिरुचि होती है अर्थात् उपचार A तथा B के उन स्तरो को जानना होता है कि जिनका सम्मिलित रूप मे प्रभाव सर्वोत्तम हो। जैसे दो कारक जुताई व अन्तरण (ploughing and spacing) हो या जुताई व फुहार करने वाले (spraying) उपचार आदि के लिए विपाटित खण्डक अभिकल्पना उपयुक्त है।

विपाटित खण्डक अभिकल्पना मे खण्डक एक दूसरे के परस्पर लाबिक पट्टियो (मुख्य क्षेत्रो) में दोनो उपचारो के स्तरो के अनुसार विभाजित होते हैं। एक ओर की पट्टियों मे एक उपचार और दूसरी ओर की पट्टियो मे दूसरे उपचार को याहच्छिकीकृत रीति से नियत कर दिया जाता है। इस प्रकार आवश्यकता अनुसार पुनरावृत्तियो का गठन कर लिया जाता है। माना कि दो उपचार A तथा B हैं। माना कि A के तीन स्तर और B के चार स्तर हैं तथा दो पुनरावृत्तियो को लिया गया है तो प्रयोग विन्यास का रूप निम्न होता है।

पुनरावृत्ति 1

	b_2	b_3	b_0	b_1
a_0				
a_2				
a_1				

पुनरावृत्ति 2

	b_1	b_0	b_3	b_2
a_1				
a_0				
a_2				

माना कि सामान्य रूप मे A के P स्तर हैं और B के q स्तर हैं तथा प्रयोग मे r

पुनरावृत्तियाँ ली गई हैं। तो व्यापक प्रसरण विश्लेषण सारणी की रूपरेखा निम्न होती है :—

(सारणी 21 17)

विचरण स्रोत	स्व० को०
पुनरावृत्ति	(r − 1)
A	(p − 1)
त्रुटि (a)	(r − 1)(p − 1)
B	(q − 1)
त्रुटि (b) त्रुटि	(r − 1)(q − 1)
A×B	(p − 1)(q − 1)
त्रुटि (c)	(r − 1)(p − 1)(q − 1)
पूर्ण	(rpq − 1)

किसी भी विपाटित खण्डक प्रभिकल्पना की स्थिति में वर्ग योग सामान्य रूप से परिकलित किये जाते हैं। इसका विश्लेषण विपाटित क्षेत्र प्रभिकल्पना जैसा ही है प्रत उसके लिए उदाहरण अलग से नहीं दिया गया है।

विपाटित खण्डक प्रभिकल्पना में संकरण

यदा-कदा ऐसी स्थिति उत्पन्न होती है कि उपक्षेत्र में दिये जाने वाले कारक बहु-उपादानी होते हैं और इन सचयों की सख्या बृहत् होती है। यदि इन सब उपक्षेत्र उपचारों (सचयों) को एक ही मुख्य क्षेत्र में निदिष्ट कर दिया जाये तो मुख्य क्षेत्र की सजातीयता बनाए रखना सम्भव नहीं होता है। प्रत प्रत्येक मुख्य क्षेत्र को खण्डकों में विभाजित कर दिया जाता है और सकरण का प्रयोग करके उपक्षेत्र उपचारों को इन खण्डकों में नियमानुसार यादृच्छिक रीति से नियत कर दिया जाता है। इस प्रभिकल्पना का प्रसरण-विश्लेषण तथा परिकल्पना परीक्षा सामान्य रूप से की जाती है। इसके विश्लेषण में केवल इतना अन्तर करना होता है कि प्रसरण-विश्लेषण सारणी में उपक्षेत्र के प्रति विचरण स्रोत में सकरणित उपचार प्रभाव को त्रुटि में सम्मिलित कर दिया जाता है।

प्रश्नावली

1. किसी प्रयोगगत प्रभिकल्पना के सांख्यिकीय प्रतिरूप से आप क्या समझते हैं।
2. 'सांख्यिकीय प्रतिरूप प्रसरण-विश्लेषण का मूल आधार है', इस तथ्य का विवेचन कीजिए।

3. प्रसरण विश्लेषण किन-किन कल्पनाओं पर आधारित है ? प्रसरण विश्लेषण का मूल सिद्धान्त बताइए।

4. चार व्यक्तियों ने एक चूर्ण पदार्थ के अलग-अलग प्रतिदर्श चयन किये और इन प्रतिदर्शों में नमी की प्रतिशत मात्रा निम्न प्रकार थी :—

प्रतिदर्श	नमी की प्रतिशत मात्रा				
1.	9·3	10 5	11 0	12 5	
2.	7·7	9·6	3·5		
3.	12·5	13 4	18·0	17 4	12 4
4.	11·4	9 6			

उपर्युक्त न्यास का प्रसरण-विश्लेषण करके विभिन्न प्रतिदर्शों में माध्य नमी की प्रतिशत मात्रा की समानता की परीक्षा कीजिए।

5. निम्न सारणी में गेहूँ की उपज (बुशल प्रति एकड़) दी गई है जो कि प्रयोगगत भूखण्डकों पर आधारित है, जिनमें एक खाद की चार मात्राएँ लगाई गई थीं। प्रत्येक खाद की मात्रा को क्षेत्र के पाँच खण्डकों में यादृच्छिकीकृत रीति से प्रयुक्त किया गया था :—

खण्डक संख्या	उपचार (खाद की मात्रा)			
	1	2	3	4
1.	21	24	34	40
2.	25	33	26	47
3.	31	34	38	39
4.	17	39	32	41
5.	26	35	35	33

प्रसरण विश्लेषण कीजिए और परिणामों को दीजिए।

(बम्बई, 1970)

6. निम्न सारणी में गेहूँ की उपज (क्विंटल प्रति एकड़) पाँच खाद उपचारों के लिए दी गई है। प्रयोग का विन्यास लैटिन वर्ग है।

पंक्ति	स्तम्भ				
1	(C) 13.8	(A) 8.4	(E) 20.8	(B) 9.6	(D) 16.5
2	(B) 13.4	(E) 17.5	(D) 18.4	(C) 10.2	(A) 9.8
3	(A) 12.4	(C) 15.2	(B) 13.4	(D) 15.6	(E) 15.2
4	(E) 17.8	(D) 16.6	(C) 12.8	(A) 6.8	(B) 15.8
5.	(D) 13.0	(B) 18.0	(A) 10.4	(E) 18.4	(C) 14.0

(a) उपर्युक्त आँकड़ों का प्रसरण विश्लेषण कीजिए और उपचारों की सार्थकता परीक्षा कीजिए।

(b) युगल उपचार माध्यों की परीक्षा डंकन बहुपरास परीक्षा द्वारा कीजिए।

7 मक्का की तीन प्रजातियों पर फासफोरस (P) के चार स्तरों और पोटाश (K) के दो स्तरों के संचयों का प्रभाव जानने के लिए एक प्रयोग किया गया। प्रयोग को विपाटित क्षेत्र अभिकल्पना में व्यवस्थित किया गया।

प्रजातियों को V_1, V_2, V_3 से और फासफोरस की मात्राओं 0, 15, 30, 45 किलो० प्रति हैक्टर को P_0, P_1, P_2, P_3 और पोटाश की मात्राओं 0 व 50 किलो० प्रति हैक्टर को K_0 व K_1 द्वारा सूचित किया गया है। प्रजातियों को मुख्य क्षेत्रों में और उपचार संचयों को उपक्षेत्रों में प्रयुक्त किया गया। इस प्रयोग द्वारा प्राप्त 100 ग्राम भुट्टे में दानों की मात्रा निम्न प्रकार थी :—

पुनरावृत्ति 1

प्रजाति	(PK) उपचार संचय तथा भुट्टे में दानों की मात्रा					
V_2	(31) 69.1	(01) 66.5	(20) 70.8	(10) 65.9	(30) 69.7	(00) 61.5
					(11) 60.3	(21) 66.6
V_1	(10) 50.8	(11) 53.4	(21) 47.4	(20) 53.2	(01) 48.1	(31) 55.0
					(00) 51.7	(30) 53.4
V_3	(00) 47.5	(11) 52.2	(21) 59.2	(31) 61.9	(30) 61.9	(10) 61·6
					(01) 51.6	(20) 62.2

पुनरावृत्ति 2

प्रजाति				
V_3	(01) 55.1	(31) 56.9	(20) 56.7	(30) 60.7
	(10) 52.2	(00) 53.9	(21) 59.9	(11) 57.8
V_2	(00) 60.5	(01) 61.3	(30) 68.2	(11) 69.6
	(31) 74.5	(10) 69.6	(20) 63.2	(21) 66.4
V_1	(21) 58.1	(11) 57.1	(00) 48.4	(01) 53.5
	(20) 77.7	(30) 57.5	(31) 61.4	(10) 58.8

(i) उपर्युक्त विपाटित क्षेत्र अभिकल्पना का प्रसरण विश्लेषण कीजिए और निष्कर्ष निकालिए।

(ii) फासफोरस व पोटास के मुख्य प्रभावो एव परस्पर-क्रियाओं की सार्थकता की परीक्षा कीजिए।

8 एक 3×2×2 बहु-उपादानीय प्रयोग को याद्दच्छिकीकृत पूर्ण खण्डक अभिकल्पना मे व्यवस्थित किया गया। इसमे तीन पुनरावृत्तिया का प्रयोग किया गया। तीन उपचारो A, B, C के सचयो के लिए प्रेक्षण (किग्रा॰ में) निम्न प्रकार थे :—

उपचार सचय			पुनरावृत्ति		
			R_1	R_2	R_3
0	0	0	8 8	9 0	9·3
0	0	1	12 7	10 5	10 4
0	1	0	7 4	11 9	11·8
0	1	1	8 6	16 9	13 1
1	0	0	20 6	9 1	15 0
1	0	1	12 2	12 6	16·4
1	1	0	15 8	16 2	20 0
1	1	1	25 2	13 5	20 6
2	0	0	5 9	15 0	10 5
2	0	1	12·5	17 4	20 5
2	1	0	5 90	18 2	17 6
2	1	1	5 5	9 75	18·4

उपर्युक्त न्यास का प्रसरण-विश्लेषण कीजिए तथा मुख्य प्रभावों व परस्पर-क्रियाओं की सार्थकता की परीक्षा कीजिए।

9 निम्न याद्दच्छिकीकृत खण्डक अभिकल्पना मे एक अप्राप्त मान होने की स्थिति में प्रसरण विश्लेषण कीजिए।

	पुनरावृत्ति			
उपचार	R_1	R_2	R_3	R_4
1	2 10	1 75	3·45	0 57
2	2·55	1·72	2 23	2 40
3	2 60	1 33	2 60	2 20
4	6 00	1 17	*	1 93
5	3 35	1 30	1 73	1 77
6	2 23	2 33	2 75	2 70
7	1 60	1 80	3 10	2 05

* लुप्तमान

10. एक बहु-उपादानीय प्रयोग में तीन कारक (A, B, C) लिये गये जिनके स्तर क्रमश: (2×3×4) थे। प्रयोग में दो पुनरावृत्तियाँ ली गईं। इस प्रयोग में प्राप्त प्रेक्षणों से निम्न वर्ग-योग परिकलित किये गये —

विचरण स्रोत	व० यो०
पुनरावृत्ति	13·34
A	53·55
B	5·26
C	4·27
AB	8·27
AC	23·99
BC	25·43
ABC	6·85
पूर्ण	453·99

उपर्युक्त आंशिक परिकलनों की सहायता से पूर्ण प्रसरण-विश्लेषण सारणी बनाइये और यथासम्भव परिणाम निकालकर उनका निर्वचन कीजिये।

11. प्रसरण-विश्लेषण में वैषम्य की उपयोगिता पर टिप्पणी लिखिये।



22 रूपान्तरण

यदि किसी न्यास से यह संकेत मिले कि उसके विषय में प्रसरण-विश्लेषण, t–परीक्षा, काई वर्ग-परीक्षा या किसी अन्य परीक्षा के लिए जो अभिधारणाएँ की गई हैं वे सत्य नहीं हैं तो ऐसे न्यास के लिए इन परीक्षाओं का उपयोग उचित नहीं है। इस स्थिति में या तो अप्राचल परीक्षाओं का उपयोग कर सकते हैं या न्यास का रूपान्तरण इस प्रकार कर दिया जाता है कि रूपान्तरित न्यास प्रसरण-विश्लेषण या परीक्षाओं के प्रति ली गई अभिधारणाओं का पालन करने लगे। जैसे यादृच्छिकीकृत पूर्ण खण्डक अभिकल्पना का गणितीय प्रतिरूप

$$Y_{ij}=\mu+B_i+\tau_j+e_{ij}$$

है। इस प्रतिरूप के प्रति यह अभिधारणाएँ की गई हैं कि संघटक (μ, B_i, τ_j व e_{ij}) योज्य (Additive) हैं और त्रुटि e_{ij} स्वतन्त्र हैं और N $(0, \sigma_e^2)$ है। यदि किसी न्यास से ऐसा संकेत मिले कि संघटक गुणनात्मक (Multiplicative) है अर्थात् $Y=\mu B_i \tau_j e_{ij}$ है तो ऐसी स्थिति में सामान्य प्रसरण-विश्लेषण नहीं किया जा सकता है। किन्तु यदि इस प्रतिरूप का लघुगणक में रूपान्तरण कर दिया जावे तो संघटक योज्य एवं समविचाली (homoscedastic) हो जाते हैं। इस स्थिति में

$$\log Y_{ij}=\log \mu+\log B_i+\log \tau_j+\log e_{ij}$$

अतः प्रेक्षणों का लघुगणक लेकर प्रसरण विश्लेषण करना उपयुक्त है। केवल लघुगणक रूपान्तरण ही नहीं, अनेक अन्य रूपान्तरण जैसे वर्गमूल, प्रतिलोम रूपान्तरण आदि विभिन्न स्थितियों में उपयुक्त हैं। कुछ मुख्य रूपान्तरणों का वर्णन यहाँ किया गया है।

यह ध्यान रहे कि सार्थकता-परीक्षा रूपान्तरित न्यास के आधार पर ही की जाती है। किन्तु यदि माध्य, प्रसरण आदि का आकलन करना हो तो मूल प्रेक्षणों द्वारा ही किया जाता है अन्यथा रूपान्तरण के पश्चात् इनकी मान–इकाई में परिवर्तन हो जाता है जो कि आकलन के हेतु स्वीकृत नहीं है। रूपान्तरण उचित है या नहीं? इसकी पुष्टि करने के हेतु प्रतिदर्श प्रेक्षणों को प्रसामान्य प्रायिकता ग्राफ पेपर[1] पर आलेखित कर लिया जाता है और इन बिन्दुओं को मिलाकर वक्र के रूप तथा विषमता के विषय में पता कर लिया जाता है।

यदि त्रुटि e_{ijk} का बंटन विषम अर्थात् असामान्य हो तो F तथा t परीक्षाओं द्वारा बहुत से परिणाम सार्थक सिद्ध होते हैं जबकि वे वास्तव में सार्थक नहीं होते हैं। इसके अतिरिक्त उपचार (Treatment) माध्य जो प्रेक्षणों द्वारा परिकलित किया जाता है वह समग्र के या उपचार माध्य का परिशुद्ध आकलन नहीं होता है। यह भी देखा गया है कि

१. एक विशेष प्रकार का ग्राफ पेपर जो कि वक्र को एक विकृत ऊर्ध्वाधर मापक्रम (distorted vertical scale) के द्वारा एक सरल रेखा में बदल देता है प्रसामान्य प्रायिकता ग्राफ पेपर कहलाता है।

यदि चर का बटन प्रप्रसामान्य हो तो प्रसरण व माध्य में परस्पर सम्बन्ध होता है जैसे द्विपद बटन के माध्य np व प्रसरण npq=np (1–p), में सम्बन्ध है या प्वासों बटन के माध्य व प्रसरण समान होते हैं आदि। अतः यदि उपचार या पुनरावृत्ति (replication) के प्रभाव वृहत् हों तो प्रसरण असमान होने की सम्भावना होती है। ऐसी स्थिति में रूपान्तरण द्वारा प्रसरणों को स्थिर करना अत्यन्त आवश्यक हो जाता है। रूपान्तरण इस प्रकार का होना चाहिये कि जिससे प्रसरण लगभग पूर्णतया माध्य से स्वतन्त्र हो जाये।

बार्टलैट (Bartlett) ने एक आदर्श रूपान्तरण के हेतु निम्न आवश्यकताओं पर बल दिया।

(1) रूपान्तरित चर का प्रसरण, माध्य में परिवर्तनों से प्रभावित नहीं होना चाहिए अर्थात् प्रसरण व माध्य सदैव स्वतन्त्र रहने चाहिये।

(2) रूपान्तरित चर का बटन प्रसामान्य होना चाहिये।

(3) रूपान्तरण के पश्चात् चर [illegible] माध्य, समग्र माध्य का एक अच्छा आकलक होना चाहिए।

(4) रूपान्तरण के उपरान्त, सघटकों के वास्तविक प्रभाव रैखिक एवं योज्य होना चाहिए।

उपर्युक्त आवश्यकताओं के अतिरिक्त प्राय निम्न गुणों की भी आवश्यकता होती है :—

(क) किसी प्रभिकल्प में त्रुटियाँ e_{ij} स्वतन्त्र एवं प्रसामान्य बटित होनी चाहिए।

(ख) प्रेक्षणों का प्रसरण स्थिर होना चाहिए। यदि स्थिर न भी हो तो विचरण की पद्धति ज्ञात होनी चाहिए।

कुछ मुख्य रूपान्तरण निम्न प्रकार हैं

यहाँ केवल रूपान्तरणों का ही वर्णन किया गया है। किसी भी न्यास के प्रसरण विश्लेषण करने की विधियाँ अध्याय (21) में दी गई हैं।

लघुगणकीय रूपान्तरण

इस प्रकार का रूपान्तरण तभी उचित है जबकि चरों के प्रसरण व माध्य में धनात्मक सहसम्बन्ध हो अर्थात् मानक विचलन माध्य के समानुपाती हो। व्यावहारिक दृष्टि से यह कहें कि यदि माध्य वृहत् हो और मानक विचलन भी वृहत् हो तो लघुगणक रूपान्तरण करना चाहिए। माना कि $\sigma=c\mu$ या $\sigma^2=c^2\mu^2$ हो तो अभिष्ट रूपान्तरण ज्ञात करने के लिए फलन $\int \frac{dx}{\sqrt{\phi(x)}}$ ज्ञात करते हैं। जबकि $\phi(x)$ प्रसरण σ^2 का फलन है अतः इस स्थिति में $\phi(x)=c^2x^2$ और

$$\int \frac{dx}{\sqrt{c^2x^2}}=\frac{1}{c}\log x \qquad ....(22\cdot1)$$

अतः (22·1) के अनुसार लघुगणक रूपान्तरण उचित है।

यह रूपान्तरण उस स्थिति में भी करना चाहिए जब सघटकों के प्रभाव गुणनात्मक हों क्योंकि इस रूपान्तरण द्वारा गुणनात्मक प्रभाव योज्य प्रभावों में परिवर्तित हो जाते हैं।

यदि चर जिसका लघुगणक रूपान्तरण करना हो और उसके मानो मे एक भी मान शून्य हो तो लघुगणक रूपान्तरण मे समस्या उत्पन्न हो जाती है क्योकि $\log 0 = -\infty$ है। अत इस स्थिति म X के स्थान पर $(x+1)$ का लघुगणक रूपान्तरण किया जाता है अर्थात् रूपान्तरित चर $Y = \log_e (x+1)$ हो जाता है और उत्पन्न समस्या का निवारण हो जाता है।

यदि विचर मान केवल दशमलव मे ही हो तो ऐसी स्थिति मे 10,100 या अन्य 10 की बृहत् घात से मानो को गुणा करके लघुगणक लेना चाहिए। इस प्रकार लघुगणकीय मानो को लिखने मे सुविधा हो जाती है।

वर्गमूल रूपान्तरण

वर्गमूल रूपान्तरण इसी स्थिति मे उचित है कि न्यास प्वासों बटन का पालन करता हो। इस प्रकार के न्यास का सुगमता स पता चल जाता है यदि न्यास किसी विरल घटना की गणना पर आधारित हो जैसे एक उत्पाद (product) मे दोषपूर्ण वस्तुओ की सख्या, एक पेड की पत्ती पर कीटो की सख्या या विमान दुर्घटनाओ की सख्या आदि। इन सब ही घटनाओ के घटित होने की प्रायिकता बहुत कम है अत यह घटनाएँ प्वासों बटन का पालन करती हैं। इस बटन मे,

$$\sigma^2 = \mu \text{ अतः } \phi(x) = x \text{ और}$$

$$\int \frac{dx}{\phi(x)} = \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} \qquad \text{....(22 2)}$$

इससे स्पष्ट है कि वर्गमूल बटन उपर्युक्त प्रकार की स्थितियो मे उपयुक्त है। चर का रूपान्तरण करते समय स्थिराक 2 का प्रयोग करन की कोई आवश्यकता नही है क्योकि अचर से गुणा करने का बटन क रूप पर कोई प्रभाव नही पडता है। बार्टलेट ने बताया कि यदि सख्याएँ 0 से 10 के बीच में हो तो $\sqrt{x}$ की अपेक्षा $\sqrt{x+\frac{1}{2}}$ एक अच्छा रूपान्तरण है। कर्टिस (curtiss) ने बताया कि यदि सख्याएँ 15 तक हो तो भी $\sqrt{x+\frac{1}{2}}$ रूपान्तरण $\sqrt{x}$ से उत्तम है।

इस रूपान्तरण मे और अधिक परिष्कार महत्त्वपूर्ण नही है यद्यपि कुछ अन्य सुधार भी सुझाये गये है जैसे यदि सख्याएँ लघु हो तो कभी-कभी रूपान्तरण $\sqrt{X+1}$ या $\sqrt{X}+\sqrt{X+1}$ अधिक प्रमाणित रूप मे प्रसरण की स्थिरता प्रदान करते हैं। इस प्रकार रूपान्तरो के अन्तर्गत चरो के प्रसरणो मे सार्थक अन्तर नही रहता है।

उदाहरण 22.1 मक्का के प्रजाति-परीक्षण के लिए किये गये एक प्रयोग मे पेडो की सख्या तथा जड से गिरन (root lodging) की सख्या दी गई है।

प्रजाति	पेड़ों की संख्या			जड़ से पेड़ गिरने की संख्या		
	R_1	R_2	R_3	R_1	R_2	R_3
401	9	24	23	0	2	4
402	16	23	23	1	2	1
403	21	28	21	2	3	2
404	13	22	16	1	1	0
405	16	21	22	11	2	1
406	14	24	14	12	3	0
407	23	14	22	1	1	1
408	16	21	20	4	0	0
409	26	24	22	1	1	2
410	22	24	21	2	3	3

यदि लक्षण जड़ से पेड़ों को गिरने के प्रति प्रजातियों में अन्तर की परीक्षा करनी हो तो विश्लेषण करने से पूर्व दी गई पेड़ों की संख्या का रूपान्तरण करना आवश्यक है। न्यास को देखने से स्पष्ट है कि इसमें प्रेक्षण 0–12 तक है अतः इसके लिए रूपान्तरण $\sqrt{X+\frac{1}{2}}$ उपयुक्त है।

प्रायः न्यास को समान पेड़ों की संख्या के आधार पर परिवर्तित करके, रूपान्तरण $\sqrt{X+\frac{1}{2}}$ का प्रयोग करना अच्छा है क्योंकि इस प्रकार प्रजातियों की तुलना विश्वसनीय होती है।

यहाँ केवल रूपान्तरण का प्रदर्शन करने के हेतु न्यास का रूपान्तरण करके दिखाया गया है।

रूपान्तरित न्यास $\sqrt{X+\frac{1}{2}}$

प्रजाति	जड़ से पेड़ गिरने की संख्या		
	R_1	R_2	R_3
401	0·707	1·581	2·121
402	1·225	1·581	1·225
403	1·581	1·871	1·581
404	1·225	1·225	0·707
405	3·391	1·581	1·225
406	1·581	1·871	0·707
407	1·225	1·225	1·225
408	2·121	0·707	0·707
409	1·225	1·225	1·581
410	1·581	1·871	1·871

उपर्युक्त सारणी में दिया न्यास प्रसरण-विश्लेषण के लिए उपयुक्त है।

चापज्या या कोणीय रूपान्तरण

इस प्रकार रूपान्तरण मुख्यतया अनुपात या प्रतिशत के लिए अत्यन्त उपयुक्त है। यदि चर द्विपद बटन का पालन करता हो तो चापज्या रूपान्तरण करना चाहिए। यह पहले खण्ड में बताया जा चुका है कि प्रसरण npq माध्य np का फलन है। चापज्या रूपांतरण माध्य व प्रसरण को एक-दूसरे से स्वतन्त्र कर देता है। वास्तव में प्रसरण की समजातीयता को बनाये रखने के लिए भी रूपान्तरण $\theta = \arcsin\sqrt{p}$ का प्रयोग करना चाहिए। शब्द चापज्या या ज्या$^{-1}$ समानार्थक (synonymous) हैं। इस प्रकार θ वह कोण है कि जिसकी ज्या p के समान है। θ को रेडियन (radian) में भी नाप सकते हैं इस रूपान्तरण को सुगम करने के हेतु फिशर व येट्स (Fisher & Yates) द्वारा दी गई सारणी में p के विभिन्न मानों के लिए डिग्री θ में परिवर्तित मान दिये हुए हैं जिनका सीधा प्रयोग किया जा सकता है जैसे arcsin ·472=43·39° या sin^{-1} 43·39= 472

चापज्या रूपान्तरण की विशेषता यह है कि यह बटन की दोनों पुच्छों को खींचता है और बीच में भाग को दबाता है अर्थात् वक्र के रूप को लगभग प्रसामान्य कर देता है रूपान्तरित चर के बटन का प्रत्याशित प्रसरण

$$\sigma^2_{\theta} = \frac{(180)^2}{4\pi^2 n} = \frac{820\ 8}{n} \qquad \text{.... (22.3)}$$

जबकि प्रत्येक प्रतिशत स्वतन्त्र प्रेक्षणों की वृहद् संख्या पर आधारित है। यदि रेडियन (radians) में नापा गया हो तो

$$\sigma^2_{\theta} = \frac{1}{4n} \qquad \text{.... (22 4)}$$

यह ध्यान रहे कि माध्य को ज्ञात करने के लिए चापज्या द्वारा प्राप्त मान को फिर अनुपात में परिवर्तित करना होता है। जबकि $\sin^2 \theta = p$ यदि न्यास में प्रतिशत 30 और 70 के बीच विचरते हों तो चापज्या रूपान्तरण करने की आवश्यकता नहीं है।

उदाहरण 22 2 जैसा कि उदाहरण (22.1) में कहा गया है कि जड़ से पेड़ गिरने की संख्या को समान आधार पर परिवर्तित करना चाहिए। अतः पहले पेड़ों के गिरने की संख्या का पेड़ों की संख्या के प्रतिशत के रूप में रख दिया क्योंकि प्रतिशत में दिये हुए न्यास के लिए चापज्या रूपान्तरण उपयुक्त होता है. प्रतिशतों को चापज्या में रूपान्तरित करके सांख्यिकीय विश्लेषण के लिए प्रयोग में लाया जाता है।

तीनों पुनरावृत्तियों के लिए जड़ से पेड़ गिरने की प्रतिशत संख्या तथा तदनुसार चापज्या (कोणीय) मान निम्न सारणी में दिये गये हैं। चापज्या मान फिशर व येट्स द्वारा दी गई सारणी (परि० प–17) का प्रयोग करके लिखे गये हैं।

जड़ से पेड़ गिरने की प्रतिशत संख्या व चापज्या मान

	पुनरावृत्ति-1 (R_1)		पुनरावृत्ति-2 (R_2)		पुनरावृत्ति-3 (R_3)	
प्रजाति संख्या	प्रतिशत	चापज्या मान	प्रतिशत	चापज्या मान	प्रतिशत	चापज्या मान
401	0·0	0·0	8·3	16·74	14·7	24·65
402	6·2	14·42	8·7	17·15	4·3	11·97
403	9·5	17·95	10·7	19·9	9·5	17·95
404	7·7	16·00	4·5	12·25	0·0	0·0
405	68·7	55·98	9·5	17·95	4·5	12·25
406	14·3	22·22	12·5	20·70	0·0	0·0
407	4·3	11·97	7·1	15·45	4·5	12·25
408	25·0	30·06	0·0	0·0	0·0	0·0
409	38·1	38·06	4·2	11·83	9·1	17·56
410	9·1	17·56	2·5	20·70	14·3	22·22

चापज्या मानों को लेकर ही विश्लेषण किया जाना उचित है।

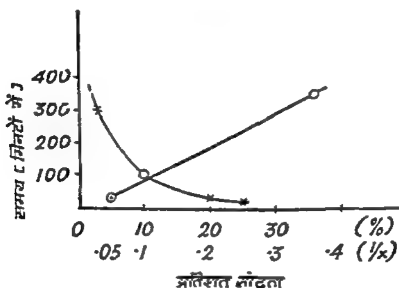
व्युत्क्रम रूपान्तरण

बहुत सी दर सम्बन्धी अनुभूतियों में प्रेक्षण किन्हीं क्रियाओं में इकाई समय के लिए या था समय के प्रति भाग के लिए होते हैं। जैसे एक चिड़िया उड़ते समय एक मिनट में कितनी बार पंख चलाती है, एक मुर्गी प्रति मास कितने अण्डे देती है, एक घण्टे में एक तितली एक फूल पर कितनी बार बैठती है इत्यादि। इस प्रकार के प्रेक्षणों को ग्राफ पेपर पर आलेखित किया जाये तो वक्र अतिपरवलय (Hyperbola) के समरूप होता है। अतः चर X और Y में गणितीय सम्बन्ध $XY=C$ या $(\alpha+\beta X)\,Y=1$ के अनुसार होता है इस प्रकार $Y=C.\frac{1}{X}$ या $X=C\,\frac{1}{Y}$ और $Y=\frac{1}{\alpha+\beta X}$ या $\alpha+\beta X=\frac{1}{Y}$ सम्बन्ध प्राप्त होते हैं। यदि चर Y का व्युत्क्रम रूपान्तरण कर दें अर्थात् $u=\frac{1}{Y}$ मान लें तो $X=Cu$ या $\alpha+\beta X=u$ के रूप में सम्बन्ध प्राप्त हो जाते हैं जो कि रैखिक हैं। अतः उपर्युक्त रूपान्तरण द्वारा रैखीय समाश्रयण ज्ञात किया जा सकता है या इससे फिर किसी भी प्रकार का उपयुक्त विश्लेषण किया जा सकता है।

उदाहरण 22.3 : पैरामीशियम (paramecium) के संयुग्मन क्रियाशीलता को कम करने के लिए फार्मेलीन (formalin) का प्रभाव देखा गया। फार्मेलीन की सांद्रता तथा क्रियाशीलता के समय निम्न प्रकार थे :—

पार्मेलीन की सांद्रता प्रतिशत (X)	अक्रियाशीलता का समय (Y) (मिनटों में)	चर X का व्युत्क्रम रूपान्तरण (1/X)
3	300	33
10	100	·10
20	30	·05
25	15	04

यदि चर X और Y बिन्दुओं को आलेखित करके मिलायें तो चित्र का रूप आयताकार अतिपरवलय जैसा होता है किन्तु X का (या Y का) व्युत्क्रम रूपान्तरण करने पर सम्बन्ध लगभग सरल रेखीय हो जाता है जैसा कि चित्र में दिखाया गया है।



चित्र 22–1 व्युत्क्रम रूपान्तरण का चित्रीय निरूपण

अतिपरवलयिक ज्या व्युत्क्रम रूपान्तरण

किसी अभिकल्प में यदि उपचारों के माध्य और प्रसरण अनुपाती नहीं हों अर्थात् $\frac{s^2}{\bar{X}}$ का मान लगभग समान न हो तो प्रसरणों को समांगीय बनाने के लिए पहले दिये गए रूपान्तरणों का प्रयोग हर स्थिति में उचित नहीं है जैसे कभी-कभी ऐसी स्थिति भी आती है कि अभिकल्प के किसी खण्डक में वृहत् माध्य के लिए लघु प्रसरण हो या लघु माध्य के लिए वृहत् प्रसरण हो तो इसके लिए अतिपरवलयिक ज्या व्युत्क्रम रूपान्तरण ($\sinh^{-1}$) उपयुक्त है। यदि एक खण्डक में एक उपचार के लिए एक ही प्रेक्षण दिया गया हो तो खण्डक के प्रसरण को प्रयोग में लाया जाता है। यदि एक खण्डक में एक उपचार के प्रति

गई प्रेक्षण मिल गये हो तो अवशिष्ट माध्य वर्ग योग का प्रयोग किया जाता है। प्रसरण या माध्य वर्ग योग s^2 के लघुगणक अर्थात् $\log_e s^2$ का चर के माध्य $\bar{X}$ के लघुगणक $\log_e \bar{X}$ पर समाश्रयण ज्ञात कर लिया जाता है। माना कि समाश्रयण गुणांक β है तो इस स्थिति मे रूपान्तरण $(\sinh^{-1} \beta\sqrt{X})/\beta$ का प्रयोग करना चाहिए।

यदि प्रेक्षण गणना पर आधारित हो और मनि लघु हो तो रूपान्तरण $(\sinh^{-1} \beta \sqrt{X+\frac{1}{2}})/\beta$ का प्रयोग करते हैं। इसके अतिरिक्त यदि प्रसरण, माध्य के पदों म सम्बन्ध $(\bar{X}+\beta^2\bar{X}^2)$ के रूप मे दिया जा सकता हो तो β को सीधे इस सम्बन्ध द्वारा प्रतिस्थापित कर सकते है अर्थात् समाश्रयण गुणांक का परिकलन करने की आवश्यकता नहीं रहती है। इस प्रकार का रूपान्तरण न्यास के ऋणात्मक द्विपद बटित होने की स्थिति मे उचित है। इस रूपान्तरित चर के बंटन का प्रसरण 0·25 के समान होता है।

लाजिट रूपान्तरण

यदि किसी प्रयोग मे स्वतन्त्र प्रेक्षण द्विपद अनुपात के रूप मे हों और वह एक $(r \times C)$ क्रम की सारणी मे दिये हो तो इनके लिए चापज्या रूपान्तरण तभी उपयुक्त है जबकि प्रेक्षणों की संख्या प्रत्येक खण्ड या समूह मे लगभग समान हो। किन्तु ऐसी स्थिति मे व्यवहार मे बहुत कम पाई जाती है अतः उस स्थिति मे लॉजिट रूपान्तरण उचित होता है। यह रूपान्तरण है,

$$\text{logit } X_{ij} = \log_e (p_{ij}/q_{ij}) \qquad \dots (22.5)$$

$$\text{जहाँ } p_{ij} = o_{ij}/n_{ij} \quad q_{ij} = (1 - p_{ij})$$

फिशर का Z रूपान्तरण

इस रूपान्तरण का विवरण अध्याय (14) मे दिया जा चुका है।

□ □ □

23 सहप्रसरण-विश्लेषण

पिछले अध्याय में प्रयोग या सर्वेक्षण द्वारा किसी चर (कारक, उपचार या लक्षण) के प्रति संग्रहित न्यास का प्रसरण विश्लेषण अथवा आकलन करने की विधियाँ दी गई हैं। यदि इस चर पर किसी अन्य चर का प्रभाव न हो तो ये विधियाँ उपयुक्त हैं। इसी उद्देश्य से सजातीय खण्डकों की रचना पर जोर दिया गया और अन्य सभी कारकों (लक्षण) को नियन्त्रित करने का प्रयत्न किया गया जो अध्ययन के हेतु लिए गये चर को प्रभावित करते हैं। किन्तु कुछ ऐसे लक्षण (चर) होते हैं जिनका प्रयोग में नियन्त्रण करना सम्भव नहीं होता है और यह प्रयोगगत एकक के परिणामों को प्रभावित करते हैं अर्थात् एककों द्वारा प्राप्त परिणाम में केवल उपचार का प्रभाव न होकर, किसी अन्य चर का भी परिणाम सम्मिलित होता है। इस अन्य चर को सहवर्ती चर (concomitant variable) सहायक चर (ancillony variable) या सम्बद्ध चर (associated variable) कहते हैं। जैसे

(1) किसी प्रयोग द्वारा कई कीटनाशियों की क्षमता की तुलना करने के हेतु इन्हें अनेक प्रयोगगत एककों पर निश्चित अभिकल्पना के अन्तर्गत प्रयुक्त किया जाता है। किन्तु हम जानते हैं कि प्रत्येक एकक में विनाशिता केवल उस उपचार पर निर्भर नहीं होती है क्योंकि कीटों की प्रारम्भिक जनसंख्या अधिक होने पर मृत्यु-दर भी अधिक होती है। अत प्रारम्भिक कीट संख्या को सहवर्ती चर के रूप में प्रयोग किया जाता है।

(2) यदि विभिन्न अध्यापन विधियों का तुलनात्मक प्रभाव जानना है तो यह विदित है कि शिक्षा लेने वालों के प्रारम्भिक ज्ञान का शिक्षा ग्रहण करने पर अधिक प्रभाव पड़ता है। अत इस प्रारम्भिक ज्ञान को, किन्हीं अंकों में मापकर, सहवर्ती चर के रूप में प्रयोग करना होता है।

(3) यदि किसी प्रयोग में अनेक प्रकार के भोजनों का चूहों की भार वृद्धि के प्रति प्रभाव देखना हो तो उनके प्रारम्भिक भार की ओर ध्यान देना अत्यन्त आवश्यक है। यदि उनके प्रारम्भिक भारों में पर्याप्त अन्तर है तो निश्चित काल के पश्चात् अन्तिम भारों में अन्तर प्रारम्भिक भारों के अन्तर से प्रभावित होता है। अत इस प्रयोग में प्रारम्भिक भार का सहवर्ती चर के रूप में प्रयोग करना आवश्यक है। इसी प्रकार अनेक अन्य उदाहरण दिये जा सकते हैं। व्यवहार में अधिकतर अंतिम प्रेक्षणों को Y–मानों से (चर Y) और सहवर्ती चर पर प्रेक्षणों को X–द्वारा निरूपित करते हैं।

सहवर्ती चर सम्बन्धी न्यास का प्रयोग करके अन्तिम मानों से सहवर्ती चर के प्रभाव का निरसन सहप्रसरण विश्लेषण द्वारा किया जाता है जिससे कि प्रयोग त्रुटि कम हो जाती है। सहप्रसरण विधि इस दृष्टि से अत्यधिक उपयोगी है कि प्राय कुछ विचरण-स्रोत जिनका प्रयोग विधि द्वारा नियन्त्रण नहीं हो सकता है, उनके प्रभाव को सहवर्ती चर

पर प्रेक्षण लेकर, सहप्रसरण-विश्लेषण द्वारा दूर कर दिया जाता है। यह ध्यान अवश्य रखना चाहिए कि सहवर्ती चर इस प्रकार का होना चाहिए कि जिसका उपचारों से कोई सम्बन्ध न हो।

सहप्रसरण विश्लेषण का सिद्धान्त

अध्यायों (13) व (21) में दो महत्त्वपूर्ण विधियों, जिनके नाम हैं समाश्रयण विश्लेषण और प्रसरण-विश्लेषण, का विधिपूर्वक वर्णन किया गया है। सहप्रसरण विश्लेषण में इन दोनों विधियों को समन्वित किया गया है। समाश्रयण विश्लेषण में आश्रित चर के वर्ग योग में से समाश्रयण के कारण वर्ग योग को घटाकर शेष वर्ग योग ज्ञात कर लेते हैं। इसी सिद्धान्त का सहप्रसरण विश्लेषण में प्रयोग करते हैं अर्थात् अन्तिम चर पर लिये गये प्रेक्षणों में से समाश्रयण द्वारा सहवर्ती चर के प्रभाव का निरसन कर दिया जाता है। इस क्रिया के हेतु प्रत्येक विचरण स्रोत के लिए संख्याओं $\sum_i y_i^2$, $\sum_i x_i y_i$ व $\sum x_i^2$ का परिकलन करना होता है।

जबकि छोटे अक्षर y_i व x_i अपने माध्य से विचलित प्रेक्षित मानों को निरूपित करते हैं। अनुलग्न i, प्रेक्षणों की संख्या के अनुसार विचरण करता है। यह ज्ञात है कि समाश्रयण के कारण वर्ग-योग $(\sum_i x_i y_i)^2/\sum_i x_i^2$ के समान होता है। इस संख्या को $\sum y_i^2$ में से घटा देने पर सहवर्ती चर के प्रभाव से मुक्त वर्ग योग ज्ञात हो जाता है। इसके अतिरिक्त समायोजित चर Y' के लिए वर्ग योग की पूर्ण स्व० को० में से समाश्रयण के कारण 1 स्व० को० कम कर देते हैं। इसी सिद्धान्त का प्रयोग करके निम्न सहप्रसरण-विश्लेषण सारणी तैयार कर ली जाती है। यह सारणी किसी भी अभिकल्पना या वर्गीकरण के लिए तैयार की जा सकती है। अभिकल्पना या वर्गीकरण के अनुसार विचरण स्रोतों में अन्तर करना होता है।

टिप्पणी . (1) उपर्युक्त विवरण में यह कल्पना की गई है कि चर Y तथा X में सम्बन्ध रैखिक है।

(2) यदि रैखिक सम्बन्ध न हो तो वक्र रेखीय समाश्रयण के प्रति सूत्रों का प्रयोग करके उपर्युक्त विधि का प्रयोग कर सकते हैं।

(3) यदि अन्तिम चर को प्रभावित करने वाले चरों की संख्या दो हो तो चर Y में सहवर्ती चरों X_1 व X_2 के कारण समाश्रयण वर्ग-योग $(b_1 \sum_i x_{1i} y_i + b_2 \sum_i x_{2i} y_i)$ को $\sum_i y_i^2$ से घटाकर शेष वर्ग योग $(\sum_i y_i^2 - b_1 \sum_i x_{1i} y_i - b_2 \sum_i x_{2i} y_i)$ ज्ञात करते हैं। यदि सहवर्ती चरों की संख्या दो से अधिक हो तो इसी सूत्र को और विस्तृत किया जा सकता है। जितने सहवर्ती चर होते हैं उतनी ही संख्या को समायोजित चर Y' के पूर्ण व० यो० की कुल स्व० को० में से घटा दिया जाता है।

सहप्रसरण-विश्लेषण सारणी की रूपरेखा

(सारणी 23.1)

विचरण स्रोत	स्व० को०	$\sum_i x_i^2$	$\sum_i x_i y_i$	$\sum_i y_i^2$	स्व० को०	$\sum_i y_i'^2$	मा० व० य०	F-मान
A		A_{xx}	A_{xy}	A_{yy}		$R_{A+E} - S_{ee}$		
T		T_{xx}	T_{xy}	T_{yy}		$S_{T+E} - S_{ee}$		
C		C_{xx}	C_{xy}	C_{yy}				
प्रयोग त्रुटि	f_e	E_{xx}	E_{xy}	E_{yy}	f_e'	$E_{yy} - \frac{E_{xy}^2}{E_{xx}} = S_{ee}$		
	$(n-1)$				$(n-2)$			
समायोजित उपचारों के लिए (T+त्रुटि)		$S_{xx} = T_{xx} + E_{xx}$	$S_{xy} = T_{xy} + E_{xy}$	$S_{yy} = T_{yy} + E_{yy}$		$S_{T+E} = S_{yy} - \frac{S_{xy}^2}{S_{xx}}$		
समायोजित A माध्यों के लिए (A+त्रुटि)		$R_{xx} = A_{xx} + E_{xx}$	$R_{xy} = A_{xy} + E_{xy}$	$R_{yy} = A_{yy} + E_{yy}$		$R_{A+E} = R_{yy} - \frac{R^2_{xy}}{R_{xx}}$		

जहाँ $\sum_i y_i'^2 = \sum_i y_i^2 - \frac{\left(\sum_i x_i y_i\right)^2}{\sum x_i^2}$

इसी प्रकार कारक A के लिए समायोजित व० य०

$\Sigma y_i'^2$, संख्या $(S_{A+E} - S_{ee})$ द्वारा परिकलित कर सकते हैं। अन्य किसी कारक के लिए समायोजित व० य० ज्ञात करने की विधि यही रहती है।

माना कि प्रयोग या सर्वेक्षण द्वारा प्राप्त n युग्म प्रेक्षण,

$$Y : Y_1, Y_2, Y_3, \ldots X_n$$

$$X : X_1, X_2, X_3, \ldots X_n$$

हैं तो सम्भावें,

$$\sum_i x_i^2 = \sum_i X_i^2 - \frac{(\sum_i X_i^2)}{n}$$

$$\Sigma x_i y_i = \Sigma X_i Y_i - \frac{(\sum_i X_i)(\sum_i Y_i)}{n}$$

$$\sum_i y_i^2 = \sum_i Y_i^2 - \frac{(\sum_i Y_i)^2}{n}$$

सारणी में विचरण स्रोत अभिकल्पना या वर्गीकरण के अनुसार होते हैं। माध्य वर्ग-योग तथा F-मान सामान्य रूप से ज्ञात किये जाते हैं और विभिन्न कारकों या उपचारों के प्रति परिकल्पनाओं के विषय में नियमानुसार निर्णय ले लिये जाते हैं।

सहप्रसरण के लिए सांख्यिकीय प्रतिरूप

अनेक सांख्यिकीय प्रतिरूप विभिन्न वर्गीकरण या अभिकल्पनाओं के हेतु अध्याय 21 में दिये जा चुके हैं। सहप्रसरण की स्थिति में भी प्रतिरूप लगभग वही रहता है। यहाँ एक पद प्रत्येक प्रतिरूप में सहवर्ती चर के लिए और बढ़ा दिया जाता है। इन प्रतिरूपों में अध्याय 21 की तुलना में इतना ही अन्तर किया गया है कि X के स्थान पर अन्तिम चर के लिए संकेतन Y का प्रयोग किया गया है और संकेतन X, सहवर्ती चर के लिए लिया गया है।

पूर्ण यादृच्छिकीकृत अभिकल्पना के लिए सहप्रसरण में सांख्यिकीय प्रतिरूप निम्न है:—

$$Y_{ij} = \mu + T_i + CX_{ij} + e_{ij} \qquad \ldots(23.1)$$

$$i = 1, 2, 3, \ldots, k$$

$$j = 1, 2, 3, \ldots, r_i$$

यादृच्छिकीकृत पूर्ण खण्डक अभिकल्पना के लिए प्रतिरूप निम्न है:—

$$Y_{ij} = \mu + T_i + \beta_j + CX_{ij} + e_{ij} \qquad \ldots(23.2)$$

$$i = 1, 2, 3, \ldots, k$$

$$j = 1, 2, 3, \ldots, r$$

लेटिन वर्ग अभिकल्पना के लिए प्रतिरूप,

$$Y_{ijl} = \mu + T_i + \beta_j + \rho_l + CX_{ij} + e_{ijl} \quad ....(23.3)$$

है। इसी प्रकार अन्य किसी भी अभिकल्पना के हेतु प्रतिरूप दिया जा सकता है। जैसा कि पहले दिया जा चुका है कि सहप्रसरण विश्लेषण का प्रयोग किसी भी अभिकल्पना की स्थिति में यदि आवश्यकता हो तो किया जा सकता है। सारणी (23.1) में दिखाया गया है कि किसी भी कारक या उपचार के लिए समायोजित वर्ग-योग, $\Sigma y_i'^2$, (कारक + त्रुटि) के लिए $\Sigma y_i'^2$ में से, त्रुटि के $\Sigma y_i'^2$ को घटाकर ज्ञात किये जाते हैं।

माध्य त्रुटि समाश्रयण गुणांक C का आकलित मान,

$$C = E_{xy}/E_{xx} \quad ....(23.4)$$

iवें उपचार का समायोजित माध्य,

$$\overline{Y}_i' = \frac{T_{iy}}{r_i} - C\left(\frac{T_{ix}}{r_i} - \overline{X}\right) \quad ....(23.5)$$

जबकि iवें उपचार का प्रभाव T_{iy} है और तदनुसार X चर पर iवें उपचार के लिए मान T_{ix} है। r_i, iवें उपचार की पुनरावृत्ति संख्या है और C समाश्रयण गुणांक है जिसको सूत्र (23.4) द्वारा ज्ञात किया जाता है। $\overline{X}$, समस्त X मानों का माध्य है। प्रतिरूप (23.2) व (23.3) में सब उपचारों की पुनरावृत्ति-संख्या समान होती है।

किसी एक समायोजित उपचार माध्य $\overline{Y}_i'$ (जबकि $\overline{Y}_i' = \overline{Y} - C(\overline{X}_i - \overline{X})$ का प्रसरण निम्न है :—

$$v(\overline{Y}_i') = \frac{S_{ee}}{f_e'}\left\{\frac{1}{r_i} + \frac{(\overline{X}_i - \overline{X})^2}{E_{XX}}\right\} \quad ....(23.6)$$

दो समायोजित माध्यों में अन्तर को निम्न रूप में प्रदर्शित कर सकते हैं :—

$$(\overline{Y}_i' - \overline{Y}_j') = (\overline{Y}_i - \overline{Y}_j) - C(\overline{X}_i - \overline{X}_j) \quad ....(23.7)$$

जबकि $i \neq j$

दो समायोजित माध्यों में अन्तर का प्रसरण,

$$v(\overline{Y}_i' - \overline{Y}_j') = \frac{S_{ee}}{f_e'}\left\{\frac{1}{r_i} + \frac{1}{r_j} + \frac{(\overline{X}_i - \overline{X}_j)^2}{E_{XX}}\right\} \quad ....(23.8)$$

है। जबकि S_{ee} समायोजित त्रुटि वर्ग योग है

r_i व r_j, i वें और j वें उपचार की क्रमशः पुनरावृत्ति संख्यायें हैं। E_{XX} चर X के लिए त्रुटि वर्ग योग है। अतः किन्हीं दो उपचार माध्यों की समानता के प्रति निराकरणीय परिकल्पना की t परीक्षा करने में सहप्रसरण विश्लेषण के अन्तर्गत माध्यों में अन्तर की मानक त्रुटि सूत्र (23.8) द्वारा प्राप्त मान के वर्गमूल के समान होती है। किन्तु सब

सम्भव युग्म माध्यों में अन्तर के लिए सूत्र (23 8) द्वारा पृथक् पृथक् प्रसरण ज्ञात करना कठिन समस्या है। अतः इन प्रसरणों में माध्य प्रसरण को सब युग्म माध्यों में अन्तर के प्रसरण के लिए प्रयोग किया जाना पर्याप्त है। इस माध्य प्रसरण को निम्न सूत्र द्वारा सीधे परिकलित कर सकते हैं। इस माध्य प्रसरण की वर्गमूल लेकर माध्यों में अन्तर की मानक त्रुटि ज्ञात हो जाती है।

अतः मानक त्रुटि,

$$V\ (md) = \frac{2S_{ee}}{f_e'\ r}\left(1 + \frac{1}{k-1}\ \frac{T_{xx}}{E_{xx}}\right) \qquad .\ (23\ 9)$$

$$S\ E\ \ (md) = \sqrt{\frac{2S_{ee}}{f_e'\ r}\left(1 + \frac{1}{k-1}\ \frac{T_{xx}}{E_{xx}}\right)} \qquad ....(23\ 9\ 1)$$

उदाहरण 23 1 बाजरे की उपज पर 25 उपचारों का प्रभाव जानने के हेतु प्रयोग किया गया। यादृच्छिकीकृत पूर्ण खण्डक अभिकल्पना में प्रयोग विन्यास किया गया। साथ ही यह विचार था कि प्रति भूखण्ड में पौधों की संख्या (*plant population per plot*) का उपज पर प्रभाव पड़ता है। अतः प्रत्येक भूखण्ड में पौधों की संख्या की गणना की गई। 25 उपचारों के लिए और 4 पुनरावृत्तियों में निम्न प्रेक्षण प्राप्त हुए। प्रत्येक भूखण्ड का क्षेत्र = 8 मी० × 4 मी०

चर Y = प्रति भूखण्ड उपज (किलोग्राम)

चर X = प्रति भूखण्ड पौधों की संख्या

उपचार संख्या	पुनरावृत्तियाँ								योग	
	R_1		R_2		R_3		R_4			
	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
1	541	2 46	278	3·49	246	3 08	227	3 74	1292	12 77
2	517	4 47	235	3 36	258	3 80	152	3 59	1162	15 22
3	408	3 41	201	3 46	257	4 11	174	2 96	1040	13 94
4	458	2 [illegible]6	296	3 80	264	3 72	187	3 93	1205	13 71
5	460	2 69	287	2 79	269	4 25	132	3 03	1148	12 76
6	220	3 46	184	2 79	152	3 81	118	2 44	674	11 50
7.	304	4 05	305	3 58	177	3 53	174	2 73	960	13 89
8	228	2 88	226	3 17	153	2 91	124	1 92	731	10 88
9	236	4 06	286	3 29	162	3 82	133	1 93	817	13 10
10	235	3 5[illegible]	185	2 77	176	3 51	175	3 23	771	13 07
11.	252	2 85	257	4 19	301	4 30	181	3 06	991	14 40
12.	308	3 43	227	4 08	312	3 29	151	3 07	998	18 86
13	204	3 37	247	3 49	253	4 03	138	2 98	842	13 87

14	281	4 20	183	3 16	311	3 72	115	2 05	790	13 13
15	292	3 48	255	3 65	307	4 06	172	3 25	1026	14 44
16	316	2 70	259	2 50	258	4 00	179	3 68	1012	12 88
17	487	4 31	323	3 26	281	5 01	221	3 66	1312	16 24
18	254	3 24	241	3 39	246	4 28	180	3 73	921	14 64
19	475	3 39	272	3 25	227	3 96	151	2 66	1125	3 26
20	265	3 52	277	3 05	178	2 84	133	3 25	853	12 67
21	362	2 97	282	3 11	203	3 37	123	3 04	970	12 49
22	471	3 13	279	2 57	254	4 05	124	2 80	1128	12 55
23.	385	2 22	233	2 47	219	4 46	204	3 60	1041	12 75
24	457	2 92	244	3 26	214	3 94	191	3 53	1106	13 65
25	522	3 08	246	2 63	204	4·00	201	3 72	1173	13 43
योग	8938	82 11	6308	80 57	5882	95 85	4060	77 57	25188	33 10

उपचारो म अन्तर की सार्थकता-परीक्षा, सहप्रसरण विश्लेषण द्वारा निम्न प्रकार कर सकते हैं।

सहप्रसरण विश्लेषण करने के लिए सारणी (23 1) के अनुसार निम्न संख्याओं का परिकलन करना होता है —

चर X के लिए,

$$\text{स०का०} = \frac{(25188)^2}{100}$$

$$= 6344353\ 4$$

$$\text{पूर्ण व० य०} = (541^2 + 517^2 + \quad + 191^2 + 201^2) - \text{स० का०}$$

$$= 905998\ 6$$

$$\text{उपचार व०य०} = \tfrac{1}{4}(1292^2 + 1162^2 + \ldots + 1106^2 + 1173^2) - \text{स०का०}$$

$$= 170177\ 1$$

$$\text{पुनरावृत्ति व०य०} = \frac{1}{25}\ (8938^2 + 6308^2 + 5882^2 + 4060^2) - \text{स०का०}$$

$$= 486055\ 9$$

$$\text{त्रुटि व०य०} = 249765\ 6$$

चर Y के लिए,

$$\text{स०का०} = \frac{(336\ 10)}{100}$$

$=1129.6$

पूर्ण व०य० $=(2.46^2+4.47^2+\ldots+3.53^2+3.72^2)-$ स० का०

$=35.72$

उपचार व०य० $=\frac{1}{4}(12.77^2+15.22^2+\ldots+13.65^2+13.43^2)-$ स० का०

$=6.78$

पुनरावृत्ति व०य० $=\frac{1}{25}(82.11^2+80.57^2+95.85^2+77.75^2)-$ स० का०

$=7.89$

त्रुटि व०य० $=21.06$

अब XY के लिए,

स० का० $=\frac{25188\times336.10}{100}$

$=84656.87$

पूर्ण गुणनफल योग $=(541\times2.46+517\times4.47+\ldots191\times3.53+201\times2.72)-$ स० का०

$=541.26$

उपचार गुणनफल योग $=\frac{1}{4}(1292\times12.77+1162\times15.22+\ldots\ldots+1106\times13.65+1173\times13.43)-$ स० का०

$=485.74$

पुनरावृत्ति गुणनफल योग $=(8938\times82.11+6308\times80.57+6882\times95.85+4060\times77.5)-$ स०का०

$=177.47$

त्रुटि व०य० $=-121.95$

समायोजित वर्ग योग $\Sigma y_i'^2$ निम्न प्रकार ज्ञात कर सकते हैं :—

त्रुटि व०य० $=E_{yy}-\frac{E_{xy}^2}{E_{xx}}$

$=21.06-\frac{(-121.95)^2}{249765.60}$

$=21.06-.059$

$=21.00$

यदि पुनरावृत्तियों में अधिक अभिरुचि हो तो, इनके लिए भी मान इसी प्रकार ज्ञात कर सकते है अत. सहप्रसरण विश्लेषण सारणी बनाई :—

विचरण स्रोत	स्व० को०	$\sum_i x_i^2$	$\sum_i x_i y_i$	$\sum_i y_i^2$	स्व० को०	$\sum_i y_i'^2$	मा०व०द०	F—मान
पुनरावृत्ति	3	486055 9	177·47	7 89	3	7·90	2·76	9 32**
उपचार	24	170177 1	485 74	6 78	24	6·52	0·271	0·916
त्रुटि	72	249765 9	–121 95	21 06	71	21·00	0 296	
पूर्ण	99	905998 6	541 26	35 72	98	35·42		
उपचार+त्रुटि	96	419943 0	363 79	27·84	95	27 52		
पुनरावृत्ति +त्रुटि	75	735821 8	55·52	28 95	74	28·90		

** $\alpha = \cdot01$ पर पुनरावृत्तियों में सार्थक अन्तर है।

$$(\text{उपचार+त्रुटि}) \text{ के लिए } \sum_1 y_i'^2 = 27\cdot84 - \frac{(363\cdot79)^2}{419943\ 0}$$

$$= 2784 - \cdot32$$

$$= 27\cdot52$$

$$\text{उपचार के लिए } \sum y_i'^2 = 27\ 52 - 21\cdot00$$

$$= 6\ 52$$

सहप्रसरण सारणी द्वारा प्राप्त उपचारों के लिए F का मान 1 से कम है अतः इससे निष्कर्ष निकलता है कि उपचारों में कोई सार्थक अन्तर नहीं है। पुनरावृत्तियों के लिए वर्ग योग, उपचारों के लिए वर्ग योगों की भाँति ही परिकलित किये गये हैं।

सूत्र (23.4) द्वारा,

$$C = \frac{E_{xy}}{E_{xx}}$$

$$= -\frac{121\cdot95}{249765\ 9}$$

$$= -\cdot00049$$

$$\overline{X} = 251\cdot88$$

उपचार संख्या	Y_i	X_i	$(X_i - \bar{X})$	$C(X_i - \bar{X})$	समंजित माध्य $\bar{Y}_i - \bar{Y}_i - C(\bar{X}_i - \bar{X})$
1.	3·19	323 00	71 12	– 035	3 225
2.	3 81	290 50	38 62	– ·019	3 829
3.	3·48	260 00	8 12	– 004	3 484
4	3 43	301 25	49 37	– ·024	3 454
5.	3 19	287 00	35 12	– 017	3 207
6.	3 13	168 50	–83 38	+ 041	3 089
7.	3·47	240 00	–11 88	+ 006	3·464
8.	2·72	182·75	–69 13	·034	2 686
9.	3·28	204·25	–47 63	·023	3 257
10.	3 27	192·75	–59·13	·029	3·241
11.	3 60	247 75	– 4 13	·002	3·588
12.	3 46	249 50	– 2 38	·001	3 459
13.	3 47	210 50	–41·38	·020	3·450
14.	3 28	222·50	–29·38	014	3·276
15.	3·61	256·50	4 62	·002	4·608
16.	3·22	253 00	1·12	001	3 219
17.	4·06	328 00	76 12	– 0 37	4 097
18.	3·66	230 25	–21 63	·011	3 649
19.	3 32	281 25	29 37	– ·014	3 334
20.	3 17	213 25	–38·63	019	3·151
21.	3·12	242·50	– 9·38	·005	3 115
22.	3 14	282 00	30 12	– 015	3 155
23.	3 19	260 25	8 37	– 004	3 194
24.	3 41	276·50	24 62	012	3 398
25	3 36	293 25	41 37	020	3 340

सूत्र (23 9.12) द्वारा उपचारों के अन्तर की मानक त्रुटि

$$S\ E\ (md) = \sqrt{2\times\frac{0\ 296}{4}\left(1+\frac{1}{24}\times\frac{170177\ 1}{249765\ 6}\right)}$$

$$S.\ E.\ (md) = \sqrt{0\ 148(1+0{\cdot}0283)}$$
$$= \sqrt{0\ 152188}$$
$$= 0\ 39$$

यहाँ माध्यों के युगल बनाकर तुलना करने की आवश्यकता नहीं है क्योंकि F–परीक्षा द्वारा उपचार माध्यों म अन्तर निरर्थक सिद्ध हुआ है ।

अप्राप्त प्रेक्षण मानों की स्थिति में सहप्रसरण विश्लेषण

एक अप्राप्त मान की स्थिति म, इसका आकलन करके प्रसरण-विश्लेषण करने की विधि का वर्णन अध्याय 21 में किया गया है, यदि दो या दो से अधिक मान अप्राप्त हों तो उनका आकलन करके प्रसरण विश्लेषण क करने की कुछ अन्य विधियाँ भी उपलब्ध हैं । किन्तु बार्टलेट (Bartlett) न सहप्रसरण विश्लेषण का प्रयोग करके अप्राप्त मान होने की स्थिति मे विश्लेषण की एक उत्तम विधि को दिया । इस विधि के अन्तर्गत सहवर्ती चर, जिस कभी-कभी मूक सहवर्ती चर (dummy variate) भी कहते हैं, को मानना होता है । प्रयोग अभिकल्पना में समस्त विद्यमान प्रेक्षणों से सम्बद्ध सहवर्ती चर को शून्य (0) मान लिया जाता है और अप्राप्त मानों के तदनुसार सहवर्ती चर को एक (1) मान लिया जाता है । अप्राप्त मानों क स्थान पर शून्य रख दिया जाता है और फिर सामान्य रूप मे Y का X_1, X_2, ... पर सहप्रसरण विश्लेषण कर लिया जाता है और समायोजित वर्ग योग वहुचर समाश्रयण द्वारा ज्ञात कर लिये जाते हैं । कुछ व्यक्ति अप्राप्त मानों से सम्बद्ध सहवर्ती चर का – 1 भी मानते हैं क्योंकि यह परिकलन की दृष्टि स सुगम है ।

केवल एक अप्राप्त मान की स्थिति मे, इसका आकलित मान,

$$\hat{X} = Y_0 - CX_0 = -C = \frac{-E_{xy}}{E_{xx}} \qquad ...(23.10)$$

क्योंकि $Y_0=0$ और $X_0=1$

अप्राप्त मान का (23 10) द्वारा प्राप्त आकलित मान वही है जो कि अध्याय 21 मे दिये गये सूत्रों द्वारा प्राप्त होता है । इसके साथ-साथ सहप्रसरण विश्लेषण द्वारा प्राप्त त्रुटि माध्य वर्ग योग और अप्राप्त मान के आकलित मान का प्रयोग करके प्रसरण विश्लेषण के अन्तर्गत प्राप्त त्रुटि माध्य वर्ग योग समान होते हैं । सहप्रसरण विश्लेषण की सहायता मे प्रसरण विश्लेषण एवं अप्राप्त मान का आकलन करने की विधि को स्पष्ट करने के हेतु उदाहरण (21 7)में दिये गये प्रयोग के न्यास को एक अप्राप्त मान लेकर यहाँ पुन प्रस्तुत किया गया है ।

उदाहरण 23.2 :

	स्तम्भ			
पंक्ति	A 42	B 38	C 50	D 46
	C 46	D 42	A 42	B 42
	D 46	C *	B 42	A 46
	B 38	A 54	D 38	C 46

उपर्युक्त न्यास का विश्लेषण निम्न प्रकार से कर सकते हैं —

जैसा कि पिछले खण्ड में दिया गया है कि एक अप्राप्त मान की स्थिति में मूक सहवर्ती चर लेकर सहप्रसरण की सहायता से अप्राप्त मान का आकलन तथा उपचारों के प्रति परीक्षा कर सकते हैं। अतः उपर्युक्त न्यास सहवर्ती चर के सहित निम्न रूप में लिख सकते हैं :—

		Y	X		Y	X		Y	X		Y	X	योग Y	X
	A	42	0	B	38	0	C	50	0	D	46	0	176	0
	C	46	0	D	42	0	A	42	0	B	42	0	172	0
	D	46	0	C	0	1	B	42	0	A	46	0	134	1
	B	38	0	A	54	0	D	38	0	C	46	0	176	0
योग		172	0		134	1		172	0		180	0	658	1

उपचारों के योग,

	Y	X
A =	184	0
B =	160	0
C =	142	1
D =	172	0

चर XY के लिए;

पूर्ण गुणनफल-योग,

$$= (42\times0+46\times0+\ldots\ldots46\times0+46\times0) - \frac{658\times1}{16}$$

$$= -41{\cdot}125$$

पंक्ति गुणनफल-योग $= \frac{1}{4}\ (176\times0+172\times0+134\times1+176\times0) - \frac{658\times1}{16}$

$= 33\ 5 - 41\ 125$

$= -7\ 625$

स्तम्भ गुणनफल-योग

$= \frac{1}{4}\ (172\times0+134\times1+172\times0+180\times0) - \frac{658\times1}{16}$

$= 33\ 5 - 41\ 125$

$= -7{\cdot}625$

उपचार गुणनफल-योग

$= \frac{1}{4}\ (184\times0+160\times0+142\times1+172\times0) - \frac{658\times1}{16}$

$= 35\ 5 - 41\ 125$

$= -5\ 625$

इसी प्रकार चर X के लिए,

पूर्ण व० य० $= 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$

पंक्ति व० य० $= \frac{1}{4} - \frac{1}{16} = \frac{3}{16}$

स्तम्भ व०य० $= \frac{1}{4} - \frac{1}{16} = \frac{3}{16}$

चर Y के लिए,

सं० का० $= 27060\ 25$

पूर्ण व०य० $= (42^2+46^2+\ldots+46^2+46^2)$ − सं० का०

$= 29148\ 0 - 27060\ 25$

$= 2087\ 75$

पंक्ति व० य० $= \frac{1}{4}\ (176^2+172^2+134^2+176^2)$ − सं० का०

$= 27373\ 00 - 27060\ 25$

$= 312\ 75$

स्तम्भ व०य० $= \frac{1}{4}\ (172^2+134^2+172^2+180^2)$ − सं० का०

$= 27381\ 00 - 27060\ 25 = 320\ 75$

उपचार व०य० $= \frac{1}{4}\ (184^2+160^2+142^2+172^2)$ − सं० का०

$= 27301\ 00 - 27060\ 25$

$= 240\ 75$

(4×4) लैटिन वर्ग के लिए सहप्रसरण विश्लेषण सारणी

विचरण स्रोत (i)	स्व० को० (ii)	$\sum_i x_i^2$ (iii)	$\sum_i x_i y_i$ (iv)	$\sum_i y_i^2$ (v)	स्व० को० (vi)	$\sum_i y_i'^2$ (vii)	मा०व०य० (viii)	F–मान (ix)
पंक्ति	3	3/16	−7 625	312 75	3			
स्तम्भ	3	3/16	−7 625	320/75	3			
उपचार	3	3/16	−5 625	240 75	3	143 00	47 66	1 98
त्रुटि	6	6/16	−20 250	1213 75	5	120 25	24 05	
पूर्ण	15	15/16	−41 125	2087 75	14			
उपचार+त्रुटि	9	9/16	−25 875	1454 50	8	263 25		

$$S_e'^2 = 1213{\cdot}75 - \frac{(-20{\cdot}25)^2}{{\cdot}375}$$

$$= 1213{\cdot}75 - 1093{\cdot}50$$

$$= 120{\cdot}25$$

(उपचार+त्रुटि) के लिए,

$$\sum_{t} y_t^2 = 1454{\cdot}50 - \frac{(-25{\cdot}875)^2}{{\cdot}5625}$$

$$= 1454{\cdot}50 - 1190{\cdot}25$$

$$= 263{\cdot}25$$

उपचार-समायोजित व० य० = 263·25 − 120·25 = 143·00 सारणी (परि० घ-5·2) द्वारा $\alpha = {\cdot}05$ और (3, 6) स्व० सं० के लिए F का मान उपचारों के लिए F के परिकलित मान से अधिक है।

अत: इससे यह निष्कर्ष निकलता है कि उपचारों में कोई सार्थक अन्तर नहीं है।

सूत्र (23·10) द्वारा अप्राप्त मान का आकलित मान,

$$\hat{X} = -\frac{(-20{\cdot}25)}{6/16}$$

$$= \frac{324}{6}$$

$$= 54{\cdot}00$$

यहाँ युगल उपचार माध्यों में सार्थकता-परीक्षा करने की आवश्यकता नहीं है क्योंकि F–परीक्षा द्वारा उपचारों में अन्तर निरर्थक सिद्ध हुआ है।

दो मिश्रित प्रेक्षणों की स्थिति में सहप्रसरण विश्लेषण

कभी-कभी कृषि संबंधी प्रयोगों में यह कठिनाई सामने आती है कि किन्हीं दो निकटवर्ती क्षेत्रों की उपज आपस में मिल गई हो। इस स्थिति में दोनों भूखण्डों (एककों) की कुल उपज तो ज्ञात होती है किन्तु उनका अलग-अलग मान जानना सम्भव नहीं है। अत: इस स्थिति में सांख्यिकीय विश्लेषण करने में सहप्रसरण विश्लेषण अत्यन्त सहायक है। इसकी विधि इस प्रकार है :—

दोनों क्षेत्रों की सम्मिलित उपज को स्वेच्छा से दो भागों में विभाजित करके प्रतिस्थापित कर देते हैं। इन स्वेच्छ मानों में एक आधे से कम और दूसरा आधे से अधिक होता है अर्थात् कुल मान का आधा मान नहीं लेना चाहिये। फिर इन दो भूखण्डों (प्रयोगगत एककों) के लिए मूक सहवर्ती चर (dummy covariables) के मान 1 और −1 तथा अन्य भूखण्डों के लिए मूक-सहवर्ती चर 0 मान लिये जाते हैं। फिर सामान्य रूप से सहप्रसरण विश्लेषण करते हैं और मिश्रित मानों के पृथक्-पृथक् आकलित मान ज्ञात कर लिए जाते हैं।

सारांश

सहप्रसरण विश्लेषण किन्ही उपचारों के प्रभाव से अन्य किसी सहचर का प्रभाव दूर करने तथा विश्वसनीय सार्थकता परीक्षा करने में अत्यन्त उपयोगी है। उन सब परिस्थितियों का बताना तो असम्भव है जिनमें सहप्रसरण का प्रयोग किया जा सकता है किन्तु स्वयं के विचार में कोई भी स्थिति, जो दिये हुए सिद्धान्तों के अनुकूल हो सहप्रसरण विश्लेषण के लिए उपयुक्त है। प्रसरण विश्लेषण की अपेक्षा, सहप्रसरण विश्लेषण क्रिया विधि में कठिन है अत अनावश्यक रूप से इसका प्रयोग अनुचित है अर्थात् नहीं करना चाहिये।

प्रश्नावली

1 सहप्रसरण विश्लेषण का विवेचन कीजिये।

2 किसी सहप्रसरण विश्लेषण में किन कल्पनाओं को करना होता है ? परिणामों का निर्वचन करने में किन किन बातों का विचार करना चाहिये ?

3 कुछ ऐसी स्थितियों का विवेचन कीजिये जिनमें उपचारों या कारकों में सार्थकता-परीक्षा के लिए सहवर्ती चर का लेना आवश्यक हो।

4 मूल सहवर्ती चर की कब आवश्यकता होती है और इन्हे विभिन्न स्थितियों में किस प्रकार माना जाता है ?

5 बाजरे की प्रजाति (k – 16) की उपज पर तीन शाकनाशियों (herbicides), (H_1, H_2 H_3) का प्रभाव चार विभिन्न समयों (t_1, t_2, t_3 t_4) पर जानने के लिए प्रयोग किया गया। प्रयोग का यादृच्छिकीकृत खण्डक अभिकल्पना में विन्यास किया गया और इसमें दो खण्डकों को लिया गया। प्रत्येक खण्डक में 12 उपचार-संचय तथा एक नियन्त्रण भूखण्ड को लिया गया क्योंकि खरपतवार (weeds) की संख्या का उपज पर प्रभाव पड़ता है, कटाई के समय इनकी प्रत्येक भूखण्ड में प्रति वर्ग मीटर संख्या के प्रति भी प्रेक्षण लिये गए जिनको सहवर्ती चर के रूप में प्रयोग किया गया। इस प्रयोग द्वारा प्राप्त उपज (Y) किलो॰ प्रति हेक्टर तथा खर-पतवार की संख्या (X) निम्न प्रकार थी —

	R_1		R_2	
उपचार	Y	X	Y	X
H_1 t_1	310.34	1.87	743.96	2.44
H_1 t_2	536.34	3.53	415.23	2.54
H_1 t_3	730.99	3.53	147.06	2.44
H_1 t_4	562.30	2.91	582.84	2.44
H_2 t_1	564.46	1.73	689.90	2.34
H_2 t_2	497.42	3.24	598.82	1.58
H_2 t_3	329.81	1.41	699.63	0.70
H_2 t_4	515.80	2.34	629.34	3.46
H_3 t_1	310.34	2.73	595·82	3.16
H_3 t_2	520.12	2.84	966.72	2.73
H_3 t_3	669.35	2.00	610.96	1.58
H_3 t_4	512.55	1.58	471.46	2.44
नियंत्रण	216.27	4.63	192.48	4.12

उपर्युक्त न्यास का विश्लेषण करके, परिणामो का निर्वचन कीजिये। (प्रश्न 5 का न्यास श्री एम० के० माथुर, राज० कृषि महाविद्यालय, उदयपुर, के सौजन्य से प्राप्त हुआ)।

6 उपचारो का प्रभाव जानने के लिए एक प्रयोग को यादृच्छिकीकृत खण्डक अभिकल्पना मे चार खण्डक लेकर व्यवस्थित किया गया। प्रत्येक उपचार के लिए प्रति हैक्टर उपज का आर्थिक मान ज्ञात किया गया। किन्तु कटाई के समय दो निकटवर्ती भूखण्डो की उपज मिल गई थी अत इन दो भूखण्डो का सम्मिलित आर्थिक मान ही ज्ञात किया। इस प्रयोग द्वारा प्राप्त आर्थिक मान निम्न सारणी के अनुसार थे —

उपज का आर्थिक मान (रुपयो मे)

उपचार संख्या	खण्डक			
	1	2	3	4
1.	273 08	600 35	407 66	505 84
2	439 45	341 25	466 15	535 15
3	585 43	128 02	537 31	357 05
4	462 81	502 11	427 07	583 16
5.	457 72	539 26	460 32	490 54
6	401 17	1012 66	390 25	615 43
7.	272·76		662 52	555 04
8	419 61	512 87	369 48	392·19
9	266 60	523 52	446 48	411 44
10	422 41	764 60	496 32	486 16
11.	558 34	494 44	449 07	416 63
12	417 49	397 27	325 96	427 79
13.	205 45	183 50	123 42	416 15

उचित मूक सहवर्ती चर का प्रयोग करके उपर्युक्त न्यास का सहप्रसरण विश्लेषण कीजिये और उपचारो के प्रभाव की सार्थकता परीक्षा कीजिये।

□ □ □

परिशिष्ट-क

आव्यूह सिद्धान्त का परिचय

यहाँ आव्यूह सिद्धान्त का वर्णन संक्षेप में दिया गया है। अधिकतर स्थितियों में जो भी प्रमेय दिये गये हैं उनको सिद्ध नहीं किया गया है। साथ ही वर्णन करते समय आव्यूह का सांकेतिक रूप से भी प्रयोग किया है।

परिभाषा

अंकों a_{ij} के आयताकार विन्यास को आव्यूह कहते हैं। यदि आयताकार विन्यास में m पंक्ति हों और n स्तम्भ हों तो आव्यूह $(m \times n)$ विमिति का कहलाता है। माना कि आव्यूह 'A' द्वारा निरूपित किया गया हो तो,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \cdots\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \cdots\cdots a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \cdots\cdots a_{3n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} \cdots\cdots a_{mn} \end{bmatrix} = ((a_{ij}))$$

जहाँ $i = 1, 2, 3, \ldots, m$

$j = 1, 2, 3, \ldots, n$

टिप्पणी : अंक a_{ij} में अनुलग्न i उस पंक्ति संख्या और j उस स्तम्भ संख्या को निरूपित करते हैं जिसमें वह स्थित है।

आव्यूह के कुछ गुण

(क-1) यदि आव्यूह में पंक्तियों की संख्या स्तम्भों की संख्या के समान हो, अर्थात् $m = n$ तो इसे वर्ग आव्यूह कहते हैं।

(क-2) यदि आव्यूह में (i, j) वां अंक वही हो जो (j, i) वां अंक है, अर्थात् $a_{ij} = a_{ji}$ हो तो इसे सममित (symmetric) आव्यूह कहते हैं।

(क-3) यदि आव्यूह में $a_{ij} = -a_{ji}$ हो तो इसे असममित (asymmetric) आव्यूह कहते हैं।

(क-4) यदि आव्यूह A की विमिति $(m \times 1)$ हो तो इसे स्तम्भ वेक्टर (column vector) कहते हैं और $(1 \times n)$ हो तो इसे पंक्ति वेक्टर कहते हैं। प्रायः स्तम्भ वेक्टर को $\underline{a}'$ और पंक्ति वेक्टर को $\underline{a}$ से निरूपित करते हैं।

$$\underline{a}' = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ a_{m1} \end{bmatrix} \quad , \quad \underline{a} = (a_{11} \ \ a_{12}, a_{13}, \ldots a_{1n}$$

(क–5) यदि प्राव्यूह को एक अदिश राशि (scalar quantity) c से गुणा कर दें तो प्राव्यूह का प्रत्येक अंश c से गुणा हो जाता है। माना c $A = B$ तो B का प्रत्येक अंश $b_{ij} = c\, a_{ij}$ साथ ही $C \times A = A \times C = B$

(क–6) दो प्राव्यूह A और B समान कहलाते हैं जब कि दोनों की विमिति एक समान हो और प्रत्येक (i, j) के लिए $a_{ij} = b_{ij}$ हो।

(क–7) एक वर्ग प्राव्यूह A जिसमें विकर्ण के अंशों के अतिरिक्त अन्य अंश शून्य हों विकर्ण प्राव्यूह कहलाता है।

(क–8) यदि एक विकर्ण प्राव्यूह में विकर्ण का प्रत्येक अंश 1 हो तो इस प्राव्यूह को ऐकिक प्राव्यूह कहते हैं और इसे T से सूचित करते हैं।

(क–9) एक प्राव्यूह A जिसके सब अंश शून्य के समान हों उसे शून्य प्राव्यूह (null matrix) कहते हैं और इसे (0) से निरूपित करते हैं।

प्राव्यूहों पर कुछ क्रियायें

(क–10) यदि प्राव्यूह A में पत्तियों को स्तम्भों के रूप में और स्तम्भों को पत्तियों के रूप में लिख दें अर्थात् $a'_{ij} = a_{ji}$ तो प्राप्त प्राव्यूह को A का परिवर्त (transpose) प्राव्यूह कहते हैं और इसे A′ से निरूपित करते हैं, यदि A की विमिति (m×n) है तो A′ की विमिति (n×m) हो जाती है जैसे,

$$A = \underset{(3\times 2)}{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}} \qquad A = \underset{(2\times 3)}{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}}$$

(क–11) दो प्राव्यूह A तथा B तभी जोड़े जा सकते हैं जब कि A और B की विमिति समान हो और यदि $\underset{(m\times n)}{A = ((a_{ij}))}$, $\underset{(m\times n)}{B = ((b_{ij}))}$

तो $\underset{m\times n}{(A+B) = ((a_{ij} + b_{ij}))}$

$$(A+B)' = A' + B'$$

(क–12) दो आव्यूह A तथा B का गुणनफल A B तभी सम्भव है जब कि पूर्व गुणन (*Pre-multiplying*) आव्यूह A में स्तम्भों की संख्या उत्तर गुणन (*Post-multiplying*) आव्यूह B में पंक्तियों की संख्या के समान हो। यदि A व B के विमिति क्रमश $(m \times n)$ और $(n \times p)$ हो तो आव्यूह A B की विमिति $(m \times p)$ होगी।

माना $AB = C = ((C_{ij}))$, तो

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj}$$

यदि A का B से गुणा A B हो सकता है तो यह आवश्यक नहीं है कि B का A से गुणा B A भी सम्भव हो।

गुणनफल A B तथा B A यदि दोनों सम्भव हों तो आवश्यक नहीं कि वे समान हैं।

$$\underset{(4\times 3)}{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix}; \quad \underset{(3\times 2)}{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}$$

तो

$$\underset{(4\times 2)}{AB} = \begin{bmatrix} (a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31}) & (a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32}) \\ (a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31}) & (a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32}) \\ (a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21}+a_{33}b_{31}) & (a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22}+a_{33}b_{32}) \\ (a_{41}b_{11}+a_{42}b_{21}+a_{43}b_{31}) & (a_{41}b_{12}+a_{42}b_{22}+a_{43}b_{32}) \end{bmatrix}$$

(क–13) $(AB)' = B'A'$

(क–14) यदि A एक वर्ग आव्यूह है तो $A^2 = AA$ और $A^3 = AAA$.

सारणिक

(क–15) परिभाषा . एक वर्ग आव्यूह के मदों के एक वास्तविक मान फलन (real valued function) को सारणिक कहते हैं।

यदि A एक $(m \times m)$ विमिति का आव्यूह है तो सारणिक को $|A|$ द्वारा निरूपित करते हैं।

यदि $\underset{(m\times m)}{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\ldots a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\ldots a_{2m} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\ldots a_{3m} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3}\ldots a_{mm} \end{bmatrix}$

तो

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\ldots a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\ldots a_{2m} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\ldots a_{3m} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3}\ldots a_{mm} \end{vmatrix}$$

(क–16) यदि

$$\underset{(2\times 2)}{|A|} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

तो $|A| = (a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21})$ है।

(क–17) यदि किसी वर्ग आव्यूह की दो पंक्ति या दो स्तम्भ आपस में अदल-बदल कर दें तो सारणिक का चिह्न बदल जाता है। स्पष्ट है कि यदि इन परिवर्तनों की संख्या सम हो तो सारणिक का चिह्न वही रहता है और विषम हो तो चिह्न बदल जाता है।

(क–18) यदि सारणिक में एक पंक्ति में से दूसरी पंक्ति या एक स्तम्भ में से दूसरे स्तम्भ को घटा या जोड़ दें तो इसके मान पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता है।

(क–19) यदि सारणिक में कोई दो पंक्ति या स्तम्भ सर्वसम (identical) हों तो सारणिक का मान शून्य होता है।

(क–20) यदि सारणिक में किसी एक पंक्ति या स्तम्भ के सभी अंश शून्य हों तो सारणिक का मान शून्य होता है।

(क–21) यदि किन्ही दो वर्ग आव्यूहों A व B का गुणनफल AB=C है तो

$$|A|\times|B| = |C|$$

(क–22) एक सारणिक में यदि किसी अंश से सम्बद्ध पंक्ति और स्तम्भ को काट दें तो शेष सारणिक को उस अंश का माईनर (minor) कहते हैं। जैसे,

$$\underset{3\times 3}{|A|} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

है तो a_{11} का माईनर, सारणिक $\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ होता है ।

इसी प्रकार

a_{22} का माईनर $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$ है ।

(क-23) किसी अंश a_{ij} के माईनर को उचित चिह्न के साथ रख देने पर यह a_{ij} का सह खण्ड (cofactor) कहलाता है । माईनर का चिह्न $(-1)^{i+j}$ द्वारा ज्ञात करते हैं । सहखण्डक को A_{ij} द्वारा निरूपित करते हैं ।

अत (क-24) के अनुसार a_{11} का सहखण्डक

$$= (-1)(1+1) \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

और a_{23} का सहखण्डक $= (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$

(क-25) एक आव्यूह $\underset{(m\times m)}{A}$ के सारणिक के मान का परिकलन निम्न सूत्र द्वारा कर सकते हैं —

$$|A| = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \text{ (cofactor } a_{ij}),$$

$$i, j = 1, 2, 3, \ldots, m$$

$$= \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \text{ (cofactor } a_{ij})$$

स्पष्ट है कि एक पंक्ति या स्तम्भ के अंशों को उनके सहखण्डों से गुणा का योग सारणिक के मान के समान होता है ।

(क–26) एक वर्ग माव्यूह जिसके सारणिक का मान शून्य हो अव्युत्क्रमणीय माव्यूह (singular matrix) कहलाता है अन्यथा व्युत्क्रमणीय माव्यूह (non-singular matrix) कहलाता है।

(क–27) यदि एक व्युत्क्रमणीय वर्ग माव्यूह A के लिए एक ऐसा अन्य व्युत्क्रमणीय वर्ग माव्यूह B ज्ञात कर सकते हैं कि AB = I हो तो B को माव्यूह A का प्रतिलोम माव्यूह (inverse matrix) कहते हैं।

यदि $A = ((a_{ij}))$ एक व्युत्क्रमणीय वर्ग-माव्यूह हो तो उसके प्रतिलोम माव्यूह $A^{-1} = ((a^{ij}))$ के अंश a^{ij} को निम्न सूत्र की सहायता से ज्ञात कर सकते हैं।

$$a^{ij} = \frac{\text{cofactor } a_{ji}}{|A|} = \frac{A_{ji}}{|A|}$$

प्रतिलोम माव्यूह ज्ञात करने की दो विधियाँ जो व्यापक रूप में प्रयोग की जाती हैं यहाँ दी गई हैं।

प्रतिलोम माव्यूह ज्ञात करने की विधियाँ

(1) कीलकीय संघनन-विधि

यदि A एक साधारण वर्ग माव्यूह है जिसका अंश a_{ij} है तो इसका प्रतिलोम माव्यूह कीलकीय विधि द्वारा निम्न प्रकार ज्ञात कर सकते हैं। सिद्धान्त रूप में यह विधि इस प्रकार है।

पहले A के तुल्य रख दिया जब कि I की विमिति वही है जो A की है। फिर A पर विभिन्न क्रियायें इस प्रकार करते हैं कि A, I में परिवर्तित हो जाये। A पर की गई सभी क्रियाओं को I पर भी साथ-साथ करते जाते हैं। इस प्रकार जब A, I में परिवर्तित हो जाता है तो I, A^{-1} में परिवर्तित हो जाता है।

यहाँ इस विधि को (4×4) क्रम के एक माव्यूह को लेकर स्पष्ट किया गया है।

पंक्ति संख्या								
1.	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	1	0	0	0
2.	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	0	1	0	0
3.	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	0	0	1	0
4.	a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	0	0	0	1
5.	1	b_{12}	b_{13}	b_{14}	d_{11}	0	0	0
							I कीलकीय पंक्ति	
6.	0	$b_{12\cdot1}$	$b_{13\cdot1}$	$b_{14\cdot1}$	$-a_{21}d_{11}$	1	0	0
7.	0	$b_{12\cdot2}$	$b_{13\cdot2}$	$b_{14\cdot2}$	$-a_{21}d_{11}$	0	1	0
8	0	$b_{12\cdot3}$	$b_{13\cdot3}$	$b_{14\cdot3}$	$-a_{41}d_{11}$	0	0	1
							II कीलकीय पंक्ति	

9.		1	b_{23}	b_{24}	d_{21}	d_{22}	0	0
10.		0	$b_{23\,1}$	$b_{24\cdot 1}$	$d_{21\cdot 1}$	$-b_{12\cdot 2} \times d_{22}$	1	0
11.		0	$b_{23\,2}$	$b_{24\,2}$	$d_{21\,2}$	$-b_{13\,2}$ d_{22}	0	1
							III कीलकीय पंक्ति	
12.			1	b_{34}	d_{31}	d_{32}	d_{33}	0
13			0	$b_{34\,1}$	$d_{31\,1}$	$d_{32\,1}$	$-d_{33}$ $b_{23\,3}$	1
							IV कीलकीय पंक्ति	
14.				1	c_{41}	c_{42}	c_{43}	c_{44}
15	1	b_{12}	b_{13}	b_{14}	d_{11}	0	0	0
16.	0	1	b_{23}	b_{24}	d_{21}	d_{22}	0	0
17.	0	0	1	b_{34}	d_{31}	d_{32}	d_{33}	0
18.	0	0	0	1	c_{41}	c_{42}	c_{43}	c_{44}
19.	1	0	$b_{53\,1}$	$b_{54\,2}$	$d_{61\,1}$	$-d_{23}$	0	0
20.	0	1	0	$b_{61\,1}$	$d_{61\,1}$	$d_{62\,1}$	$-d_{23}$	0
21.	0	0	1	0	c_{31}	c_{32}	c_{33}	c_{34}
22	0	0	0	1	c_{41}	c_{42}	c_{43}	c_{44}
23	1	0	0	$d_{61\,1}$	$d_{61\,1}$	$d_{61\cdot 2}$	$d_{73\,1}$	d_{44}
24.	0	1	0	0	c_{21}	c_{22}	c_{23}	c_{24}
25.	0	0	1	0	c_{31}	c_{32}	c_{33}	c_{34}
26.	0	0	0	1	c_{41}	c_{42}	c_{43}	c_{44}
27.	1	0	0	0	c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{14}
28.	0	1	0	0	c_{21}	c_{22}	c_{23}	c_{24}
29.	0	0	1	0	c_{31}	c_{32}	c_{33}	c_{34}
30.	0	0	0	1	c_{41}	c_{42}	c_{43}	c_{44}

क्रिया विधि

(1) पहली पंक्ति को इसके पहले पद a_{11} से भाग दिया जिससे यह पद 1 हो जाये। इस प्रकार प्राप्त पंक्ति को प्रथम कीलकीय पंक्ति कहते हैं। जबकि $b_{12}=\frac{a_{12}}{a_{11}}$

$b_{13}=\frac{a_{13}}{a_{11}}$, $b_{14}=\frac{a_{14}}{a_{11}}$, $d_{11}=\frac{1}{a_{11}}$ यदि प्रथम पंक्ति का प्रथम अंश शून्य हो तो अन्य पंक्ति को बदल कर ऊपर ले जाना चाहिये। जिससे पहली पंक्ति का पहला अंश शून्य न हो।

(2) प्रथम कीलकीय पंक्ति (5) को a_{21} से गुणा करके, दूसरी पंक्ति के तदनुसार अंशों में से घटा देते हैं। जिससे पहले स्तम्भ का दूसरा अंश शून्य हो जाये जबकि

$$b_{12\cdot 1}=a_{22}-a_{21}b_{12},\ b_{13\cdot 1}=a_{21}b_{13},\ b_{14\cdot 1}=a_{24}-a_{21}b_{14}$$

(3) इसी प्रकार a_{31} व a_{41} में क्रमश पंक्ति (5) को गुणा करके पंक्ति (3) व (4) में से घटा देते हैं जिनमे पहले स्तम्भ के 1 को छोड़कर अन्य अंश शून्य हो जाते हैं। पंक्तियो (7) व (8) के अंश पंक्ति (6) की भाँति ज्ञात किये गये हैं।

(4) अब पंक्ति (5) व पहले स्तम्भ को छोड़ दिया जाता है इस प्रकार एक आव्यूह (3×3) विभिति का रह जाता है, ऊपर दी हुई क्रियाओं को फिर से दोहराते हैं, जिसके परिणामस्वरूप (2×2) विभिति का एक आव्यूह पंक्ति (9) व दूसरे स्तम्भ को छोड़ने पर प्राप्त होता है।

(5) इसे (2×2) विभिति के आव्यूह पर पहली तीन क्रियाओं को दोहराते हैं जिसके परिणामस्वरूप पंक्ति (12) व तीसरे स्तम्भ को छोड़ (1×1) विभिति का एक आव्यूह प्राप्त हो जाता है।

(6) $b_{34\cdot 1}$ से पंक्ति (13) को भाग करने पर IV कीलकीय पंक्ति प्राप्त हो जाती है। इसके अंशों को c_{41}, c_{42}, c_{43}, c_{44} मान लिया गया है। कीलकीय पंक्तियो की संख्या आव्यूह में पंक्तियो की संख्या के समान होती है।

(7) अब केवल कीलकीय पंक्तियों को लिख दिया। इसे देखने से स्पष्ट है कि दायीं ओर के आव्यूह में निम्न त्रिभुज के अंश 0 है। अब फिर ऊपरी त्रिभुज के अंशो को शून्य करना है जिससे दायीं ओर का आव्यूह ऐकिक आव्यूह I में परिवर्तित हो जाता है।

(8) पहले पंक्ति (16) को b_{12} से गुणा करके पंक्ति (15) में से घटाया फिर पंक्ति (17) को b_{23} से गुणा करके पंक्ति (16) में से घटाया, इसी प्रकार पंक्ति (18) को b_{34} से गुणा करके पंक्ति (17) में से घटाया। इस प्रकार तीन अंश और शून्य हो जाते हैं जबकि $b_{53\cdot 1}=b_{13}-b_{12}\,b_{23}, b_{54\cdot 1}=b_{14}-b_{12}b_{24}\,d_{51\cdot 1}=d_{11}-b_{12}d_{21}$........., $c_{31}=d_{31}-b_{34}c_{41}$,

(9) इसी प्रकार पंक्ति (21) को $b_{53\cdot 1}$ से गुणा करके पंक्ति 19 में से घटाया, पंक्ति (22) को $b_{61\cdot 1}$ से गुणा करके पंक्ति 20 में से घटाया।

(10) पंक्ति (26) को $b_{91\cdot 1}$ से गुणा करके, पंक्ति 23 में से घटा दिया।

(11) दायी ओर का आव्यूह जिसके अंश c_{ij} हैं आव्यूह A के प्रतिलोम आव्यूह A^{-1} को निरूपित करता है। इस विधि का पहला लाभ यह है कि इसके द्वारा समीकरणों को भी हल किया जा सकता है। यदि आव्यूह समीकरणों में अज्ञात मानों के गुणांकों द्वारा बना है तो कीलकीय पंक्तियों की सहायता से अज्ञात मान ज्ञात हो जाते हैं।

दूसरा लाभ यह है कि इस विधि द्वारा आव्यूह के सारणिक का मान कीलकीय पंक्तियों के प्रथम अंशों को गुणा करने पर ज्ञात हो जाता है।

कीलकीय संघनन विधि किसी भी अव्युत्क्रमणीय वर्ग आव्यूह के लिए उपयुक्त है। इस विधि में त्रुटि न होने की जाँच करने का भी साधन है। प्रत्येक पंक्ति के योग को अंत में एक स्तम्भ में रख लिया जाता है। इस स्तम्भ के अंशों पर वही क्रिया करते रहते हैं जो उसके अंश के तदनुसार पंक्ति पर की गई है। इस प्रकार सदैव किसी भी पंक्ति का योग, उसके अन्तिम स्तम्भ में अंश के समान होता है। यदि ऐसा न हो तो भी समझ लेना चाहिये कि कहीं परिकलन में त्रुटि हो गई है। इन्हीं कारणों से कीलकीय संघनन विधि का प्रयोग बहुधा किया जाता है।

संक्षिप्त डूलिटिल विधि

इस विधि का प्रयोग केवल अव्युत्क्रमणीय, सममित, वर्ग आव्यूह का प्रतिलोम ज्ञात करने के हेतु ही किया जाता है। माना कि वर्गों के योग तथा गुणनफलों के योग द्वारा रचित (3×3) विमिति का आव्यूह S है जिसके अंश S_{ij} हैं। S का प्रतिलोम आव्यूह S^{-1} संक्षिप्त डूलिटिल विधि द्वारा निम्न प्रकार ज्ञात करते हैं। इस विधि के अन्तर्गत पहले S को समान विमितीय ऐकिक आव्यूह I के तुल्य रख दिया जाता है फिर पंक्तियों पर विभिन्न क्रियाओं को किया जाता है जिनका वर्णन नीचे दिया गया है —

पंक्ति	स्तम्भ						योग
	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	
R_1	S_{11}	S_{12}	S_{13}	1	0	0	T_1
R_2	S_{12}	S_{22}	S_{23}	0	1	0	T_2
R_3	S_{13}	S_{23}	S_{33}	0	0	1	T_3
R_4	S_{11}	S_{12}	S_{13}	1	0	0	T_1
R_5	1	$S_{12\,1}$	$S_{13\,1}$	d_{11}	0	0	$T_{1\,1}$
R_6	0	$S_{22\,1}$	$S_{23\,1}$	$d_{12\,1}$	1	0	$T_{2\,1}$
R_7	0	1	$S_{23\,2}$	$d_{11\,2}$	d_{22}	0	$T_{2\,2}$
R_8	0	0	$S_{33\,1}$	$d_{11\,2}$	$d_{22\,1}$	1	$T_{3\,1}$
R_9			1	$d_{11\,4}$	$d_{22\,2}$	d_{33}	$T_{3\,2}$

प्रतिलोम आव्यूह के अंश हैं।

$$C_{11} = 1 \times d_{11} + d_{11\,1} d_{11\,2} + d_{11\,3} d_{11\,4}$$
$$C_{12} = 1 \times 0 + d_{11\,1} d_{23} + d_{11\,3} d_{22\,2}$$
$$C_{13} = 1 \times 0 + d_{11\,2} \times 0 + d_{11\,3} d_{33}$$
$$C_{22} = 0 \times 0 + 1 \times k_{22} + d_{23\,1} d_{22\,2}$$
$$C_{23} = 0 \times 0 + 1 \times 0 + d_{23\,1} d_{33}$$
$$C_{33} = 0 \times 0 + 0 \times 0 + 1 \times d_{33}$$

क्रिया विधि

(1) पक्ति R_1 को पक्ति R_4 मे फिर से लिख दिया।

(2) पक्ति R_4 के प्रत्येक अश को इसके पहले अश S_{11} से भाग दिया अर्थात् R_4 S_{11} क्रिया को किया और प्राप्त अशो का R_5 म रख दिया।

(3) पक्ति R_5 को S_{12} से गुणा करके, पक्ति R_2 मे घटा दिया अर्थात् R_2–R_{42} R_5 क्रिया को किया। इस प्रकार अश है, $S_{22\,1} = S_{23} - S_{12}\,S_{22\,1}$ $S_{23\,1} = S_{23} - S_{12}\,S_{13\,1}$ और $d_{11\,1} = 0 - S_{12}d_{11}, T_{2\,1} = T_2 - S_{12}T_{1\,1}$ इन अशो को R_6 म रखा गया है।

(4) पक्ति R_3 म स S_{13} और पक्ति R_5 के अशो को गुणा करके और $S_{23\,1}$ को R_7 के अशो से गुणा करके घटा दिया अर्थात्

$$R_3 - R_4 R_{53} - R_6 R_{73}$$

इस प्रकार अश है,

$$S_{33\,1} = S_{33} - S_{13}S_{13\,1} - S_{23\,1}S_{23\,2}$$
$$d_{11\,2} = 0 - 1\ S_{13\,1} - d_{11\,1}S_{23\,2}$$

(5) पक्ति R_8 के अशो को $S_{33\,1}$ स भाग कर दिया। यदि आव्यूह की विमिति (4×4) या अधिक क्रम की हो तो डूलिटिल विधि को विस्तरित करके ऊपर की भाँति प्रयोग कर सकत हैं।

□□□

परिशिष्ट-ख

कुछ उपयोगी सूत्र

लघुगणक सम्बन्धी सूत्र

हम जानते हैं कि

$$10^2 = 100 \qquad (ख\ 1)$$

इसी को लघु के रूप में इस प्रकार लिख सकते हैं।

$$\log_{10} 100 = 2 \qquad (ख\ 1\ 1)$$

इसी प्रकार यदि

$$e^x = a \qquad (ख\ 2)$$

तो लघुगणक के रूप में

$$\log_e a = x \qquad (ख\ 2\ 1)$$

व्यंजक (ख 1 1) या (ख 2 1) में 10 या e लघुगणक का आधार है। यदि a और b दो संख्याएँ हैं और आधार e है तो

$$\log_e (ab) = \log_e a + \log_e b \qquad (ख\ 3)$$

$$\log_e \left(\frac{a}{b}\right) = \log_e a - \log_e b \qquad (ख\ 4)$$

$$\log_e (a)^n = n \log_e a \qquad (ख\ 5)$$

यदि आधार का परिवर्तन e से 10 में या 10 से e में करना हो तो निम्न सूत्र का प्रयोग करते हैं —

$$\log_e a = \log_{10} a \quad \log_e 10 \qquad (ख\ 6)$$

और $$\log_e 10 = 2\ 3026 \qquad ..(ख\ 6\ 1)$$

क्रमचय और संचय सम्बन्धी सूत्र

यदि कुल वस्तुएँ n हैं और इनमें से r वस्तुओं के क्रमचयों को $(n)_r$ से निरूपित करते हैं और संचयों को $\binom{n}{r}$ से निरूपित करते हैं।

$$(n)_r = n\,(n-1)\,(n-2) \ldots (n-r+1) \qquad (ख\ 7)$$

$$\binom{n}{r} = (n)_r / r! = \frac{n\,(n-1)(n-2) \ldots (n-r+1)}{r!} \qquad (ख\ 8)$$

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} \qquad ....(ख\ 8\ 1)$$

जबकि $n! = n\,(n-1)\,(n-2) \ldots 3.2.1$

$(a+b)^n$ का द्विपद विस्तार

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \ldots$$

$$+ \binom{n}{r} a^{n-r} b^r + \ldots + b^n \qquad \ldots(\text{ख}.9)$$

जबकि $\binom{n}{r} a^{n-r} b^r$, $(r+1)$ वा व्यापक पद है। $r=0, 1, 2, \ldots, n$, रखने पर द्विपद विस्तार के सब पद प्राप्त हो जाते हैं।

घातीय श्रेणी

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots \qquad \ldots(\text{ख}.2)$$

$$\text{और} \quad e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} + \ldots \qquad \ldots(\text{ख}.10.1)$$

लघुगणकीय श्रेणी

$$\log_e (1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots \qquad \ldots(\text{ख}.11)$$

और

$$\log_e (1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \ldots \qquad \ldots(\text{ख}.12)$$

$$\log_e \left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots\right) \qquad \ldots(\text{ख}.13)$$

श्रेणी (ख.13) में माना कि,

$$\frac{1+x}{1-x} = Z \qquad x = \frac{z-1}{z+1}$$

$$\log_e Z = 2\left\{\frac{z-1}{z+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^5 + \ldots\right\} \qquad \ldots(\text{ख}\ 14)$$

$n!$ के सन्निकट मान के लिए स्टर्लिंग-सूत्र

$$n! = \sqrt{2\pi}\ e^{-n} \cdot n^{n+\frac{1}{2}} \qquad \ldots(\text{ख}\ 15)$$

गामा-फलन

गामा फलन $G(\alpha, n)$ को α व n के वास्तविक धनात्मक मानों ($\alpha > 0$ और $n > 0$) के लिए निम्न समाकलन द्वारा दिया जाता है :—

$$G(a, n) = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-aX} dx \quad \text{....(ख 16)}$$

$$= \frac{\overline{|n}}{a^n} \quad \text{....(ख 16 1)}$$

यदि $a = 1$

$$\overline{|n} = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx \quad \text{....(ख 16 2)}$$

बीटा-फलन

बीटा फलन β (m, n) को m व n के वास्तविक धनात्मक मानो $m > 0$ और $n > 0$ के लिए निम्न समाकल द्वारा दिया जाता है।

$$\beta(m, n) = \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx \quad \text{....(ख 17)}$$

$$= \int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{(1+x)^{m+n}} dx \quad \text{....(ख 17.1)}$$

$$= \frac{\overline{|m} \, \overline{|n}}{\overline{|m+n}} \quad \text{....(ख 17.2)}$$

[जबकि $\overline{|n+1} = n\overline{|n}$]

□ □ □

परिशिष्ट–ग

समुच्चय सिद्धान्त का परिचय

समुच्चय[1] को हम इस प्रकार समझ सकते हैं। यह उन अवयवों या घटकों (elements) अथवा एककों या समुदाय हैं जो कि विचाराधीन हैं। जैसे यदि एक शैल्फ पर रखी पुस्तकें एक समुच्चय है तो इस पर रखी प्रत्येक पुस्तक इस समुच्चय का अवयव है।

अवयव x के समुच्चय A में होने को $x \in A$ द्वारा सूचित करते हैं। अवयव x के समुच्चय A में न होने को $x \notin A$ द्वारा सूचित करते हैं।

उपसमुच्चय :—माना कि A और A_1 दो समुच्चय हैं जिनमें A का प्रत्येक अवयव A का भी एक अवयव हो तो A_1 को A का उपसमुच्चय कहते हैं। इसके लिए प्रतीक $A_1 \subset A$ है अर्थात् A_1, A में अन्तर्विष्ट (Contains) है। या $A \supset A_1$ है अर्थात् A, A_1 को अन्तर्विष्ट करता है। इस स्थिति में $x \in A_1 \Rightarrow x \in A$ [जहाँ ⇒ : अन्तर्निहित] यदि दो समुच्चय A और B इस प्रकार हो कि $A \subset B$ और $B \subset A$ तो ये समुच्चय समान कहलाते हैं।

शून्य समुच्चय :— एक समुच्चय जिसमें कोई अवयव न हो तो इसे शून्य समुच्चय कहते हैं। शून्य समुच्चय को ϕ द्वारा निरूपित करते हैं। यह कह सकते हैं कि शून्य समुच्चय ϕ किसी भी समुच्चय A का उपसमुच्चय होता है।

पूरक समुच्चय :—यदि समुच्चय S का एक उपसमुच्चय A है अर्थात् $A \subset S$ तो S के उन सब अवयवों का समुदाय जो कि A में नहीं हैं A का पूरक समुच्चय कहलाते हैं और इसे $\overline{A}$ द्वारा सूचित करते हैं।

समुच्चयों का योग :—समुच्चयों के किसी सग्रह (collection) c में यदि एक ऐसा समुच्चय है जिसका प्रत्येक अवयव उस संग्रह के कम से कम एक समुच्चय का अवयव हो तो वह समुच्चय, संग्रह के सभी समुच्चयों का योग कहलाता है और इसके लिए प्रतीक $\bigcup_{c} \lambda$ का प्रयोग करते हैं। समुच्चयों के योग सम्बन्धी कुछ तथ्य निम्न प्रकार हैं जिनको कि आवश्यकता पड़ने पर सुगमता से सिद्ध किया जा सकता है :—

(i) $A \cup \phi = A$

(ii) $A \cup B = B \cup A$; यह योग का क्रम विनिमेय (commutative) नियम है।

(iii) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$; यह योग का साहचर्य (associative) नियम है।

(iv) $A \subset B$ यदि और केवल यदि $A \cup B = B$

समुच्चयों का प्रतिच्छेद :—समुच्चयों के प्रत्येक संग्रह λ के लिए यदि एक ऐसे समुच्चय का अस्तित्व है जिसका कि प्रत्येक अवयव कथित संग्रह के प्रत्येक समुच्चय का अवयव हो

1. समुच्चय को अपरिभाषित ही छोड़ दिया गया है।

तो उस समुच्चय को संग्रह के समुच्चयों का प्रतिच्छेद कहते हैं और इसके लिए प्रतीक $\bigcap_{c} \lambda$ का प्रयोग करते हैं।

प्रतिदर्श समष्टि :—किसी यादृच्छिक प्रयोग के समस्त सम्भव दृश्य-परिणामों (outcomes) के संग्रह को प्रतिदर्श समष्टि कहते हैं और इसे Ω से सूचित करते हैं।

असंयुक्त समुच्चय :—कोई भी दो समुच्चय A व B असंयुक्त कहे जाते हैं यदि इनमें कोई भी अवयव सार्व न हो अर्थात् $A \cap B = \phi$ हो। इस परिभाषा को दो से अधिक समुच्चयों के लिए विस्तरित किया जा सकता है।

बोरल क्षेत्र :—समुच्चयों का एक वर्ग 'β' बोरल क्षेत्र कहलाता है यदि इसमें निम्न गुण हों :—

(i) β एक अशून्य वर्ग है और इसमें Ω अन्तर्विष्ट है।

(ii) यदि एक समुच्चय $A \in \beta$ तो $\overline{A} \in \beta$

(iii) यदि $\{A_i\}$ गणनीयत: अनन्त समुच्चयों (countably infinite sets) का एक अनुक्रम है जबकि प्रत्येक $A_i \in \beta$, तो

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \beta$$

□ □ □

परिशिष्ट-घ

सारणी (घ-1) प्रसामान्य बंटन की कोटियाँ

X.	·00	·01	·02	·03	·04
0·0	·3989	·3989	·3989	·3988	·3986
0·1	·3970	·3965	·3961	·3956	·3951
0·2	·3910	·3902	·3894	·3885	·3876
0·3	·3814	·3802	·3790	·3778	·3765
0·4	·3683	·3668	·3653	·3637	·3621
0·5	·3521	·3503	·3485	·3467	·3448
0·6	·3332	·3312	·3292	·3271	·3251
0·7	·3123	·3101	·3079	·3056	·3034
0·8	·2897	·2874	·2850	·2827	·2803
0·9	·2661	·2637	·2613	·2589	·2565
1·0	·2420	·2396	·2371	·2347	·2323
1·1	·2179	·2155	·2131	·2107	·2083
1·2	·1942	·1919	·1895	·1872	·1849
1·3	·1714	·1691	·1669	·1647	·1626
1·4	·1497	·1476	·1456	·1435	·1415
1·5	·1295	·1276	·1257	·1238	·1219
1·6	·1109	·1092	·1074	·1057	·1040
1·7	·0940	·0925	·0909	·0893	·0878
1·8	·0790	·0775	·0761	·0748	·0734
1·9	·0656	·0644	·0632	·0620	·0608
2·0	·0540	·0529	·0519	·0508	·0498
2·1	·0440	·0431	·0422	·0413	·0404
2·2	·0355	·0347	·0339	·0332	·0325
2·3	·0283	·0277	·0270	·0264	·0258
2·4	·0224	·0219	·0213	·0208	·0203
2·5	·0175	·0171	·0167	·0153	·1058
2·6	·0136	·0132	·0129	·0126	·0122
2·7	·0104	·0101	·0099	·0096	·0093
2·8	·0079	·0077	·0075	·0073	·0071
2·9	·0060	·0058	·0056	·0055	·0053
	·01	·1	·2	·3	·4
3·0	·0044	·0033	·0024	·0017	·0012

विस्तृत सारणी (घ-1)

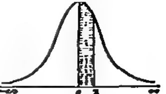
'05	06	07	08	09	1	2	3	4	5
'3984	3982	3980	3977	3973	0	0	−1	−1	−1
'3945	3939	3932	3925	3918	−1	−1	−2	−2	−3
3867	3857	3847	3836	3825	−1	−2	−3	−4	−5
3752	3739	3725	3712	3697	−1	−3	−4	−5	−6
3605	3589	3572	3555	3538	−2	−3	−5	−6	−8
3429	3410	3391	3372	3352	−2	−4	−6	−8	−9
3230	3209	3187	3166	3144	−2	−4	−6	−8	−10
3011	2989	2966	2943	2920	−2	−5	−7	−9	−11
2780	2756	'2732	2709	2685	−2	−5	−7	−9	−12
'2541	2516	'2492	2468	2444	−2	−5	−7	−10	−12
'2299	2275	'2251	2227	2203	−2	−5	−7	−10	−12
'2059	2036	2012	1989	1965	−2	−5	−7	−10	−12
'1826	'1804	1781	1785	1736	−2	−5	−7	−9	−11
1604	'1582	1561	1539	1518	−2	−4	−7	−9	−11
1394	'1374	'1354	1334	1315	−2	−4	−6	−8	−10
'1200	1182	1163	1145	1127	−2	−4	−6	−7	−9
1023	1006	0989	0973	0957	−2	−3	−5	−7	−8
0863	0848	0833	0818	0804	−2	−3	−5	−6	−8
'0721	0707	0694	0681	0669	−1	−3	−4	−5	−7
0596	0584	0573	0562	0551	−1	−2	−4	−5	−6
0488	0478	0468	4059	0449	−1	−2	−3	−4	−5
0396	0387	0397	0371	0363	−1	−2	−3	−3	−4
0317	0310	0303	0297	0290	−1	−1	−2	−3	−4
0252	0246	0241	0235	0229	−1	−1	−2	−2	−3
0198	0194	0189	0184	0180	0	−1	−1	−2	−2
0154	0151	0147	0143	0139	0	−1	−1	−2	−2
0119	'0116	0113	0110	0107	0	−1	−1	−1	−2
0091	0088	0086	0084	0081	0	−1	−1	−1	−1
0069	0067	0065	0063	0061	0	0	−1	−1	−1
0051	0050	0048	0047	0046	0	0	0	−1	−1

5	6	7	8	9
0009	0006	0004	0003	0002

Table घ-1 is taken from Table II of Fisher and Yates : **Statistical Tables for Biological, Agricultural and Medical Research** Published by Longman Group Ltd , London (previously published by Oliver & Boyd, Edinburgh) and by the permission of the authors and publishers

सारणी (घ–2) प्रसामान्य वक्र के नीचे ■ से Z तक का क्षेत्र

Normal Curve Tables



- z ≤

Areas. चित्र (घ 2)

■	·00	·01	·02	·03	·04	·05	06	07	08	·09
0 0	·00000	·00399	·00798	·01197	·01595	·01994	·02392	02790	03188	·03586
0 1	·03983	04380	·04776	·05172	·05567	·05962	06356	06749	07142	·07535
0·2	·07926	·08317	·08706	·09095	·09483	·09871	·10257	10642	11026	·11409
0·3	·11791	·12172	·12552	·12930	·13307	·13683	·14058	14431	·14803	·15173
0·4	·15542	·15910	·16276	·16640	·17003	·17364	·17724	·18082	·18439	·18793
0·5	·19146	·19497	·19847	·20194	·20540	·20884	·21226	21566	·21904	·22240
0·6	·22575	·22907	·23237	·23565	·23891	·24215	·24537	24857	·25175	·25490
0·7	·25804	·26115	·26424	·26730	·27035	·27337	·27637	27935	·28230	·28524
0·8	·28814	·29103	·29389	·29673	·29955	·30234	·30511	·30785	·31057	·31372
0·9	·31594	·31859	·32121	·32381	·32639	·32894	·33147	33398	·33646	·33891
1·0	·34134	·34375	·34614	·34849	·35083	·35314	·35543	·35769	·35993	·36214
1·1	·36433	·36650	·36864	·37076	·37286	·37493	·37698	37900	·38100	·38298
1·2	·38493	·38686	·38877	·39065	·39251	·39435	·39617	·39796	·39973	·40147
1·3	·40320	·40490	·40658	·40824	·40988	·41198	·41309	·41466	·41621	·41774
1·4	·41924	·42073	·42220	·42364	·42507	·42647	·42785	·42922	·43056	·43189
1·5	·43319	·43448	·43574	·43699	·43822	·43943	·44062	·44179	·44295	·44408
1·6	·44520	·44630	·44738	·44845	·44950	·45053	·45154	·45254	·35352	·45449
1·7	·45543	·45637	·45728	·45818	·45907	·45994	·46080	·46164	·46246	·46327
1·8	·46407	·46485	·46562	·46638	·46712	·46784	·46856	·46926	·46995	·47062
1·9	·47128	·47193	·47257	·47320	·47381	·47441	·47500	·47558	·47615	·47670

विस्तृत सारणी (घ–2)

(2)

2·0	47725	·47784	·47831	·47882	·47932	·47982	·48030	·48077	48124	48169
2·1	·48214	·48257	·48300	48341	48382	·48422	·48461	48500	·48537	·48574
2·2	·48610	·48645	48679	·48713	48745	·48778	·48809	48840	·48870	44899
2·3	·48928	48956	48983	49010	·49036	49061	·49086	·49111	·49134	·49158
2·4	·49180	49202	·49224	49245	·49266	49286	·49305	49324	·49343	49361
2·5	49379	·49396	49413	·49430	49446	·49461	49477	49492	49506	49520
2·6	·49534	49547	49560	49573	49585	49598	49609	49621	49632	49643
2·7	·49653	49664	49674	·49683	·49693	49702	49711	49720	49728	49736
2·8	49744	49752	49760	49767	49774	49781	49788	49795	49801	49807
2·9	49813	49819	49825	49831	49836	49841	49846	49851	49856	49861
3·0	49865	49869	49874	49878	49882	49886	49889	49893	49896	49900
3·1	49903	49906	49910	49913	49916	49918	49921	49924	49926	·49929
3·2	49931	49934	49936	49938	49940	49942	49944	49946	49948	94950
3·3	49952	49953	49955	49957	·49958	49960	49961	49962	49964	49965
3·4	49966	49968	49969	49970	49971	49972	49973	49974	49975	49976
3·5	49977	49978	49978	49979	49980	49981	49981	49982	49983	49983
3·6	49984	49985	49985	49986	49986	49987	49987	49988	49988	49989
3·7	49989	49990	49990	49990	49991	49991	49992	49992	49992	49992
3·8	49993	49993	49993	49994	49994	49994	49994	49995	49995	49995
3·9	49995	49995	49996	49996	49996	49996	49996	49996	49997	49997
4·0	49997	—	—	—	—	—	—			
4·5	499997	—	—	—	—	—	—			
5·0	4999997	—	—	—	—	—	—	—		

Table घ–2 is taken from Table II_1 of Fisher and Yates Statistical Tables for Biological Agricultural and Medical Research, Published by Longman Group Ltd, London (previously published by Oliver & Boyd Edinburgh and by the permission of the authors and publishers

सारणी (घ–3), t का बटन

स्व० को० (d f)	प्रायिकता 5	4	3	2	1	05	02	01	001
1	1 000	1 376	1 963	3 078	6 314	12 706	31 821	63 657	636 619
2	816	1 061	1 386	1 886	2 920	4 303	6 965	9 925	31 598
3	765	978	1 250	1 638	2 353	3 182	4 541	5 841	12 924
4	741	941	1 190	1 533	2 132	2 776	3 747	4 604	8 610
5	727	920	1 156	1 476	2 015	2 571	3 365	4 032	6 869
6	718	906	1 134	1 440	1 943	2 447	3 143	3 707	5 959
7	711	896	1 119	1 415	1 895	2 365	2 998	3 499	5 408
8	706	889	1 108	1 397	1 860	2 306	2 896	3 355	5 041
9	703	883	1 100	1 383	1 833	2 262	2 821	3 250	4 781
10	700	879	1 093	1 372	1 812	2 228	2 764	3 169	4 587
11	697	876	1 088	1 363	1 796	2 201	2 718	3 106	4 437
12	695	873	1 083	1 356	1 782	2 179	2 681	3 055	4 318
13	694	870	1 079	1 350	1 771	2 160	2 650	3 012	4 221
14	692	868	1 076	1 345	1 761	2 145	2 624	2 977	4 140
15	691	866	1 074	1 341	1 753	2 131	2 602	2 947	4 073
16	690	865	1 071	1 337	1 746	2 120	2 583	2 921	4 015
17	689	863	1 069	1 333	1 740	2 110	2 567	2 898	3 965
18	688	862	1 067	1 330	1 734	2 101	2 552	2 878	3 922
19	688	861	1 066	1 328	1 729	2 093	2 539	2 861	3 883
20	687	860	1 064	1 325	1 725	2 086	2 528	2 845	3 850
21	686	859	1 063	1 323	1 721	2 080	2 518	2 831	3 819
22	686	858	1 061	1 321	1 717	2 074	2 508	2 819	3 792

स्व० को० (d f)	प्रायिकता 5	4	3	2	1	05	02	01	001
23	685	858	1 060	1 319	1 714	2 069	2 500	2 807	3 767
24	685	857	1 059	1 318	1 711	2 064	2 492	2 797	3 745
25	684	856	1 058	1 316	1 708	2 060	2 485	2 787	3 725
26	684	856	1 058	1 315	1 706	2 056	2 479	2 779	3 707
27	684	855	1 057	1 314	1 703	2 052	2 473	2 771	3 690
28	683	855	1 056	1 313	1 701	2 048	2 467	2 763	3 674
29	683	854	1 055	1 311	1 699	2 045	2 462	2 756	3 659
30	683	854	1 055	1 310	1 697	2 042	2 457	2 750	3 646
40	681	851	1 050	1 303	1 684	2 021	2 423	2 704	3 551
60	679	848	1 046	1 296	1 671	2 000	2 390	2 660	3 460
120	677	845	1 041	1 289	1 658	1 980	2 358	2 617	3 373
∞	674	842	1 036	1 282	1 645	1 960	2 326	2 576	3 291

Table घ-3 is taken from Table III of Fisher and Yates Statistical Tables for Biological, Agricultural and Medical Research, Published by Longman Group Ltd, London (previously published by Oliver & boyd Edinburgh) and by the permission of the authors and publishers.

सारणी (घ-4), काई वर्ग बंटन

स्व० का० (d f)	प्रायिकता 50	30	20	10	05	02	01	001
1	455	1 074	1 642	2 706	3 841	5 412	6 635	10 827
2	1 386	2 408	3 219	4 605	5 991	7 824	9 210	13 815
3	2 366	3 665	4 642	6 251	7 815	9 837	11 345	16 266
4	3 357	4 878	5 989	7 779	9 488	11 668	13 277	18 467
5	4 351	6 064	7 289	9 236	11 070	13 388	15 086	20 515
6	5 348	7 231	8 558	10 645	12 592	15 033	16 812	22 457
7	6 346	8 383	9 803	12 017	14 067	16 622	18 475	24 322
8	7 344	9 524	11 030	13 362	15 507	18 168	20 090	26 125
9	8 343	10 656	12 242	14 684	16 919	19 679	21 666	27 877
10	9 342	11 781	13 442	15 987	18 307	21 161	23 209	29 588
11	10 341	12 899	14 631	17 275	19 675	22 618	24 725	31 264
12	11 340	14 011	15 812	18 549	21 026	24 054	26 217	32 909
13	12 340	15 119	16 985	19 812	22 362	25 472	27 688	34 528
14	13 339	16 222	18 151	21 064	23 685	26 873	29 141	36 123
15	14 339	17 322	19 311	22 307	24 996	28 259	30 578	37 697
16	15 338	18 418	20 465	23·542	26 296	29 633	32 000	39 252
17	16 338	19 511	21 615	24 769	27 587	30 995	33 409	40 790
18	17 338	20 601	22 760	25 989	28 869	32 346	34 805	42 312

वितत सारणी (घ-4)
(2)

19	18 338	21 689	23 900	27 204	30 144	33 687	36 191	43 820
20	19 337	22 775	25 038	28 412	31 410	35 020	37 566	45 315
21	20 337	23 858	26 171	29 615	32 671	36 343	38 932	46 797
22	21 337	24 939	27 301	30 813	33 924	37 659	40 289	48 268
23	22 337	26 018	28 429	32 007	35 172	38 968	41 638	49 728
24	23 337	27 096	29 553	33 196	36 415	40 270	42 980	51 179
25	24 337	28 172	30 675	34 382	37 652	41 566	44 314	52 620
26	25 336	29 246	31 795	35 563	38 885	42 856	45 642	54 052
27	26 336	30 319	32 912	36 741	40 113	44 140	46 963	55 476
28	27 336	31 391	34 027	37 9 16	41 337	45 419	48 278	56 893
29	28 336	32 461	35 139	39087	42 557	46 693	49 588	58 302
30	29 336	33 430	36 250	40 256	43 773	47 962	50 892	59 703
32	31 336	34 665	38 466	42 585	46 194	50 487	51 486	62 487
34	33 336	37 795	40 676	44 903	48 602	52 995	56 061	65 247
36	35 336	39 922	42 879	47 212	50 999	55 489	58 619	67 985
38	37 335	42 045	45 076	49 513	53 384	57 969	61 162	70 703
40	39 335	44 165	47 269	51 805	55 759	60 436	63 691	73 402
42	41 335	46 282	49 456	54 090	58 124	62 892	66 206	76 084
44	43 335	48 396	51 639	56 369	60 481	65 337	68 710	78 750

सतत सारणी (प-4)
(3)

46	45 335	50·507	53·818	58·641	62·830	67 771	71·201	81 400
48	47 335	52 616	55 993	60 907	65 171	70 197	73·683	84·037
50	49 335	54 723	58 164	63 167	67·505	72 613	76 154	[redacted] 661
52	51 335	56 827	60 332	65 422	69 832	75 021	78 616	89·272
54	53 335	58·930	62 496	67 673	72 153	77·422	81 069	91 872
56	55·335	61·031	64 658	69 919	74 468	79·815	83·513	94·461
58	57 335	63 129	66 816	72 160	76 778	82 201	85 950	97·03
60	59 335	65 227	68 972	74 397	79 082	84 580	88 379	99·607
62	61 335	67 322	71·125	76 630	81 381	86 953	90·802	102 166
64	63 335	69 416	73 276	78 860	83 675	89 320	93 217	104 716
66	65 335	71 508	75 424	81 085	85 965	91 681	95 626	107 258
68	67 335	73 600	77 571	83 308	[redacted] 250	94 037	98 028	109 791
70	69 334	75 689	79 715	85 527	90·531	96 388	100 425	112·317

For odd values of n between 30 and 70 the mean of the tabular values for $n - 1$ and $n + 1$ may be taken. For larger values of n, the expression $\sqrt{2\chi^2} - \sqrt{2n - 1}$ may be used as a normal deviate with unit variance, remembering that the probability for χ^2 corresponds with that of a single tail of the normal curve.

Table प-4 is taken from Table IV of Fisher and Yates **Statistical Tables for Biological, Agricultural and Medical Research**, Published by Longman Group Ltd, London (previously published by Oliver & Boyd, Edinburgh), and by the permission of the authors and publishers

सारणी (घ-5)

प्रसरण अनुपात e^{2Z} के 0 1 प्रतिशत बिन्दु

स्व० को० (d f) ν_1/ν_2	1	2	3	4	5	6	8	12	24	∞
1	405284	500000	540379	562500	576405	585937	598144	610667	623497	636619
2	998 5	999 0	999 2	999 2	999 3	999 3	999 4	999 4	999 5	999 5
3	167 0	148 5	141 1	137 1	134 6	132 8	130 6	128 3	125 9	123 5
4	74 14	61 25	56 18	53 44	51 71	50 53	49 00	47 41	45 77	44 05
5	47 18	37 12	33 20	31 09	29 75	28 84	27 64	26 42	25 14	23 78
6	35 51	27 00	23 70	21 92	20 81	20 03	19 03	17 99	16 89	15 75
7	29 25	21 69	18 77	17 19	16 21	15 52	14 63	13 71	12 73	11 69
8	25 42	18 49	15 83	14 39	13 49	12 86	12 04	11 19	10 30	9 34
9	22 86	16 39	13 90	12 56	11 71	11 13	10 37	9 57	8 72	7 81
10	21 04	14 91	12 55	11 28	10 48	9 92	9 20	8 45	7 64	6 76
11	19 69	13 81	11 56	10 35	9 58	9 05	8 35	7 63	6 85	6 00
12	18 64	12 97	10 80	9 63	8 89	8 38	7 71	7 00	6 25	5 42
13	17 81	12 31	10 21	9 07	8 35	7 86	7 21	6 52	5 78	4 97
14	17 14	11 78	9 73	8 62	7 92	7 43	6 80	6 13	5 41	4 60
15	16 59	11 34	9 34	8 25	7 57	7 09	6 47	5 81	5 10	4 31
16	16 12	10 97	9 00	7 94	7 27	6 81	6 19	5 55	4 85	4 06
17	15 72	10 66	8 73	7 68	7 02	6 56	5 96	5 32	4 63	3 85

सतत सारणी (घ-5)

(2)

18	15·38	10·39	8·49	7·46	6·81	6·35	5·76	5·13	4·45	3·67
19	15·08	10·16	8·28	7·26	6·62	6·18	5·59	4·97	4·29	3·52
20	14·82	9·95	8·10	7·10	6·46	6·02	5·44	4·82	4·15	3·38
21	14·59	9·77	7·94	6·95	6·32	5·88	5·31	4·70	4·03	3·26
22	14·38	9·61	7·80	6·81	6·19	5·76	5·19	4·58	3·92	3·15
23	14·19	9·47	7·67	6·69	6·08	5·65	5·09	4·48	3·82	3·05
24	14·03	9·34	7·55	6·59	5·98	5·55	4·99	4·39	3·74	2·97
25	13·88	9·22	7·45	6·49	5·88	5·46	4·91	4·31	3·66	2·89
26	13·74	9·12	7·36	6·41	5·80	5·38	4·83	4·24	3·59	2·82
27	13·61	9·02	7·27	6·33	5·73	5·31	4·76	4·17	3·52	2·75
28	13·50	8·93	7·19	6·25	5·66	5·24	4·69	4·11	3·46	2·70
29	13·39	8·85	7·12	6·19	5·59	5·18	4·64	4·05	3·41	2·64
30	13·29	8·77	7·05	6·12	5·53	5·12	4·58	4·00	3·36	2·59
40	12·61	8·25	6·60	5·70	5·13	4·73	4·21	3·64	3·01	2·23
60	11·97	7·76	6·17	5·31	4·76	4·37	3·87	3·31	2·69	1·90
120	11·38	7·32	5·79	4·95	4·42	4·04	3·55	3·02	2·40	1·54
∞	10·83	6·91	5·42	4·62	4·10	3·74	3·27	2·74	2·13	1·00

Lower 0·1 percent points are found by interchange of ν_1 and ν_2 : ν_1 must always correspond with the greater mean square.

सारणी (घ-5 1)

प्रसरण अनुपात e^{2z} के 1 प्रतिशत बिन्दु

स्व० को० (d f) ν_2/ν_1	1	2	3	4	5	6	8	12	24	∞
1	4052	4999	5403	5625	5764	5859	5982	6106	6234	6366
2	98.50	99.00	99.17	99.25	99.30	99.33	99.37	99.42	99.46	99.50
3	34.12	30.82	29.46	28.71	28.24	27.91	27.49	27.05	26.60	26.12
4	21.20	18.00	16.69	13.98	15.22	15.21	14.80	14.37	13.93	13.46
5	16.26	13.27	12.06	11.39	10.97	10.67	10.29	9.89	9.47	9.02
6	13.74	10.92	9.78	9.15	8.75	8.47	8.10	7.72	7.31	6.88
7	12.25	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.84	6.47	6.07	5.65
8	11.26	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.03	5.67	5.28	4.86
9	10.56	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.47	5.11	4.73	4.31
10	10.04	7.56	6.55	5.99	6.64	5.39	5.06	4.71	4.33	3.91
11	9.65	7.20	6.22	5.67	5.32	5.07	4.74	4.40	4.02	3.60
12	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.50	4.16	3.78	3.36
13	9.07	6.70	5.74	5.20	4.86	4.62	4.30	3.96	3.59	3.16
14	8.86	6.51	5.56	5.03	4.69	4.46	4.14	3.80	3.43	3.00
15	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.00	3.67	3.29	2.87
16	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	3.89	3.55	3.18	2.75
17	8.40	6.11	5.18	4.67	4.34	4.10	3.79	3.45	3.08	2.65

सतत सारणी (घ–5.1)
(2)

18	8·28	6·01	5·09	4·58	4·25	4·01	3·71	3·37	3·00	2·57
19	8·18	5·93	5·01	4·50	4·17	3·94	3·63	3·30	2·92	2·49
20	8·10	5·85	4·94	4·43	4·10	3·87	3·56	3·23	2·86	2·42
21	8·02	5·78	4·87	4·37	4·04	3·81	3·51	3·17	2·80	2·36
22	7·94	5·72	4·82	4·31	3·99	3·76	3·45	3·12	2·75	2·31
23	7·88	5·66	4·76	4·26	3·94	3·71	3·41	3·07	2·70	2·26
24	7·82	5·61	4·72	4·22	3·90	3·67	3·36	3·03	2·66	2·21
25	7·77	5·57	4·68	4·18	3·36	3·63	3·32	2·99	2·62	2·17
26	7·72	5·53	4·64	4·14	3·82	3·59	3·29	2·96	2·58	2·13
27	7·68	5·49	4·60	4·11	3·78	3·56	3·26	2·93	2·55	2·10
28	7·64	5·45	4·57	4·07	3·75	3·53	3·23	2·90	2·52	2·06
29	7·60	5·42	4·54	4·04	3·73	3·50	3·20	2·87	2·49	2·03
30	7·56	5·39	4·51	4·02	3·70	3·47	3·17	2·84	2·47	2·01
40	7·31	5·18	4·31	3·83	3·51	3·29	2·99	2·66	2·29	1·80
60	7·08	4·98	4·13	3·65	3·34	3·12	2·82	2·50	2·12	1·60
120	6·85	4·79	3·95	3·48	3·17	2·96	2·66	2·34	1·95	1·38
∞	6·64	4·60	3·78	3·32	3·02	2·80	2·51	2·18	1·79	1·00

Lower 1 per cent points are found by interchange of ν_1 and ν_2 i. e. ν_1 must always *correspond with the* greater mean square.

सारणी (घ-5.2)
प्रसरण अनुपात e^{2z} के 5 प्रतिशत बिन्दु

स्व० को० (d f) ν_2/ν_1	1	2	3	4	5	6	8	12	24	∞
1	161.4	199.5	215.7	224.6	230.2	234.0	238.9	243.9	249.00	254.3
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.37	19.41	19.45	19.50
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.84	8.74	8.64	8.53
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.04	5.91	5.77	5.63
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.82	4.68	4.53	4.36
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.15	4.00	3.84	3.67
7	5.59	4.74	4.36	4.12	3.97	3.87	3.73	3.57	3.41	3.23
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.44	3.28	3.12	2.93
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.23	3.07	2.90	2.71
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.07	2.91	2.74	2.54
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	2.95	2.79	2.61	2.40
12	4.75	3.88	3.49	3.26	3.11	3.00	2.85	2.69	2.50	2.30
13	4.67	3.80	3.41	3.18	3.02	2.92	2.77	2.60	2.42	2.21
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.70	2.53	2.35	2.13
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.64	2.48	2.29	2.07
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.59	2.42	2.24	2.01
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.55	2.38	2.19	1.96

सतत सारणी (प–5 2)
(2)

18	4·41	3·55	3·16	2·93	2·77	2·66	2·51	2·34	2·15	1·92
19	4·38	3·52	3·13	2·90	2·74	2·63	2·48	2·31	2·11	1·88
20	4·35	3·49	3·10	2·87	2·71	2·60	2·45	2·28	2·08	1·84
21	4·32	3·47	3·07	2·84	2·68	2·57	2·42	2·25	2·05	1·81
22	4·30	3·44	3·05	2·82	2·66	2·55	2·40	2·23	2·03	1·78
23	4·28	3·42	3·03	2·80	2·64	2·53	2·38	2·20	2·00	1·76
24	4·26	3·40	3·01	2·78	2·62	2·51	2·36	2·18	1·98	1·73
25	4·24	3·38	2·99	2·76	2·60	2·49	2·34	2·16	1·96	1·71
[redacted]	4·22	3·37	2·98	2·74	2·59	2·47	2·32	2·15	1·95	1·69
27	4·21	3·35	2·96	2·73	2·57	2·46	[illegible]	2·13	1·93	1·67
[redacted]	4·20	3·34	2·95	2·71	2·56	2·44	2·29	2·12	1·91	1·65
29	4·18	3·33	2·93	2·70	2·54	2·43	2·28	2·10	1·90	1·64
30	4·17	3·32	2·92	2·69	2153	2·42	2·27	2·09	1·89	1·62
40	4·03	3·23	2·84	2·61	2·45	2·34	2·18	2·00	1·79	1·51
60	4·00	3·15	2·76	2.52	2·37	2·25	2·10	1·92	1·70	1·39
120	3·92	3·07	2·68	2·45	2·29	2·17	2·02	1·83	1·61	1·25
∞	3·84	2·99	2·60	2·37	2·21	2·10	1·94	1·75	1·52	1·00

Lower 5 per cent. points are found by interchange of ν_2 and ν_1 i e ν_1 must always correspond with the greater mean square

सारणी (ब–5 3)

प्रसरण अनुपात e^{2z} के 10 प्रतिशत बिन्दु

स्व० को० (d.f) ν_2/ν_1	1	2	3	4	5	6	8	12	24	∞
1	39 86	49 50	53 59	55 83	57 24	58 20	59 44	60 70	62 00	63 33
2	8 53	9 00	9 16	9 24	9 29	9 33	9 37	9 41	9 45	9 49
3	5 54	5 46	5 39	5 34	5 31	5 28	5 25	5 22	5 18	5 13
4	4 54	4 32	4 19	4 11	4 05	4 01	3 95	3 90	3 83	3 76
5	4 06	3 78	3 62	3 52	3 45	3 40	3 34	3 27	3 19	3 10
6	3 78	3 46	3 29	3 18	3 11	3 05	2 98	2 90	2 82	2 72
7	3 59	3 26	3 07	2 96	2 88	2 83	2 75	2 67	2 58	2 47
8	3 46	3 11	2 92	2 81	2 73	2 67	2 59	2 50	2 40	2 29
9	3 36	3 01	2 81	2 69	2 61	2 55	2 47	2 38	2 28	2 16
10	3 28	2 92	2 73	2 61	2 52	2 46	2 38	2 28	2 18	2 06
11	3 23	2 86	2 66	2 54	2 45	2 39	2 30	2 21	2 10	1 97
12	3 18	2 81	2 61	2 48	2 39	2 33	2 24	2 15	2 04	1 90
13	3 14	2 76	2 56	2 43	2 35	2 28	2 20	2 10	1 98	1 85
14	3 10	2 73	2 52	2 39	2 31	2 24	2 15	2 05	1 94	1 80
15	3 07	2 70	2 49	2 36	2 27	2 21	2 12	2 02	1 90	1 76
16	3 05	2 67	2 46	2 33	2 24	2 18	2 09	1 99	1 87	1 72
17	3 03	2 64	2 44	2 31	2 22	2 15	2 06	1 96	1 84	1 69
18	3 01	2 62	2 42	2 29	2 20	2 13	2 04	1 93	1 81	1 66

वितत सारणी (प-4)
(2)

19	2 99	2 61	2 40	2 27	2 19	2 11	2 02	1 91	1 79	1 63
90	2 97	2 59	2 38	2 25	2 16	2 09	2 00	1 89	1 77	1 61
21	2 96	2 57	2 36	2 23	2 14	2 08	1 98	1 88	1 75	1 59
22	2 95	2 56	2 35	2 22	2 13	2 06	1 97	1 86	1 73	1 57
23	2 94	2 55	2 34	2 21	2 11	2 05	1 95	1 84	1 72	1 55
24	2 93	2 54	2 33	2 19	2 10	2 04	1 94	1 83	1 70	1 53
25	2 92	2 53	2 32	2 18	2 09	2 02	1 93	1 82	1 69	1 52
26	2 91	2 52	2 31	2 17	2 08	2 01	1 92	1 81	1 68	1 50
27	2 90	2 51	2 30	2 17	2 07	2 00	1 91	1 80	1 67	1 49
28	2 89	2 50	2 29	2 16	2 06	2 00	1 90	1 79	1 66	1 48
29	2 89	2 50	2 28	2 15	2 06	1 99	1 89	1 78	1 65	1 47
30	2 88	2 49	2 28	2 14	2 05	1 98	1 88	1 77	1 64	1 46
40	2 84	2 44	2 23	2 09	2 00	1 93	1 83	1 71	1 57	1 38
60	2 79	2 39	2 18	2 04	1 95	1 87	1 77	1 66	1 51	1 29
120	2 75	2 35	2 13	1 99	1 90	1 82	1 72	0	1 45	1 19
∞	2 71	2 30	2 08	1 94	1 85	1 77	1 67	1 55	1 38	1 00

Lower 10 per cent points are found by interchange of ν_1 and ν_2 i e ν_1 must always correspond with the greater mean square

Tables प-5 are taken from Tables V of Fisher and Yates Statistical Tables for Biological, Agricultural and Medical Research, Published by Longman Group Ltd London (previously published by Oliver & boyd Edinburgh), and by the permission of the authors and publishers

सारणी (घ-6)

एक प्रतिदर्श के लिए कोलमोगोरोव–स्मिरनोल परीक्षा में D के क्रांतिक मानों की सारणी*

Sample size (n)	Level of significance for D = maximum $\lvert F_0(Y)-F_n(Y) \rvert$ ·20	·15	·10	·05	01
1	·900	·925	·950	·975	995
2	·684	726	776	·842	929
3	·565	·597	642	708	828
4	·494	·525	·564	·624	·733
5	·446	·474	·510	·565	669
6	·410	·436	·470	·521	·618
7	·381	·405	·438	·486	·577
8	·358	·381	·411	·457	·543
9	·339	·360	·388	·432	·514
10	·322	·342	·368	410	·490
11	·307	·326	352	·391	·468
12	·295	·313	·338	·375	·450
13	·284	·302	·325	·361	·433
14	·274	·292	·314	·349	·418
15	·266	·283	·304	·338	·404
16	·258	·274	·295	·328	·392
17	·250	·266	·286	·318	·381
18	·244	·259	·278	·309	·371
19	·237	·252	·272	·301	·363
20	·231	·246	·264	·294	·356
25	·21	·22	·24	·27	·32
30	·19	·20	·22	·24	·29
35	·18	·19	·21	·23	·27
Over 35	$\frac{1\cdot07}{\sqrt{n}}$	$\frac{1\cdot14}{\sqrt{n}}$	$\frac{1\cdot22}{\sqrt{n}}$	$\frac{1\cdot36}{\sqrt{n}}$	$\frac{1\cdot63}{\sqrt{n}}$

*Adapted from Massey, F. J., Jr 1951. The Kolmogorov-Smirnov test for goodness of fit *J Amer Statist. Ass.*, *46*, *70*, *with the kind permission of the author and publisher.*

सारणी (घ–7)

दो प्रतिदर्शों के लिए कोलमोगोरोव-स्मिरनोव परीक्षा में M_D के क्रांतिक मान

(लघु प्रतिदर्श)

	One-tailed test*		Two tailed test**	
n	$\alpha = \cdot 05$	$\alpha = \cdot 01$	$\alpha = \cdot 05$	$\alpha = \cdot 01$
3	3	—	—	—
4	4	—	4	—
[illegible]	4	5	5	5
6	5	6	5	6
7	5	6	6	6
8	5	6	6	7
9	6	7	6	7
10	6	7	7	8
11	6	8	7	8
12	6	8	7	8
13	7	8	7	9
14	7	8	8	9
15	7	9	8	9
16	7	9	8	10
17	8	9	8	10
18	8	10	9	10
19	8	10	9	10
20	8	10	9	11
21	9	10	9	11
22	9	11	9	11
23	9	11	10	11
24	9	11	10	12
25	9	11	10	12

26	9	11	10	12
27	9	12	10	12
28	10	12	11	13
29	10	12	11	13
30	10	12	11	13
35	11	13	12	
40	11	14	13	

* Abridged from Goodman L A 1954 Kolmogorov Smirnov tests for psychological research Psychol Bull, 51, 167, with the kind permission of the author and the American Psychological association

** Derived from Table 1 of Massey, F J Jr 1951 The distribution of the maximum deviation between two sample cumulative step functions Ann Math Statist, 22, 126–127 with the kind permission of the author and the publisher

सारणी (घ–8)

दो प्रतिदर्शों के लिए कोलमोगोरोव स्मिरनोव परीक्षा में D के क्रान्तिक मान

(Table of Critical Values of D in the Kolmogorov Smirnov Two Sample Test)

बृहद् प्रतिदर्श : दो पुच्छ परीक्षा)

(Large samples two tailed test)*

Level of significance	Value of D so large as to call for rejection of H_0 at the indicated level of significance, where $D = \text{maximum} \left\| S_{n_1}(X) - S_{n_2}(X) \right\|$
·10	$1·22 \sqrt{\frac{n_1+n_2}{n_1 n_2}}$
·05	$1·36 \sqrt{\frac{n_1+n_2}{n_1 n_2}}$
·025	$1·48 \sqrt{\frac{n_1+n_2}{n_1 n_2}}$
·01	$1·63 \sqrt{\frac{n_1+n_2}{n_1 n_2}}$
·005	$1·73 \sqrt{\frac{n_1+n_2}{n_1 n_2}}$
·001	$1·95 \sqrt{\frac{n_1+n_2}{n_1 n_2}}$

*Adapted from Smirnov, N 1948 Tables for estimating the goodness of fit of empirical distributions Ann Math Statist, 19,280–281 with the kind permission of the publisher

सारणी (घ–9), परम्परा परीक्षा में r के क्रांतिक मान

Given in the bodies of Table F_I and Table F_{II} are various critical values of r for various values of n_1 and n_2. For the one sample runs test, any value of r which is equal to or smaller than that shown in Table F_I or equal to or larger than that shown in Table F_{II} is significant at the .05 level. For the Wald Wolfwitz two-sample runs test, any value of r which is equal or smaller than that shown in Table F is significant at the .05 level.

TABLE F_I

n_1/n_2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
2											2	2	2	[illegible]	2	2	2	2	2
3					2	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3
4				2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4
5			2	2	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4	5	5	5
6		2	2	3	3	3	3	4	4	4	4	5	5	5	5	5	5	6	6
7		2	2	3	3	3	4	4	5	5	5	5	5	6	6	6	6	6	6
8		2	3	3	3	4	4	5	5	5	6	6	6	6	6	7	7	7	7
9		2	3	3	4	4	5	5	5	6	6	6	7	7	7	7	8	8	8
10		2	3	3	4	5	5	5	6	6	7	7	7	7	8	8	8	8	9
11		2	3	4	4	5	5	6	6	7	7	7	8	8	8	9	9	9	9
12	2	2	3	4	4	5	6	6	7	7	7	8	8	8	9	[illegible]	9	10	10
13	2	2	3	4	5	5	6	6	7	7	8	8	9	9	9	10	10	10	10
14	2	2	3	4	5	5	6	7	7	8	8	9	9	9	10	10	10	11	11
15	2	3	3	4	5	6	6	7	7	8	8	9	9	10	10	11	11	11	12
16	2	3	4	4	5	6	6	7	8	8	9	9	10	10	11	11	11	12	12
17	2	3	4	4	5	6	7	7	8	9	9	10	10	11	11	11	12	12	13
18	2	3	4	5	5	6	7	8	8	[illegible]	9	10	10	11	11	12	12	13	13
19	2	3	4	5	6	6	7	8	8	9	10	10	11	11	12	12	13	13	13
20	2	3	4	5	6	6	7	8	9	9	10	10	11	12	12	13	13	13	14

* Adapted from Swed, Frieda S., and Eisenhart, C. 1943. Tables for testing randomness of grouping in a sequence of alternative. Ann. Math Statist 14, 83–86 with the kind permission of the authors and the publisher.

सारणी (घ–9·1), परम्परा परीक्षा में r के उपरि क्रांतिक मान

TABLE F*

n_1/n_2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
2																			
3																			
4				9	9														
5			9	10	10	11	11												
6			9	10	11	12	12	13	13	13	13								
7				11	12	13	13	14	14	14	14	15	15	15					
8				11	12	13	14	14	15	15	16	16	16	16	17	17	17	17	17
9					13	14	14	15	16	16	16	17	17	18	18	18	18	18	18
10					13	14	15	16	16	17	17	18	18	18	19	19	19	20	20
11					13	14	15	16	17	17	18	19	19	19	20	20	20	21	21
12					13	14	16	16	17	18	19	19	20	20	21	21	21	22	22
13						15	16	17	18	19	19	20	20	21	21	22	22	23	23
14						15	16	17	18	19	20	20	21	22	22	23	23	23	24
15						15	16	18	18	19	20	21	22	22	23	23	24	24	25
16							17	18	19	20	21	21	22	23	23	24	25	25	25
17							17	18	19	20	21	22	23	23	24	25	25	26	26
18							17	18	19	20	21	22	23	24	25	25	26	26	27
19							17	18	20	21	22	23	23	24	25	26	26	27	27
20							17	18	20	21	22	23	24	25	25	26	27	27	28

* Adapted from Swed, Frieda S, and Eisenhart, C 1943 Tables for testing randomness of grouping in a sequence of alternatives Ann Math. Statist., 14, 83–86 with the kind permission of the authors and the publisher.

सारणी (घ-10)

द्विपद बटन में घटना (x<r) की प्रायिकता अर्थात् p (x<r)

(TABLE OF PROBABILITIES ASSOCIATED WITH VALUES AS SMALL AS OBSERVED VALUES OF x IN THE BINOMIAL TEST*)

Given in the body of this table are one tailed probabilities under H_0 for the binomial test when $P = Q = \frac{1}{2}$.

To save space, decimal points are ommitted in the p's

n/r	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
5	031	188	500	812	969											
6	016	109	344	656	891	984										
7	008	062	227	500	773	938	992									
8	004	035	145	363	637	855	965	996								
9	002	020	090	254	500	746	910	980	998							
10	001	011	055	172	377	623	828	945	989	999						
11		006	033	113	274	500	726	887	967	994						
12		003	019	073	194	387	613	806	927	981	997					
13		002	011	046	133	291	500	709	867	954	989	998				
14		001	006	029	090	212	395	605	788	910	971	994	999			
15			004	018	059	151	304	500	696	819	941	982	996			
16			002	011	038	105	227	402	598	773	895	962	989	998		
17			001	006	025	072	166	315	500	685	834	928	975	994	999	
18			001	004	015	048	119	240	407	593	760	881	952	985	996	999

विस्तृत सारणी (घ–10)
(2)

19	002	010	032	084	180	324	500	676	820	916	968	990	998
20	001	006	021	058	132	252	412	588	784	868	942	979	994
21	001	004	013	039	095	192	332	500	668	808	905	961	987
22		002	008	026	067	143	262	416	584	738	857	933	974
23		001	005	017	047	105	202	339	500	661	798	895	953
24		001	003	011	032	076	154	271	419	581	729	846	924
25			002	007	022	054	115	212	345	500	655	788	885

* Adapted from Tabl3 IV, B, of Walker, Helan, and Lev J, 1953. Statistical inference Newyork : Holt. p 458, with the kind permission of the authors and the publisher.

सारणी (घ-11)

विल्काक्सन चिह्नित-कोटि परीक्षा में T के क्रांतिक मान

(TABLE OF CRITICAL VALUES OF T IN THE WILCOXON MATCHED-PAIRS SIGNED-RANKS TEST*)

N	Level of significance for one-tailed test		
	025	01	005
	Level of significance for two-tailed test		
	05	·02	·01
6	0	—	—
7	2	0	—
8	4	2	0
9	6	3	2
10	8	5	3
11	11	7	5
12	14	10	7
13	17	13	10
14	21	16	13
15	25	20	16
16	30	24	20
17	35	28	23
18	40	33	28
19	46	38	32
20	52	43	38
21	59	49	43
22	66	56	49
23	73	62	55
24	81	69	61
25	89	77	68

*Adapted from Table I of Wilcoxon, F 1949 Some rapid approximate Statistical procedures New York Amer can Cyanamid Company, p. 13 with the kind permission of the author aed publisher.

सारणी (घ–12)

मान ह्विटनी परीक्षा में कम से कम U के प्रेक्षित मान से सम्बद्ध प्राविकताएँ

(TABLE OF PROBABILITES ASSOCIATED WITH VALUES AS SMALL AS OBSERVED VALUES OF U IN THE MANN WHITNEY TEST*)

$n_2=3$

U/n_1	1	2	3
0	250	100	050
1	500	·200	·100
2	750	400	200
3		600	350
4			·500
5			650

$n_2=4$

U/n_1	1	2	3	4
0	·200	·067	028	014
1	·400	·133	057	029
2	600	·267	·114	057
3		400	·200	·100
4		·600	·314	·171
5			·429	·243
6			·571	·343
7				·443
8				·557

Contd on 2

* Reproduced from Mann, H B and Whitney, D R 1947. On a test of whether one of two random variables is stochastically larger than the other. Ann. Math Statist. 18, 52–54, With the kind permission of the authors and the publisher.

विस्तत सारणी (घ–12)
(2)

$n_2=5$

U/n_1	1	2	3	4	5
0	167	047	018	008	·004
1	333	·095	036	016	008
2	·500	·190	071	·032	016
3	·667	286	·125	056	028
4		429	196	095	048
5		571	286	143	075
6			393	206	111
7			·500	278	155
8			607	·365	210
9				·452	274
10				·548	·345
11					·421
12					500
13					579

$n_2=6$

U/n_1	1	2	3	4	5	6
0	·143	·036	012	005	002	001
1	·286	·071	024	010	004	002
2	428	143	048	019	009	004
3	571	·214	083	033	015	008
4		321	131	057	026	013
5		·429	190	086	041	·021
6		·577	·274	129	063	032
7			·357	·176	·089	·047
8			452	238	·123	066
9			548	·305	·165	090
10				·381	·214	·120
11				457	·268	·155
12				·545	·331	·197
13					·396	·242
14					·465	·294
15					·535	·350
16						·409
17						·469
18						·531

वितत सारणी (प–12)

TABLE OF PROBABILITES ASSOCIATED WITH VALUES AS SMALL AS OBSERVED VALUES OF U IN THE MANN-WHITNEY TEST*

$n_2 = 7$

U/n_1	1	2	3	4	5	6	7
0	·125	028	008	·003	·001	001	·000
1	·250	·056	017	·006	·003	·001	·001
2	·375	111	·033	012	·005	·002	·001
3	·500	167	058	021	009	·004	·002
4	·625	250	092	036	015	007	·003
5		·333	133	055	024	011	·006
6		·444	·192	082	037	·017	·009
7		·556	258	115	053	·026	·013
8			·333	·158	·074	·037	·019
9			·417	·206	101	·051	·027
10			500	·264	·134	·069	·036
11			·583	·324	·172	·090	·049
12				·394	·216	·117	·064
13				·464	·265	·147	·082
14				·538	·319	·183	·104
15					·371	·223	·130
16					·438	·267	·159
17					·500	·314	·191
18					·526	·365	·228
19						·418	·267
20						·473	·310
21						·527	·355
22							·402
23							·451
24							·500
25							·549

* Reproduction from Mann, H. B. and Whitney, D R 1947, On test of whether one of two random variables is stochastically larger than the other Ann. Math. Statist. 18, 52–54, with the kind permission of the authors and the publisher.

विवृत सारणी (घ–11)

TABLE OF PROBABILITIES ASSOCIATED WITH VALUES AS SMALL AS OBSERVED VALUES OF U IN THE MANN-WHITNEY TEST*

$n_2 = 8$

U/n_1	1	2	3	4	5	6	7	8	t	Normal
0	·111	·022	·006	002	001	·000	000	000	3 308	001
1	·222	·044	012	004	002	001	000	·000	3 203	001
2	·333	089	024	008	003	001	001	000	3 098	·001
3	·444	·133	·042	014	005	002	001	001	2 993	001
4	·556	·200	067	024	009	004	002	001	2 888	002
5		·267	097	036	015	006	003	001	2 783	003
6		·356	139	055	023	010	005	002	2 678	004
7		444	188	077	033	015	007	003	2 573	005
8		·556	248	107	·047	021	010	005	2·462	007
9			315	141	064	030	014	007	2 363	009
10			·387	184	085	041	020	·010	2 258	012
11			·461	230	111	054	·027	014	2 153	016
12			539	·285	142	071	036	019	2 048	020
13				341	177	091	·047	025	1·943	026
14				404	·217	114	060	032	1 838	033
15				467	262	141	076	041	1 733	041
16				533	311	172	095	052	1 628	052
17					362	·207	116	065	1·523	064
18					416	·245	·140	080	1 418	·078
19					·472	286	·168	097	1 313	094
20					.528	331	·198	117	1 208	·113
21						·377	232	139	1 102	135
22						426	268	·164	998	159
23						·475	·306	191	·893	·185
24						·525	·347	221	·788	215
25							·389	·253	·683	·247
26							433	287	578	·282
27							·478	·323	·473	·318
28							·522	·360	·368	·356
29								·399	263	·396
30								·439	·158	·437
31								·480	·052	·481
32								·520		

* Reproduced from Mann *H B and Whitney, D R. 1947 on a* test of whether one of two-random variables is stochastically larger than the other Ann Math Statist, 18, 52–54 With the kind permission of the authors and the publisher.

सारणी (घ–12 1)

एक पुच्छ परीक्षा के लिए a = 025 या दो पुच्छ परीक्षा के लिए a = 05 सार्थकता स्तर पर U के क्रांतिक मान

Tables of Critical Values of U in the Mann–Whitney Test

(Critical values of U for a one tailed Test at $\alpha = 025$ or for a two tailed Test at $\alpha = 05$)

n_1/n_2	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1												
2	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	2	2
3	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8
4	4	5	6	7	8	9	10	11	11	12	13	13
5	7	8	9	11	12	13	14	15	17	18	19	20
6	10	11	13	14	16	17	19	21	22	24	25	27
7	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34
8	15	17	19	22	24	26	29	31	34	36	38	41
9	17	20	23	26	28	31	34	37	39	42	45	48
10	20	23	26	29	33	36	39	42	45	48	52	55
11	23	26	30	33	37	40	44	47	51	55	58	62
12	26	29	33	37	41	45	49	53	57	61	65	69
13	28	33	37	41	45	50	54	59	63	67	72	76
14	31	36	40	45	50	55	59	64	67	74	78	83
15	34	39	44	49	54	59	64	70	75	80	85	90
16	37	42	47	53	59	64	70	75	81	86	92	98
17	39	45	51	57	63	67	75	81	87	93	99	105
18	42	48	55	61	67	74	80	86	93	99	106	112
19	45	52	58	65	72	78	85	92	99	106	113	119
20	48	55	62	69	76	83	90	98	105	112	119	127

* Adapted and abridged from Tables 1, 3 5 and 7 of Auble D 1953 Extended tables for the Mann–Whitney statistic Bulletin of the Institute of Educational research at Indiana University 1 No 2 with the kind permission of the authors and the publisher

सारणी (घ–13),

प्रतिशत का प्रॉबिट में रूपान्तरण

%	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	—	2 67	2 95	3 12	3 25	3 36	3 45	3 52	3 59	3 66
10	3 72	3 77	3 82	3 87	3 92	3 96	4 01	4 05	4 08	4 12
20	4 16	4 19	4 23	4 21	4 29	4 33	4 36	4 39	4 42	4 45
30	4 48	4 50	4 53	4 56	4 59	4 61	4 64	4 67	4 69	4 72
40	4 75	4 77	4 80	4 82	4 85	4 87	4 90	4 92	4 95	4 97
50	5 90	5 03	5 05	5 08	5 10	5 13	5 15	5 18	5 20	5 23
60	5 25	5 38	5 31	5 33	5 36	5 39	5 41	5 44	5 47	5 50
70	5 52	5 55	5 58	5 61	5 64	5 67	5 71	5 74	6 77	5 81
80	5 84	5 88	5 92	5 95	5 99	6 04	6 08	6 13	6 18	6 23
90	6 28	6 34	6 41	6 48	6 55	6 64	6 75	6 88	7 05	7 33
	0 0	0 1	0 2	0 3	0 4	0 5	0 6	0 7	0 8	0 9
99	7 33	7 37	7 41	7 46	7 51	7 58	7 65	7 75	7 88	8 09

(सारणी प-14).

भार गुणाक $w = \frac{Z^2}{PQ}$

Y	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
1	0.001	0.001	0.001	0.002	0.002	0.003	0.005	0.006	0.008	0.011
2	0.015	0.019	0.025	0.031	0.040	0.050	0.062	0.076	0.092	0.110
3	0.131	0.154	0.180	0.208	0.238	0.269	0.302	0.336	0.370	0.405
4	0.439	0.471	0.503	0.532	0.558	0.581	0.601	0.616	0.627	0.634
5	0.637	0.634	0.627	0.616	0.601	0.581	0.558	0.532	0.503	0.471
6	0.439	0.405	0.370	0.336	0.302	0.269	0.238	0.208	0.180	0.154
7	0.131	0.110	0.082	0.076	0.062	0.050	0.040	0.031	0.250	0.009
8	0.015	0.011	0.008	0.006	0.005	0.003	0.002	0.002	0.001	0.001

सारणी (घ–15),
बहु-परिसर परीक्षा के लिए 5% सार्थकता स्तर पर सार्थक परिसर

n_2/P	[illegible]	3	4	5	6	8	10	14	20	50	100
10	3 15	3 29	3 37	3 43	3 46	3 47	3 47	3 47	3 48	3 48	3 48
12	3 08	3 23	3 33	3 36	3 40	3 44	3 46	3 46	3 48	3 48	5 48
14	3 03	3 18	3 27	3 33	3 37	3 41	3 44	3 46	3 47	3 47	3 47
16	3 00	3 15	3 23	3 30	3 32	3 39	3 43	3 45	3 47	3 47	3 47
18	2 97	3 12	3 21	3 27	3 32	3 37	3 41	3 45	3 47	3 47	3 47
20	2 95	3 10	3 18	3 25	3 30	3 36	3 40	3 44	3 47	3 47	3 47
24	2 92	3 07	3 15	3 22	3 28	3 34	3 38	3 44	3 37	3 47	3 47
30	2 89	3 04	3 12	3 20	3 25	3 32	3 37	3 43	3 47	3 47	3 47
60	2 83	2 98	3 08	3 14	3 20	3 28	3 33	3 40	3 47	3 48	3 48
100	2 80	2 95	3 05	3 12	3 18	3 26	3 32	3 40	3 47	3·53	3 53
∞	2 77	2 92	3 02	3 09	3 15	3 23	3 29	3 38	3 47	3 61	3 67

Significant ranges for a 1% level new a multiple range test

(2)

10	4 48	4 73	4·88	4 96	5 06	5 20	5 28	5 42	5·55	5 55	5 55
12	4 32	4 55	4 68	4 76	4 84	4 96	5 07	5 17	5 26	5 26	5 26
14	4 21	4 42	4 55	4 63	4 70	4 83	4 91	5 00	5 07	5 07	5 07
16	4 13	4 34	4 45	4 54	4 60	4 72	4 79	4 88	4 94	4 94	4 94
18	4 07	4 27	4 38	4 46	4 53	4 64	4 71	4 78	4 85	4 85	4 85
20	4 02	4 22	4·33	4 40	4·47	4 58	4 65	4 73	4 79	4 79	4 79
24	3 96	4 14	4 24	4 33	4 39	4 49	4 57	4 64	4 72	4 74	4 74
30	3 89	4 06	4 16	4 25	4 32	4 41	4 48	4 58	4 65	4 72	4 72
60	3 76	3·92	4 03	4 12	4 17	4 27	4 34	4 44	4 53	4 66	4 66
100	3 71	3 86	3 98	4 06	4 11	4 21	4·29	4 38	4 48	4 64	4 65
∞	3 64	3 80	3 90	3 98	4 04	4·14	4 20	4 31	4·41	4 60	4 68

Using special protection levels based on degrees of freedom.

This table was reproduced with the permission of the editor of Biometrics from the paper by D B Duncan, Biometrics 11 11–42, 1955

सारणी (घ-16)

r से z मे रूपान्तरण

Z	00	01	02	03	04	05	06	07	08	09	Mean Diff.
0	0000	0100	0200	0300	0400	0500	0599	0699	0798	0898	100
1	0997	1096	·1194	1293	1391	1489	·1586	1684	1781	1877	98
2	1974	2070	2165	·2260	2355	·2449	2543	2636	2729	2821	94
3	·2913	·3004	·3095	·3185	·3275	3364	3452	·3540	3627	3714	89
·4	·3800	3885	3969	4053	·4136	4219	4301	4382	4462	4542	82
·5	·4621	·4699	4777	4854	·4930	·5005	5080	5154	5227	5299	75
6	·5370	5441	·5511	5580	·5649	5717	·5784	5850	5915	5980	68
·7	·6044	6107	6169	6231	6291	6351	6411	6469	6527	6584	60
·8	6640	6696	6751	6805	6858	6911	6963	7014	7064	7114	53
·9	7163	7211	7259	7306	·7352	7398	·7443	7487	7531	7574	46
10	7616	·7658	7699	7739	7779	7818	7857	7895	7932	7969	39
11	8005	8041	8076	·8110	8144	8178	8210	8243	8275	8306	33
12	8337	8367	8397	8426	8455	8483	8511	8538	8565	8591	28
13	8617	8643	8668	·8692	8717	8741	8764	8787	8810	8832	24

वितत सारणी (च-16)

(2)

14	88<4	8875	8896	8917	·8937	8957	8977	8996	9015	9033	20
15	9051	9069	9087	9104	9121	9138	9154	9170	9186	9201	17
16	9217	9232	9246	9261	9275	9289	9302	9316	9329	9341	14
17	9354	9366	9379	9391	9402	9414	9425	·9436	9447	9458	12
18	94681	94783	94884	94983	95080	95175	95268	95359	95449	95537	95
19	95624	95709	95792	95873	95953	96032	961009	96185	96259	96331	79
20	96403	96473	96541	96609	96675	96739	96803	96865	96926	96986	65
21	97045	97103	97159	97215	97269	97323	97375	97426	97477	97526	53
22	97574	97622	97668	97714	97759	97803	97846	97888	97929	97970	44
23	98010	98049	98087	98124	98161	98197	98233	98267	98301	98335	36
24	98367	98399	98431	98462	98492	98522	98551	98579	98607	98635	30
25	98661	98688	98714	98739	98764	98788	98812	98835	98858	98881	24
26	98903	98924	98945	98966	98987	99007	99026	99045	99064	99083	20
27	99101	99118	99136	99153	99170	99186	99202	·99218	99233	99248	16

वितत सारणी (घ-16)
(3)

2 8	99263	99278	99292	·99306	99320	·99333	99346	·99359	99372	99384	13
2 9	·99396	·99408	·99420	99431	·99443	99454	99464	99475	99485	99495	11
	0	1	·2	3	·4	·5	6	7	8	9	
3	99505	99595	99668	99728	99777	·99818	99 851	99878	99900	·99918	
4	·99933	99945	99955	99963	99970	99975	99980	99983	99986	99989	

Table घ-16 gives the transformation $r = (e^{2z} - 1)/(e^{2z} + 1)$ or $z = \frac{1}{2} \log_e (1+r) - \log_e (1-r)$ with n defined as above z is distributed approximately normally with variance $1/(n-1)$ For exact work correct for bias in z by subtracting $r/2(n+1)$ from z

Table घ-16 is taken from Table VII_1 of Fisher and Yates Statistical Tables for Biological, Agricultural and Medical Research, Published by Longman Group Ltd, London. (previously published by Olivers & Boyd, Edinburgh), and by the permission of the authors and the publishers

सारणी (घ–17)
कोणीय रूपान्तरण

P%	0·0	0·1	0·2	0·3	0·4	0·5	0·6	0·7	0·8	0·9
0	0·00	1·81	2·56	3·14	3·63	4·05	4·44	4·80	5·13	5·44
1	5·74	6·02	6·29	6·55	6·80	7·03	7·27	7·49	7·71	7·92
[illegible]	8·13	8·33	8·53	8·72	8·91	9·10	9·28	9·46	9·63	9·80
3	9·97	10·14	10·30	10·47	10·63	10·78	10·94	11·09	11·24	11·39
4	11·54	11·68	11·83	11·97	12·11	12·25	12·38	12·52	12·66	12·79
5	12·92	13·05	13·18	13·31	13·44	13·56	13·69	13·81	13·94	14·06
6	14·18	14·30	14·42	14·54	14.65	14·77	14·89	15·00	15·12	15·23
7	15·34	15·45	15·56	15·68	15·79	15·89	16·00	16·11	16·22	16·32
8	16·43	16·54	16·64	16·74	16·85	16·95	17·05	17·15	17·26	17·36
9	17·46	17·56	17·66	17·76	17·85	17·95	18·05	18·15	18·24	18·34
10	18·43	18·53	18·63	18·72	18·81	18·91	19·00	19·09	19·19	19·28
11	19·37	19·46	19·55	19·64	19·76	19·82	19·91	20·00	20·09	20·18
12	20·27	20·36	20·44	20·53	20·62	20·71	20·79	20·88	20·96	21·05
13	21·13	21·22	21·30	21·39	21·47	21·56	21·64	21·72	21·81	21·89
14	21·97	22·06	22·14	22·22	22·30	22·38	22·4	22·54	22·63	22·71
15	22·79	22·87	22·95	23·03	23·11	23·18	23·26	23·34	23·42	23·50
16	23·58	23·66	23·73	23·81	23·89	23·97	24·04	24·12	24·20	24·27
17	24·35	24·43	24·50	24·58	24·65	24·73	24·80	24·88	24·95	25·03

वितत सारणी (घ–17)
(2)

18	25 10	25 18	25 25	25 33	25 40	25 47	25 55	25 62	25 70	26·77
19	25 84	25 91	25 99	26 06	26 13	26 21	26 28	26 35	26 42	26 49
20	26 57	26 64	26 71	26 78	26 85	26 92	26 92	27 06	27 13	27·20
21	27 27	27 35	27·42	27 49	27 56	27 62	27·69	27 76	27·83	27 90
22	27 97	28 03	28 11	28 18	28 25	28 32	28 39	28 45	28 52	28 59
23	28 66	28 73	28 79	28 86	28 93	29 00	29 06	29 13	29 20	29 27
24	29 33	29 40	29 47	29·53	29 60	29 67	29·73	29 80	29 87	29·93
25	30 00	30 07	30 13	30 20	30 26	30 33	30 40	30 46	30 53	30 59
26	30 66	30 72	30 79	30 85	30 92	30 98	31 05	31 11	31 18	31 24
27	31 31	31 37	31 44	31 50	31 56	31 63	31 69	31 76	31 82	31 88
28	31 95	32 01	32 08	32 14	32 20	32 27	32 33	32 39	32 46	32 52
29	32 58	32 65	32 71	32 77	32 83	32 90	32 96	33 02	33 09	33 15
30	33 21	33 27	33 34	33 40	33 46	33 52	33 58	33 65	33 71	33 77
31	33 83	33 90	33 96	34 02	34 08	34 14	34 20	34 27	34 33	34·39
32	34 45	34 51	34 57	34·63	34 70	34 76	34 82	34 88	34 94	35 00
33	35 06	35 12	34 18	35 24	35 30	35 37	35 43	35 49	35·55	35 61
34	35 67	35 73	35 79	35 85	35 91	35 97	36 03	36 09	35·15	35·21
35	36 27	36 33	36·39	36 45	36 51	36 57	36·63	36 69	36 75	36·81

वितत सारणी (प-17)

(3)

36	36·87	36·93	36·99	37·05	37·11	37 17	37·23	37·29	37·35	38·41
37	37·46	37·52	37·58	37·64	37·70	37 76	37·82	37 88	37·94	38 00
38	38·06	38·12	38·17	38·23	38·29	38·35	38·41	38·47	38·53	38·59
39	38·65	38·70	38·76	38·82	38·88	38·94	39·00	39·06	39·11	39·17
40	39·23	39·29	39 35	39·41	39·47	39·52	39·58	39·64	39·70	39·76
41	39·82	39 87	39 93	39 99	40·05	40·11	40·16	40·22	40·28	40·34
42	40·40	40·45	40·51	40·57	40 63	49 69	40·74	40 80	40·86	40·92
43	40·98	41·03	41·09	41·15	41·21	41.27	41·32	41·38	41·44	41·50
44	41·55	41·61	41·67	41·73	41·78	41·84	41 90	41·96	42·02	42·07
45	42·13	42·19	42·25	42·30	42·36	42·42	42·48	42 53	42·59	42·65
46	42·71	42·76	41·82	42·88	42·94	42·99	43 05	43·11	43·17	43·22
47	43·28	43·34	43·39	43·45	43·51	43.57	43·62	43·68	43·74	43·80
48	42·85	43·91	43·97	44 03	44·08	44 14	44·20	44·26	44·31	44·37
49	44·43	44·48	44·54	44·60	44·66	44·71	44 77	44·83	44·89	44·94
50	45·00	45 06	44·11	44·17	45·23	45·29	44 34	45 40	45·46	45·52
51	45·57	45·63	45·69	45·74	45·80	45·86	45·92	45·97	46·03	46·09
52	46·15	46·20	46·26	46·32	46·38	46·43	46·49	46 55	49·61	46·66
53	46·72	46·78	46·83	46·89	46·95	47 01	47·06	47·12	47·18	47·24

विलत सारणी (घ-17)

(4)

54	47.29	47.35	47.41	47.47	47.52	47.58	47.64	47.70	47.75	47.81
55	47.87	47.93	47.98	48.04	48.10	48.16	48.22	48.27	48.33	48.39
56	48.45	48.50	48.56	48.62	48.68	48.73	48.79	48.85	48.91	48.97
57	49.02	49.08	49.14	49.20	49.26	49.31	49.37	49.43	49.49	49.55
58	49.60	49.66	49.72	49.78	49.84	49.88	49.95	50.01	50.07	50.13
59	50.18	50.24	50.30	50.36	50.42	50.48	50.53	50.59	50.65	50.71
60	50.77	50.83	50.89	50.94	51.00	51.06	51.12	51.18	51.24	51.30
61	51.35	51.41	51.47	51.53	51.59	51.65	51.71	51.77	51.83	51.88
62	55.94	52.04	52.06	52.12	52.18	52.24	52.30	52.36	52.42	52.48
63	52.54	52.59	52.65	53.71	52.77	52.83	52.86	52.93	53.01	53.07
64	53.13	53.19	53.25	53.31	53.37	53.43	53.49	53.55	53.61	53.67
65	53.73	53.79	53.85	53.91	53.97	54.03	54.09	54.15	54.21	54.27
66	54.33	54.39	54.45	54.51	54.57	54.63	54.70	54.76	54.82	54.88
67	54.94	55.00	55.06	55.12	55.18	55.24	55.30	55.37	55.43	55.49
68	55.55	55.61	55.67	55.73	55.80	55.86	55.92	55.98	56.04	56.10
69	56.17	56.23	56.29	56.35	56.42	56.48	56.54	56.60	56.66	56.73
70	56.79	56.85	56.91	56.98	57.04	57.10	57.17	57.23	57.29	57.35
71	57.42	57.48	57.54	57.61	57.67	57.73	57.80	57.86	57.93	57.99

वितत सारणी (घ–17)
(5)

72	58 05	58 12	58 18	58 24	58 31	58 37	58 44	58 50	58 56	58 63
73	58 69	58 76	58 82	58 89	58 95	59 02	59 08	59 15	59 21	59 28
74	59 34	59 41	59 47	59 54	59 60	59 67	59 74	59 80	59 87	59 93
75	60 00	66 07	60 13	60 20	60 27	60 33	60 40	60 47	60 53	60 60
76	60 67	60 73	60 80	60 87	60 94	61 00	61 07	61 14	61 21	61 27
77	61 34	61 41	61 48	61 55	61 61	61 68	61 75	61 82	61 89	61 96
78	62 03	62 10	62 17	62 24	62 31	62 38	62 44	62 51	62 58	62 65
79	62 73	62 80	62 87	62 94	63 01	63 08	63 15	63 22	63 29	63 36
80	63 43	63 51	63 58	63 65	63 72	63 79	63 87	63 94	64 01	64 09
81	64 16	64 23	64 30	64 38	64 45	64 53	64 60	64 67	64 75	64 82
82	64 90	64 97	65 05	65 12	65 20	65 27	65 35	65 42	65 50	65 57
83	65 65	65 73	65 80	65 88	65 96	66 03	66 11	66 19	66 27	66 34
84	66 42	66 50	66 58	66 66	66 74	66 82	66 89	66 97	67 05	67 13
85	67 21	67 29	67 37	67 46	67·54	67 62	67 70	67 78	67 86	67 94
86	68 03	68 11	68 19	68 28	68 36	68 44	68 53	68 61	68 70	68 78
87	68 87	68 95	69 04	69 12	69·21	69 30	69 38	69 47	69 56	69 64
88	69 73	69 82	69 91	70 00	70 09	70 18	70 27	70 36	70 45	70 54
89	70 63	70 72	70 81	70 91	71 00	71 09	71 19	71 28	71 37	71 47

चितत सारणी (घ-17)
(6)

90	71 57	71 66	71 76	71 85	71 95	72 05	72 15	72 24	72 34	72 44
91	72 54	72 64	72 74	72 85	72 95	73 05	73 15	73 26	73 36	73 46
92	73 57	73 68	73 78	73 89	74 00	74 11	74 21	74 32	74 44	74 55
93	74 66	74 77	74 88	75 00	75 11	75 23	75 35	75 46	75 58	75 70
94	75 82	75 94	76 06	76 19	76 31	76 44	76 56	76 69	76 82	76 95
95	77 08	77 21	77 34	77 48	77 62	77 75	77 89	78 03	78 17	78 32
96	78 46	78 61	78 76	78 91	79 06	79 22	79 37	79 53	79 70	79 86
97	80 03	80 20	80 37	80 54	80 72	80 90	81 09	81 28	81 47	81 67
98	81 87	82 08	82 29	82 51	82 73	82 97	83 20	83 45	83 71	83 98
99	84 26	84 56	84 87	85 20	85 56	85 95	86 37	86 86	87 44	88 19

'Tables घ-17 is taken from Table X of Fisher and Yates Statistical Tables for Biological Agricultural and Medical Research Published by Longman Group Ltd, London (previously published by Oliver & Boyd Edinburgh) and by permission of the authors and the publishers'

FURTHER READ IN

1. Anderson, R. L., and Bancroft, T A (1952), Statistical Theory in Research, Mc Graw Hill Book Company, Inc, New York. (For Chapters 5, 11, 13, 21)
2. Anderson, T W (1958), An Introduction to Multivariate Analysis, John Wiley & Sons, Inc, New York (For Chapters 18)
3 Anderson, T W (1971), The Statistical Analysis of Time Series, John Wiley & Sons, Inc, New York. (for Chapter 16)
4. Arley, Niels and Buch, K. R (1953), Introduction to the Theory of Probability and Statistics John Wiley & Sons, Inc, New York, (For Chapters 5, 8)
5 Bliss, C L (1970), Statistics in Biology, Vol II, Mc Graw-Hill Book Company, Inc, New York. (For Chapter 20)
6 Budid, Moris (1962), Statistical Measurements for Economics and Administration, Asia Publishing House, Bombay (For Chapters 15, 16)
7 Cochran, William G (1959), Sampling Techniques, Asia Publishing House, Bombay (For Chapter 12)
8. Cochran W G, and Cox, G M (1959), Experimental Designs Asia Publishing House, Bombay. (For Chapter 21)
9. Crammer, HARALD (1958) Mathematical Methods of Statistics, Princeton University Press, Princeton. (For Chapters 5, 6, 7, 8, 9, 14)
10 Croxton, F E and Cowden, D J (1939), Applied General Statistics, Princeton Hall, New York. (For Chapters 2, 3, 4).
11 Des Raj (1968), Sampling Theory, Tata McGraw Hill Publishing Company Ltd, Bombay (For Chapter 12)
12 Dixon, W J, and Massey, F J, Jr (1957), Introduction to Statistical Analysis, McGraw Hill Book Company, Inc., New York (For Chapters 9, 21, 23)
13 Federer, Walter T. (1955), Experimental Design, Oxford & IBH Pub ishing Company, Calcutta. (For Chapters 21, 22, 23).
14 Feller, William (1968), An Introduction to Probability Theory and its applications, Vol. I, (Third Edn.) John Wiley & Sons, Inc., New York. (For Chapters 5, 6, 8).
15 Finney, D J (1964), Probit Analysis, University Press, Cambridge. (For Chapter 20)
16 Fish, Marek, (1963) Probability Theory and Mathematical Statistics, John Wiley & Sons, Inc New York. (For Chapters 5, 6, 7, 8)
17 Fisher, R. A., and Frank Yates (1963), Statistical Tables for Biological, Agricultural and Medical Research (Sixth Edition),

Oliver and Boyd Ltd, Edinburgh (For Chapters 9, 10, 12, 13, 14, 18, 19, 20, 21 23)

18 Goulden Cyril H (1952) Methods of Statistical Analysis, John Wiley & Sons Inc, New York (For Chapters 12, 19)

19 Graybill Franklin A (1961), An Introduction to Linear Statistical Models Vol I, McGraw-Hill Book Co, Inc New York (For Chapter 18)

20 Hansen Morris H HURWITZ WILLIAM N and Madow, William G (1956), Sample Survey Methods and Theory Vol I II, John Wiley & Sons Inc, New York (For Chapters 12)

21 Hoel, Paul G (1961), Introduction to Mathematical statistics, John Wiley & Sons Inc New York (For Chapters 6, 10)

22 Hogg, Robert V, Craig, Allen T, (1972), Introduction to Mathematical Statistics, Third Edition, Amerind Publishing Co Pvt Ltd, New Delhi (For Chapters 5, 6, 7, 10)

23 Kapur, J N, and Saxena H C (1960), Mathematical Statistics, S Chand & Co, New Delhi (For Chapters 4, 5, 6, 7)

24 Kempthone, Oscar (1952), *The design and Analysis of Experiments*, John Wiley & Sons, Inc, New York (For Chapter 21).

25 Kenny, J F, and Keeping E S (1951), *Mathematics of* Statistics, Part One, D Von Nostrand Company, Inc, New-York (For Chapters 2, 3, 4 5).

26 Kenny, J F, and Keeping E S (1951), Mathematics of Statistics Part two, D Von Nostrand Company, Inc, New York (For Chapters 5, 14)

27 Kshirsagar A M, (1972), Multivariate Analysis, Marcel Dekker, Inc, New York (For Chapter 18)

28 Mood, A M (1950), *Introduction to the theory of Statistics*, McGraw-Hill Book Company, Inc, New York (For Chapters 10, 11).

29 Mudgett, Bruce D (1951), Index Numbers, John Wiley & Sons Inc, New York, (For Chapter 15)

30 Ostle, Bernard (1696), Statistics in Research, Oxford & IBH Publishing Co Calcutta (For Chapters 9 13, 14, 21)

31 Parzen, E, (1960), *Modern Probability theory* and its Applications, John Wiley & Sons, Inc, New York (For Chapters 5, 6, 8)

32 Panse V G, and Suknatme P V (1967), Statistical Methods for Agricultural Workers Indian Council of Agricultural Research, New Delhi (For Chapter 21)

33 Pearson, Frank A, and Bennet Kenneth R (1955) Statistical Methods, John Wiley & Sons, Inc, New York (For chapters 15 16)

34. Pearson, E. S. and Hartey's H. O. (1970), Biometrics Tables for Statisticians, Vol. I, Lower and Brydone (Printerrs) Ltd., London. (For Chapters 9, 10, 12, 13, 14, 18, 19, 20, 21, 23).
35. Rao C R. (1952), Advanced Statistical Methods in Biometric Research, John Wiley & Sons, Inc., New York. (For Chapters 9, 11, 19).
36. Rao C. R. (1967), Linear Statistical Inference and its Application, Jhon Wiley & Sons, Inc, New York. (For Chapters 8, 18)
37. Searle, S. R. (1971), Linear Models, John Wiley & Sons, Inc., New York. (For Chapter 21)
38. Siegel, Sidney (1956), Nonparametric Statistics, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York. (For Chapter 10).
39. Snedecor, George W., and William G Cochran (1968), Statistical Methods, Oxford & IBH Publishing Co, Calcutta. (For Chapters 9, 13, 14, 21)
40. Spear Mary Eleanor (1952), Charting statistics, McGraw-Hill Book Company Inc, New York (For Chapter 2)
41. Steel, Robert G. D, and Torrie, James H. (1960), Principles and procedures of Statistics, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York (For Chapters 4, 21, 23, 23).
42. Sukhatme, P. V. and Sukhatme, B. V. (1970), Sampling Theory of Surveys with application, Asia Publishing House, Bombay. (For Chapter 12)
43 Walker, Helen M and Lev, Joseph (1953), Statistics as Applied to Economics and Business, Holt Rinehart and Winston, New-York. (For Chapters 6, 7, 9, 10).
44. Walker, Helen M and Lev Joseph (1953), Statistical inference, Henry Holt and Company, New York (For Chapters 6, 7, 9, 10)
45. Wessel, R H and Willet, E R (1963), Statistics as applied to Economics and Business, Holt Rinehart and Winston New York. (For Chapters 15, 16, 17).
46. Wilks, S S (1962), Mathematical Statistics, John Wiley & Sons, Inc, New York. (For Chapters 5, 6, 7, 11).

□ □ □

अनुक्रमणिका

□ □ □

पारिभाषिक शब्दावली

(सांख्यिकीय शब्दों का अंग्रेजी अनुवाद)

(अ)

अंश element, numerator
अग्रगामी advancing
अग्रवर्ती forward
अतिगुणोत्तर hypergeometric
अतिपरवलयिक *hyperbolic*
अदिश scalar
अनुकूलतम optimum
अनुक्रम sequence
अनुलग्न suffix
अनुक्रिया response
अनेकधा (बहु) multiple
अन्तराल interval
अन्तर्वर्ग intra-class
अन्तर्वेशन interpolation
अनन्तस्पर्शी asymptotic
अन्तश्चतुर्थक inter-quartile
अपवर्जी exclusive
अप्राचल non parametric
अप्राप्त missing
अभिकल्पना design
अभिगृहीतीय axiomatic
अभिधारणा assumption
अभिनति bias
अभिलक्षण characteristic
अभिसरण convergence
अवकल *differential*
अवशिष्ट residual
अकेन्द्र non-central
असतत discrete
असमिका inequality

(आ)

आकलित (आगणित) estimated
आघूर्ण moment
आनुपातिक proportional
आयत-चित्र histogram
आयताकार rectangular
आरेख diagram, graph
आलेखन plotting
आव्यूह matrix
आसंग contingency
आसंजन सौष्ठव goodness of fit
(समंजन सुष्ठुता)

(उ)

उपचार (शोधन) treatment
उपनति trand
उपप्रतिचयन subsampling
उपरि upper
उपागम approach
उपान्त *marginal*

(ऋ)

ऋणात्मक negative
ऋतुनिष्ठ seasonal

(ए)

एकक (व्यष्टि) unit, individual
एकधा oneway
एक समान *uniformly*

(क)

ककुदता kurtosis
कारक factor
कालोत्क्रमण time reversal
कीलकेन्द्रीय संघनन विधि *pivotal condensation method*
केन्द्रीय central
कोटि rank
कोटि-अक्ष ordinate
कोणीय angular
कोष्ठिका cell
क्रम *order*
क्रमचय permutations
क्रमबद्ध systematic

(ख)

खण्ड block

(ग)

गणना चिह्न tally marks
गणितीय mathematical
गतिमान moving
गुच्छ cluster
गुणांक coefficient

(घ)

घटना event
घनत्व density
घात power
घातीय exponential

(च)

चक्रीय cyclical
चतुर्थक quartiles
चर variable
चरघातांकी exponential
चापज्या arcsin
चिरप्रतिष्ठित classical
चिह्न sign

(ज)

जनक generating

(त)

त्रिचरण three stage
तोरण ogive

(द)

दण्ड bar
दशमक decile
द्विचरण two stage
द्विधा two way
द्विवर्णी binary
दीर्घकालिक secular

(न)

निकष criterion
निम्न lower
नियतन allocation
निराकरण क्षेत्र critical region
निराकरणीय null
निरूपण representation
निर्धारक गुणांक coefficient of determination
निर्वचन interpretation
न्यास data

(प)

पंक्ति row
पदानुक्रमानुसार therarchical
परम्परा run
परस्पर mutual
परस्पर-क्रिया interaction
परिकलन calculation
परिकल्पना hypothesis
परिगणन enumeration
परिमाण size
परिमित finite
परिसर range
परीक्षा test
पुच्छ tail
पुनरावृत्ति replication
पूर्णांकन rounding of numbers
पूरक complementary
प्रक्रिया processing
प्रतिचयन sampling
प्रतिचयन अनुपात sampling fraction
प्रतिदर्श sample
प्रतिरूप model
प्रतिलोम inverse
प्रतिस्थापन substitution
प्रपश्च backward
प्रत्याशा expectation
प्रमेय theorem
प्रवृत्ति tendency
प्रश्नावली questionnaire, excercise
प्रसरण variance
प्रसामान्य normal
प्रेक्षण observation

(फ)

फलन function

(ब)

बंटन distribution
बहिर्वेशन extrapolation
बहुउपादानीय factorial
बहुक्रम multistage
बहुचर multivaria'e

बहुभुज polygon
बहुलक mode
बहुसमाश्रयण multiple regression
बारम्बारता frequency
बीजीय algebraical
बृहत् large

(भ)

भूखण्ड plot
भेंटकर्ता investigator

(य)

यादृच्छिक random
युग्म paired
यूनिट (एकक) unit

(र)

रूपान्तरण transformation

(ल)

लघुगणक logarithm
लांबिक orthogonal
लेखाचित्र graph

(व)

वक्र curve
वर्ग class, square
वर्ग योग (व० यो०) sum of squares
वर्गीकरण classification
विचर deviate
विचरण-स्रोत source of variation
विचलन deviation
विजातीय heterogeneous
विनिमेय commutative
विन्यास arrangement
विपाटित split
विविक्तकर discriminant
विश्लेषण analysis
विश्वास्यता confidence
विषम skew, asymmetric
विक्षेपण dispersion
वैकल्पिक alternative
वैषम्य contrast, comparision
वैषम्य-गुणांक coefficient of skewness
व्यञ्जक expression
व्युत्क्रमणीय reciprocal
व्युत्पन्न derive

(श)

शक्ततम most powerful
शततमक percentile
शुद्धि correction
शून्य null, zero

(श्र)

शृंखला chain

(स)

संकरण confounding
संकेतीकरण coding
संगणक calculator
संचय combination
संचयी cumulative
संतत continuous
संपाती coincident
संयुक्त composite
संशोधन कारक correction factor
सजातीय homogeneous
सदिश vector
सन्निकट approximate
सप्रतिबन्ध conditional
समष्टि population
समंजन fitting
समंजन सुष्ठुता goodness of fit
(आसंजन सौष्ठव)
सममित symmetrical
समाकलन integration
समायोजन adjustment
समावेशी nested
समाश्रयण regression
समुच्चय set
सम्बद्ध associated
सम्भाविता likelihood
सर्वेक्षण survey
सहखण्ड cofactor
सहचर covariate
सहप्रसरण covariance
सहवर्ती concomitant
सहसम्बन्ध correlation
सहायक ancillary

सहिष्णुता tolerance
सापेक्ष relative
सामंजस्य-गुणांक coefficient of concordance
सामर्थ्य power
सारणिक determinant
सारणी table
सारणीयन tabulation
सार्थकता significance
साहचर्य associative
सीमा limit
सूचकांक index number
सूची-पत्रक schedule
स्तम्भ column
स्तर level
स्तरण stratification
स्फीति inflation
स्वतन्त्रता-कोटि degrees of freedom
(स्वतन्त्रता-संख्या)

(ह)

हर denominator

(क्ष)

क्षेत्र plot, area

□ □ □

शुद्धि-पत्र

पृष्ठ-संख्या	पंक्ति या सूत्र में	अशुद्ध	शुद्ध
27	(3 4)	$f_i y_i$	$f_i Y_i$
34	* ↑ 13	उदाहरण (3 1)	उदाहरण (2 1)
39	** ↓ 5	30 35	20·35
39	↓ 6	49 45	46·34
40	↓ 18	[3 – 4]	(3 – 3)
40	चित्र (3 – 3)		अक्षर क, ख, ग, घ और न लिख दें।
41	↓ 1	(3,14)	(3 13)
46	↓ 12	उदाहरण (3.1)	उदाहरण (4.1)
46	↑ 10	सूत्र (3.5)	सूत्र (4,4)
49	↑ 13	$\bar{X}$	μ
66	↓ 7	संख्या	यह शब्द छोड़ दें।
101	(6·21)	हर मे (^{n})	(^n_r)
101	↑ 2 व ↑ 11	प्यासों व प्यासों	प्यासों
105	चित्र (7–3)	रेखाच्छादित क्षेत्र दायें पृष्ठ पर दिया है	यह क्षेत्र बायें पृष्ठ पर समझिये।
117	↓ 8	सामान्य	प्रसामान्य
132	↓ 2	6·3	8·3
135	↑ 3 व ↑ 7	अभिलक्षणिक	अभिलक्षण]
138	↓ 1	$0(n^{\frac{1}{2}})$	$0(n^{-\frac{1}{2}})$
140	↑ 3	$H_0 : \sigma^2 > 0, H_1 \cdot \sigma^2 > 0$	$H_0 \ \sigma^2 < 0, H_1 \cdot \sigma^2 > 0$
149	↓ 4	से अधिक	से कम
155	↓ 5	$\frac{1}{n-1}\left\{\sum_i d_i - (\sum_i d_i)^2/n\right\}$	$\frac{1}{n-1}\left\{\sum_i d_i^2 - (\sum_i d_i)^2/n\right\}$
167	↑ 5	स्वरूप	सामान्य
171	↓ 3	(9·26)	(9.31)

पृष्ठ-संख्या	पंक्ति या सूत्र में	अशुद्ध	शुद्ध
172	↑ 5	5 जोड़कर	·5 घटाकर
172	↑ 5	132 में से ·5 घटाने	132 में ·5 जोड़कर
174	↓ 4	(9 12)	(9·13)
175	↓ 10	(9·12)	(9·13)
183	चित्र (9·4)	$(x-1)$	$(n-1)$
183	↑ 4 व ↑ 5	$\sum_i X_i^2$	$\sum_i x_i^2$
185	↑ 2	(9·40)	(9·41)
199	↓ 7	a | b | aaa | bb | aa | bbb | aa | b	b | a | bbb | aaa | b | aaa | bb | a
200	↓ 10	स्वीकार	अस्वीकार
206	↓ 17	1, 2, −3, 4 व 5	1, −2, 3, 4 व 5
208, 209, व 215	↑ 3, 5, 7, 8 व ↓ 2 व ↓ 1	मीर	मोर
217	↑ 8	$\psi(\hat{\Omega})$	$\psi(\hat{\omega})$
230	↓ 6	$L=\left\{\frac{1}{\quad}\right\}$	$L=\left\{\frac{1}{\quad}\right\}^{n/2}$
231	↓ 14	$\sqrt{n}\,(n-1)$	$\sqrt{n(n-1)}$
285	(13·22)	$\sum_i y_i$	$\sum_i y_i^2$
286	↑ 6	स्वीकार	अस्वीकार
291	↑ 15	2	1·8
302	↑ 2	प्राचलों	प्राक्कलकों
305	↑ 12	(c_{ij}) है तो b_i's	$((c_{ij}))$ है तो b_i's
309	↓ 3	$R \sum_i Y_i^2$, $R^2 \sum_i y_i/K$	$R^2 \sum_i y_i^2$, $R^2 \sum_i y_i^2/K$
330	↑ 9	प्रतिदर्गज	प्रतिदर्श
335	↓ 7 हर में	$\sqrt{\sum_i\{()-()^2\}\sum_i\{()-()^2\}}$	$\sqrt{\sum_i\{()-()\}^2\sum_i()-()\}^2}$
348	↑ 11	$\frac{pX(n+1)}{1}$	$\frac{p_x(n+1)}{2}$

पृष्ठ संख्या	पंक्ति या सूत्र में	अशुद्ध	शुद्ध
356	↓ 1 हर में	$\Sigma^2{}_j$	ΣX_j^2
377	↓ 10	माण	भार
401	↓ 2	Y	$\bar{Y}$
414	↑ 5 हर में	180	100
433	↑ 13 व 12	1122 व $\frac{386}{5} = 60\ 6$	1289 व $\frac{553}{5} = 110\ 6$
437	↑ 3	$\Delta^3{}_0 = 3\ 7$	$\Delta_0{}^3 = -3\ 7$
464	(18 26)	$(\bar{X} - \mu_{i0})$	$(\bar{X}_i - \mu_{i0})$
487	↓ 2 व 3	का, LD S_0	को LD 50
488	↓ 7	घोर	घोर
516	↓ 4	$S_{EE}\ n - K$	$S_{EE}/n - K$
533	↑ 1	$\sum_i \sum_j e_{ij}$	$\sum_i \sum_j e_{ij}^2$
535	(21 19)	$\sum_i \sum_j (X_{ij}\ \bar{X}_j - \bar{X}_i + \bar{X})$	$\sum_i \sum_j (X_{ij} - \bar{X}_j - \bar{X}_i + \bar{X})^2$
536	↓ 13	$\sum_i \sum_j (X_j - \bar{X}_j + \bar{X}_i + X)$	$\sum_i \sum_j (X_{ij} - \bar{X}_j - \bar{X} + X)$
536	↑ 5	e_{ij} व $-2e_{ij} - \bar{e_i}$	e_{ij} व $-2e_j\ \bar{e}_j$
541	सारणी (21 9)	प्रत्याशित मा० व० य० के स्तम्भ में = हटाकर	या लगाएँ
554	↑ 10	$\rho_j \cdot \beta_j$	$\rho_j^2\ \beta_j^2$
569	सारणी (21 14) ↓ 3	एक पंक्ति बढ़ायें	A $p-1$ A_{xx} $A_{xx}\ p-1 = A'$ A'/s_e^2 F_A
572	↑ 11	3359 3	3357 2
576	↓ 6 हर में	r×q	r×q×p
584	↓ 7	23	2^3
590	↑ 4	=	उपचार व०य० =
592	↑ 1	R	P
623–32		विमिनि	विमिति

पृष्ठ संख्या	पंक्ति या सूत्र में	अशुद्ध	शुद्ध
625	↓ 6	$a_K b_{Kj}$	$a_K b_{Kj}$
628	↓ 17	A के तुल्य रख दिया	A के तुल्य I रख दिया
630	↓ 6	$b_{13\cdot1} - a_{21} b_{13}$	$b_{13\cdot1} = a_{23} - a_{21} b_{13}$
630	↑ 15	दायीं	बायीं
633–34		r1 व 2/ आदि	r^1 व 2^1 आदि
635	↓ 7	जिनमें A	जिनमें A_1

* ↑ नीचे से ऊपर की ओर

** ↓ ऊपर से नीचे की ओर

□ □ □

GREEK ALPHABETS

	α	alpha		ν	nu
	β	beta		ξ	xi
Γ	γ	gamma		o	omicron
Δ	δ	delta		π	pi
	ϵ	epsilon		ρ	rho
	ζ	zeta		σ	sigma
	η	eta		τ	tau
	θ	theta		υ	upsilon
	ι	iota		ϕ	phi
	κ	kappa		χ	chi
Λ	λ	lambda		ψ	psi
	μ	mu	Ω	ω	omega